ISSN 1810-4134

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

И С С Л Е Д О В А Н И Я
ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 7

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2012

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам:** Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. – Вып. 7. – 1 с.: ил.

Сборник содержит работы, посвященные исследованию различных задач теории L-функций, диафантового анализа, а также работы, связанные с применением методов гомологической алгебры и функционального анализа в смежных вопросах.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области алгебры, теории чисел и функционального анализа.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

УДК 517.51

Р.Н. ФАДЕЕВ

Необходимые и достаточные условия принадлежности обобщенным классам Бесова

Введение

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \le p_n \le N$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1, m_n = p_n * m_{n-1}$. Каждое $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/m_i, \quad x_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le x_i < p_i. \tag{1}$$

Если $x = k/m_i$, $k, i \in \mathbb{N}$, то мы рассматриваем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Если x, y представлены в виде (1), то $x \ominus y = z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} z_i/m_i$, где $z_i = x_i - y_i \pmod{p_i}$. Аналогично определяется $x \oplus y$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k_i < p_i. \tag{2}$$

Для x и k, представленных в виде (1) и (2) соответственно, определим

$\chi_k(x)$ формулой $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)$. Система $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0,1)$ (см [1, §1.5]). Положим по определению

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, есть пространство интегрируемых по Лебегу в p-й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Максимальную функцию для $f \in L^1[0,1)$ определим равенством $M(f)(x) = \sup\limits_{n\in Z_+} |S_{m_n}(f)(x)|$. Если $M(f)(x) \in L^1[0,1)$, то f принадлежит $\mathbf{P}$-ичному пространству Харди $H(\mathbf{P},[0,1))$ с нормой $\|f\|_H = \|M(f)\|_1$.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда для $f \in L^p[0,1)$ по определению $E_n(f)_p = \inf\limits_{t_n\in\mathcal{P}_n} \|f - t_n\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega^*(f,t)_p = \sup\limits_{0<h<t} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_p$, $t \in [0,1]$. Для $f \in L^p[0,1)$ справедливо неравенство Ефимова (см. [1, §10.5])

$$E_{m_n}(f)_p \le \|f - S_{m_n}(f)\|_p \le \omega^*(f, 1/m_n)_p \le 2E_{m_n}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Аналогичным образом можно ввести $E_n(f)_H, \omega^*(f,t)_H$ и для них будет справедлив аналог неравенства (3).

Пусть $p \ge 1$, $\theta \in (0,\infty)$, $\alpha(t)$ — положительная на $[0,1)$ и интегрируемая на всех $[\delta,1)$, $\delta > 0$, функция, для которой выполнено δ_2-условие

$$\int_{\delta/2}^{\delta} \alpha(t)dt \le C\int_{\delta}^{2\delta} \alpha(t)dt \le C\int_{\delta}^{1} \alpha(t)dt, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$A(i) = \int_{1/(i+1)}^{1/i} \alpha(t)\,dt, \quad \mu(i) = \int_{1/m_i}^{1/m_{i-1}} \alpha(t)\,dt, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что из δ_2-условия вытекает неравенство $\mu(i+1) \le C\mu(i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Если величина $I(p,\theta,\alpha) = \int_0^1 \alpha(t)\left(\omega^*(f,t)\right)^{\theta}\,dt$ конечна, то f принадлежит классу Бесова $B(p,\theta,\alpha)$. Аналогично определяются $I(H,\theta,\alpha)$ и

$B(H, \theta, \alpha)$. Классы $B(p, \theta, \alpha)$ являются аналогами классов, введенных М.К.Потаповым [2].

Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ почти возрастает (почти убывает), если $a_n \leq Ca_{n+i}$ ($a_n \geq Ca_{n+i}$) при всех $1 \leq i \leq n$.

Если $d_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} |\Delta a_i| = \sum\limits_{i=k}^{\infty} |a_i - a_{i+1}|$ и справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k^p k^{p-2} < \infty$, $1 < p < \infty$, то $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежит классу AW^p, названному в честь работы Р.Аски и Р.Вейнгера [3]. Если же $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| \ln(k+ +1) < \infty$, то $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежит классу AW^1.

Целью данной работы является получение достаточных и необходимых условий принадлежности функций классам $B(p, \theta, \alpha)$ и $B(H, \theta, \alpha)$. Некоторые близкие результаты в тригонометрическом случае были получены Х.А.Красники [4].

1. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < \infty$, $f \in L^p[0,1)$ и $\alpha(t)$ удовлетворяет δ_2-условию, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p \leq \int_0^1 \alpha(t) \left(\omega^*(f,t)_p\right)^{\theta} dt \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p + \|f\|_p^{\theta} \right). \tag{4}$$

Аналогичный результат верен для $\omega^*(f,t)_H$ и $E_{m_k}^{\theta}(f)_H$

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу неравенства (3) и возрастания $\omega^*(f,t)_p$ имеем

$$\mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p \leq \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} \alpha(t) \left(\omega^*(f, 1/m_k)_p\right)^{\theta} dt \leq \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} \alpha(t) \left(\omega^*(f,t)_p\right)^{\theta} dt. \tag{5}$$

Суммируя неравенства (5) по $k \geq 1$, получаем левую часть неравенства (4). Аналогично, используя неравенство $C_1 \mu(i+1) \leq \mu(i)$, $i \geq 1$, находим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)E^{\theta}_{m_k}(f)_p \geq 2^{-\theta}C_1\mu(k+1)\left(\omega^*(f,1/m_k)\right)^{\theta} \geq$$

$$\geq C_2\int_{1/m_{k+1}}^{1/m_k}\alpha(t)\left(\omega^*(f,t)\right)^{\theta}dt. \qquad (6)$$

Так как $\alpha(t)\in L^p[1/m_1,1)$, то $\int_{1/m_1}^{1}\alpha(t)\left(\omega^*(f,t)\right)^{\theta}dt \leq C(\alpha)\|f\|_p^{\theta}$. Суммируя неравенства (6) и добавляя последнее неравенство, получаем правую часть нервавенства (4). Лемма доказана.

Леммы 2 и 3 доказаны в работе [5].

Лемма 2. *Пусть* $1<p<\infty, \{a_k\}_{k=0}^{\infty}\in AW^p$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, *тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f\in L^p[0,1)$ *и*

$$E_n(f)_p \leq C\left(n^{p-1}d_n^p+\sum_{k=n}^{\infty}k^{p-2}d_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 3. 2. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}\in AW^1$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, *тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\chi_k(x)$ *является рядом Фурье функции* $f\in H(P,[0,1))$ *и*

$$E_n(f)_H \leq C\sum_{i=n}^{\infty}|\Delta a_i|\log(i+1).$$

Лемма 4 доказана Л.Лейндлером в [6] и является обобщением известных неравенств Харди и Литтвуда [7, теорема 346].

Лемма 4. *Пусть* $a_n\geq 0$ *и* $\lambda_n>0$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$.

1) *Если* $p\geq 1$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{i=n}^{\infty}a_i\right)^p \leq p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^p a_n^p.$$

2) *Если* $0 < p \le 1$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^p a_n^p \le 9 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^p .$$

Лемма 5 также доказана Л.Лейндлером [8].

Лемма 5. 1) *Пусть* $a_n, \lambda_n \ge 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *почти убывает,* $0 < p < 1$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^p \le C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \left(n\lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right).$$

2) *Пусть* $a_n, \lambda_n \ge 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *почти возрастает,* $p \ge 1$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \le C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_i \right)^p .$$

Лемма 6 является частным случаем теоремы Пэли (см. [9, глава 6, теорема [6.3.2]]).

Лемма 6. *Пусть* $f \in L^p[0,1), 1 < p \le 2$, *тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \hat{f}(i) \right|^p i^{p-2} \right)^{1/p} \le C \|f\|_p.$$

Последняя лемма является аналогом неравенства Харди и распространяет результат леммы 6 на случай $p = 1$ (см. [10, §6.1]).

Лемма 7. *Пусть* $f \in H(P, [0,1))$, *тогда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{f}(j) \right| / j \le C \|f\|_H.$$

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$, $f \in L^p[0,1)$ *и* $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in AW^p$. *Если функция* $\alpha(t)$ *такова, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \le MkA(k)$, $k \in \mathbb{N}$, *и сходится ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A(i) i^{\theta-\theta/p} d_i^{\theta}$, *где* $d_i = \sum_{j=i}^{\infty} |\Delta \hat{f}(j)|$, *то* $f \in B(p,\theta,\alpha)$ *и при этом*

$$I(p,\theta,\alpha) \le C \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{\theta-\theta/p} d_i^{\theta} + \|f\|_p^{\theta} \right).$$

Доказательство

Согласно лемме 1 имеем

$$I(p,\theta,\alpha) \le C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p + \|f\|_p^{\theta} \right). \tag{7}$$

В силу убывания $E_i(f)_p$ находим, что

$$\mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p \le \sum_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} \int_{1/(i+1)}^{1/i} \alpha(t)\, dt E_i^{\theta}(f)_p = \sum_{i=m_{k-1}}^{m_k-1} A(i) E_i^{\theta}(f)_p.$$

Подставляя в (7) последнее неравенство, а затем неравенство леммы 2, получаем

$$I(p,\theta,\alpha) \le C_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) E_i^{\theta}(f)_p + \|f\|_p^{\theta} \right) \le$$

$$\le C_3 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) i^{\theta-\theta/p} d_i^{\theta} + \sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{k=i}^{\infty} k^{p-2} d_k^p \right)^{\theta/p} + \|f\|_p^{\theta} \right) =$$

$$= C_3 \left(I_1 + I_2 + \|f\|_p^{\theta} \right). \tag{8}$$

Пусть $\theta/p \le 1$. Поскольку $\{d_k^p\}_{k=1}^{\infty}$ убывает, то $\{k^{p-2} d_k^p\}_{k=1}^{\infty}$ почти убывает, поэтому можно применить часть 1) леммы 5. Имеем с учетом условия $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \le MkA(k)$

$$I_2 \le C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{p-2} d_k^p \right)^{\theta/p} k^{\theta/p-1} \left(kA(k) + \sum_{j=1}^{k} A(j) \right) \le$$

$$\leq C_5 \sum_{k=1}^{\infty} A(k) k^{\theta-\theta/p} d_k^{\theta} = C_5 I_1.$$

Подставляя последнее неравенство в (8), получаем утверждение теоремы 1 при $\theta/p \leq 1$.

При $\theta/p > 1$ используем часть 1) леммы 4. Имеем

$$I_2 \leq C_6 \sum_{i=1}^{\infty} A^{1-\theta/p}(i) \left(i^{p-2} d_i^p\right)^{\theta/p} \left(\sum_{j=1}^{i} A(j)\right)^{\theta/p} \leq C_7 \sum_{i=1}^{\infty} A(i) i^{\theta-\theta/p} d_i^{\theta} = C_7 I_1,$$

также используя условие $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \leq MkA(k)$. Подставляя последнее неравенство в (8), завершаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leq 2$, $0 < \theta < \infty$, $f \in B(p, \theta, \alpha)$, *где* $\alpha(t)$ *такова, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \geq MkA(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

1) *Пусть* $\theta/p \leq 1$, *тогда*

$$\|f\|_p^{\theta} + I(p, \theta, \alpha) \geq C \sum_{j=1}^{\infty} A(j) j^{\theta - \frac{\theta}{p}} |\hat{f}(j)|^{\theta}. \tag{9}$$

2. *Пусть* $\theta/p > 1$ *и последовательность* $\{|\hat{f}(i)|\}_{i=1}^{\infty}$ *почти возрастает. Тогда справедливо неравенство (9).*

Доказательство

Согласно лемме 1 имеем

$$I(p, \theta, \alpha) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) E_{m_k}^{\theta}(f)_p \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_1 \mu(k+1) E_{m_k}^{\theta}(f)_p \geq$$

$$\geq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \int_{1/(i+1)}^{1/i} \alpha(t)\, dt E_i^{\theta}(f)_p = C_1 \sum_{i=m_1}^{\infty} A(i) E_i^{\theta}(f)_p.$$

С другой стороны, $\|f\|_p^{\theta} \geq C_2(\alpha) \sum\limits_{i=1}^{m_1-1} A(i) E_i^{\theta}(f)_p$, откуда следует, что

$$\|f\|_p^{\theta} + I(p, \theta, \alpha) \geq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} A(i) E_i^{\theta}(f)_p.$$

При $1 < p < \infty$ справедливо неравенство $\|f - S_n(f)\|_p \le C_4 E_n(f)_p$ (см. [11] или [12]), откуда благодаря лемме 6 находим, что

$$\|f\|_p^\theta + I(p,\theta,\alpha) \ge C_5 \sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} |\hat{f}(j)|^p j^{p-2} \right)^{\theta/p}.$$

Пусть $\theta/p \le 1$. Используя условие $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \ge MkA(k)$ и часть 2) леммы 4, получаем

$$\|f\|_p^\theta + I(p,\theta,\alpha) \ge 9^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} A^{1-\theta/p}(j) \left(\sum_{i=1}^{j} A(i) \right)^{\theta/p} \left(|\hat{f}(j)|^p j^{p-2} \right)^{\theta/p} \ge$$

$$\ge C_6 \sum_{j=1}^{\infty} A(j) |\hat{f}(j)|^\theta j^{\theta-\theta/p}.$$

Если же $\theta/p > 1$ и $\{|\hat{f}(i)|\}_{i=1}^{\infty}$ почти возрастает, то последовательность $\{|\hat{f}(i)|^p i^{p-2}\}_{i=1}^{\infty}$ тоже почти возрастает. Поэтому, используя часть 2) леммы 5, имеем

$$\|f\|_p^\theta + I(p,\theta,\alpha) \ge C_7 \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\hat{f}(j)|^p j^{p-2} \right)^{\theta/p} j^{\theta/p-1} \sum_{i=1}^{j} A(i) \ge$$

$$\ge C_8 \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{f}(j)|^\theta j^{\theta-\theta/p} A(j).$$

Теорема доказана.

Будем писать, что $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу RBVS, если $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| \le C a_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\{n^\tau a_n\}_{n=0}^{\infty}$ возрастает при некотором $\tau > 0$, то $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in A_{-\tau}$. Классы RBVS и $A_{-\tau}$ были введены соответственно Л.Лейндлером[13] и Г.К. Лебедем[14]. Они используются в различных вопросах теории мультипликативных систем (см. [15]).

Следствие 1. Пусть $1 < p \le 2$, $0 < \theta/p \le 1$, $f \in L^p[0,1)$. Если $\alpha(t)$

такова, что

$$M_1 kA(k) \le \sum_{i=1}^{k} A(i) \le M_2 kA(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

и $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in RBVS$, то $f \in B(p,\theta,\alpha)$ в том и только в том случае, когда сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\hat{f}(i)|^{\theta} A(i) i^{\theta-\theta/p}$.

Следствие 2. Пусть $1 < p \le 2$, $\theta/p \ge 1$, $f \in L^p[0,1)$. Если для $\alpha(t)$ выполнено условие (10) и $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in A_{-\tau} \cap RBVS$ при некотором $\tau > 0$, то условия $f \in B(p,\theta,\alpha)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\hat{f}(i)|^{\theta} A(i) i^{\theta-\theta/p}$ равносильны.

Замечание 1. Класс функций, для которых выполняется условие (10), достаточно широк. Например, $\alpha(t) = t^{-\beta}, \beta > 1$, удовлетворяют этому условию.

Докажем теперь аналоги теорем 1 и 2 для классов $B(H,\theta,\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть $0 < \theta < \infty$, $f \in H(\mathbf{P},[0,1))$, $\{\hat{f}(i)\}_{i=0}^{\infty} \in AW^1$. Если функция $\alpha(t)$ такова, что $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \le MkA(k)$ и сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} \log^{\theta}(i+1)$, где $d_i = \sum_{j=i}^{\infty} |\Delta \hat{f}(j)|$, то $f \in B(H,\theta,\alpha)$ и при этом*

$$I(H,\theta,\alpha) \le C \sum_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} \log^{\theta}(i+1).$$

Если $\theta \ge 1$, то d_i можно заменить на $\left|\Delta \hat{f}(i)\right|$.

Доказательство

В силу леммы 1 и леммы 3 имеем аналогично доказательству теоремы 1

$$I(H,\theta,\alpha) \le C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) E_i^{\theta}(f)_H + \|f\|_H^{\theta} \right) \le$$

$$\le C_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left|\Delta \hat{f}(i)\right| \ln(j+1) \right)^{\theta} + \|f\|_H^{\theta} \right).$$

При $\theta \geq 1$, используя часть 1) леммы 4, находим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} \left| \Delta \hat{f}(i) \right| \ln(j+1) \right)^{\theta} \leq$$

$$\leq \theta^{\theta} \sum_{j=1}^{\infty} A^{1-\theta}(j) \left(\sum_{i=1}^{j} A(i) \right)^{\theta} \left| \Delta \hat{f}(j) \right|^{\theta} \ln^{\theta}(j+1) \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{j=1}^{\infty} A(j) \left| \Delta \hat{f}(j) \right|^{\theta} \ln^{\theta}(j+1).$$

При $\theta < 1$ преобразуем неравенство леммы 3 с помощью преобразования Абеля. Имеем

$$E_i(f)_H \leq C_4 \sum_{j=i}^{\infty} \left| \Delta \hat{f}(j) \right| \ln(j+1) = C_4 \sum_{j=i}^{\infty} (d_j - d_{j+1}) \ln(j+1) =$$

$$= C_4 \left(d_i \ln(i+1) + \sum_{j=i+1}^{\infty} d_j \ln(1 + 1/j) \right) \leq C_4 \left(d_i \ln(i+1) + \sum_{j=i+1}^{\infty} d_j j^{-1} \right).$$

Преобразование Абеля выполнено корректно, поскольку $d_{n+1} \ln(n+1) \leq \leq \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \left| \Delta \hat{f}(i) \right| \ln(i+1)$ и правая часть последнего неравенства стремится к нулю.

Поскольку $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$ убывает, то $\{d_i i^{-1}\}_{i=1}^{\infty}$ тоже убывает. Поэтому согласно части 1) леммы 5 имеем

$$I(H, \theta, \alpha) \leq C_5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(d_i \ln(i+1) + \sum_{j=i+1}^{\infty} d_j j^{-1} \right)^{\theta} + \|f\|_H^{\theta} \right) \leq$$

$$\leq C_5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} \ln^{\theta}(i+1) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(d_i i^{-1} \right)^{\theta} i^{\theta-1} \left(i A(i) + \sum_{j=1}^{i} A(j) \right) + \|f\|_H^{\theta} \right) \leq$$

$$\leq C_6 \left(\sum_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} \ln^{\theta}(i+1) + \sum_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} + \|f\|_H^{\theta} \right).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если предположить, что $d_i \ln(i+1) \le C_1 \sum\limits_{j=i}^{\infty} j^{-1} d_j$, то оценка теоремы 3 приобретет вид $I(H,\theta,\alpha) \le C_2 \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A(i) d_i^{\theta} + \|f\|_H^{\theta}\right)$. К сожалению, даже для $d_j = j^{-\beta}$, $\beta > 0$, такое предположение неверно. В результате даже при наложении условий типа $RBVS$ получается зазор между оценками теорем 3 и 4.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \theta \le 1$, $f \in B(H,\theta,\alpha)$, *где* $\alpha(t)$ *такова, что* $\sum\limits_{i=1}^{k} A(i) \ge MkA(k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$I(H,\theta,\alpha) + \|f\|_H^{\theta} \ge C \sum_{j=1}^{\infty} A(j) \left|\hat{f}(j)\right|^{\theta}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу неравенства (3) для $H(\mathbf{P},[0,1))$ и леммы 7 имеем

$$E_{m_n}(f)_H \ge 2^{-1} \|f - S_{m_n}(f)\|_H \ge C_1 \sum_{j=m_n}^{\infty} j^{-1} \left|\hat{f}(j)\right|.$$

Из леммы 1 и δ_2-условия следует, что

$$I(H,\theta,\alpha) \ge C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/m_{k+1}}^{1/m_k} \alpha(t)\, dt E_{m_k}^{\theta}(f)_H \ge$$

$$\ge C_3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} j^{-1} \left|\hat{f}(i)\right|\right)^{\theta} =$$

$$= C_3 \sum_{i=m_1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} j^{-1} \left|\hat{f}(i)\right|\right)^{\theta},$$

откуда аналогично доказательству теоремы 2

$$I(H,\theta,\alpha) + \|f\|_p^{\theta} \ge C_4 \sum_{i=1}^{\infty} A(i) \left(\sum_{j=i}^{\infty} j^{-1} \left|\hat{f}(i)\right|\right)^{\theta}.$$

Согласно части 2) леммы 4 находим, что

$$I(H,\theta,\alpha)+\|f\|_H^\theta \geq C_5 \sum_{j=1}^{\infty} A^{1-\theta}(j)\left(\sum_{i=1}^{j} A(i)\right)^\theta \left(j^{-1}\left|\hat{f}(j)\right|\right)^\theta \geq$$

$$\geq C_6 \sum_{j=1}^{\infty} A(j)\left|\hat{f}(j)\right|^\theta .$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1.*Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.

2.*Потапов М.К.* О взаимосвязи некоторых классов функций // Мат. заметки. 1967. Т.2. №4.

3.*Askey R., Wainger S.* Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. 1966. V.33. №2.

4.*Krasniqi Xh.Z.* On a generalization of Lipschitz classes // J. Inequal. Pure Appl. Math. 2008. V.9. №3.

5.*Волосивец С.С., Фадеев Р.Н.* Оценки наилучших приближений в интегральных метриках и коэффициенты Фурье по мультипликативным системам // Analysis math. (принято к печати)

6.*Leindler L.* Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged) 1970. V.31. №1-2.

7.*Харди Г. Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. литер., 1948.

8.*Leindler L.* Inequalities of Hardy-Littlewood type // Analysis Math. 1976. V.2. №2.

9.*Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

10.*Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis // Lecture Notes in Math. 1994. V.1568. Berlin: Springer-Verlag.

11. *Young W.-S.* Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V.218.
12. *Schipp F.* On L^p-convergence of series with respect to product systems // Analysis Math. 1976. V.2. №1.
13. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. V.27. №4.
14. *Лебедь Г.К.* О тригонометрических рядах с коэффициентами, удовлетворяющими некоторым условиям // Мат. сб. 1967. Т.74. №1.
15. *Волосивец С.С.* О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Analysis Math. 2007. V.33. №3.

УДК 511.216; 514.753.32; 511.512

В.Е. ФИРСТОВ

Класс и рациональные точки алгебраических многообразий, порожденных линейными рекуррентными уравнениями

В работах [1,2] установлена связь между линейными рекуррентными уравнениями 2-го порядка с коническими сечениями и их рациональными точками. Проведенное исследование показало, что данный результат обобщается на алгебраические многообразия произвольного порядка.

1. Принцип построения алгебраических многообразий на основе линейных рекуррентных уравнений

Общая схема построения алгебраических многообразий на основе линейных рекуррентных уравнений реализуется следующим образом. Рассмотрим рекуррентное уравнение k–го порядка общего вида

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n, \quad n, k \in N \tag{1}$$

с характеристическим уравнением

$$z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \ldots - a_k = 0, \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_k \in R, a_k = 0$. Дискриминант D характеристического уравнения (2) определяется квадратом определителя Вандермонда

$$D = \prod_{k \geq m > j \geq 1} (z_m - z_j)^2, \tag{3}$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — корни уравнения (2).

Пусть $\{\alpha_{n1}\}, \{\alpha_{n2}\}, \ldots, \{\alpha_{nk}\}$ — семейство последовательностей, порожденных уравнением (1). В линейном (вообще говоря, унитарном) пространстве выберем произвольный нормированный базис $(\overline{e}_1)$; $(\overline{e}_2)$; $\ldots; (\overline{e}_k)$, с помощью которого определим систему координат $Ox_1x_2\ldots x_k$ и в этой системе определим вектор-функцию

$$\overline{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ij} \overline{e_j}). \tag{4}$$

Поведение функции (4) зависит от дискриминанта (3) и расположения последовательностей $\{\alpha_{n1}\}, \{\alpha_{n2}\}, \ldots, \{\alpha_{nk}\}$, определяемое векторами $\overline{\alpha_1}(\alpha_{11}; \alpha_{21}; \ldots; \alpha_{k1})$; $\overline{\alpha_2}(\alpha_{12}; \alpha_{22}; \ldots; \alpha_{k2})$; $\ldots$; $\overline{\alpha_k}(\alpha_{1k}; \alpha_{2k}; \ldots; \alpha_{kk})$. Поэтому исследование функции $\overline{r_n}$ сводится к анализу ситуаций, возникающих по указанным факторам.

2. Случай ненулевого дискриминанта характеристического уравнения

В этом случае $D \neq 0$ и уравнение (2) не имеет кратных корней, Тогда члены последовательностей $\{\alpha_{n1}\}, \{\alpha_{n2}\}, \ldots, \{\alpha_{nk}\}$ можно определить выражением [3]:

$$\overline{\alpha_n} = A\overline{z_n}, \tag{5}$$

где $\overline{\alpha_n}\,(\alpha_{n1};\alpha_{n2};\ldots;\alpha_{nk})$; $\overline{z_n}\left(z_1^{n-1},z_2^{n-1},\ldots,z_k^{n-1}\right)$; A — некоторый линейный оператор, действующий в данном пространстве. Матричные элементы A_{lj}, $1 \le l;j \le k$ оператора A определяются значениями $\alpha_{n1};\alpha_{n2};\ldots;\alpha_{nk}$ при $n=\overline{1,k}$.

Рассмотрим случай:

$$|A| = \delta \neq 0; a_1 + a_2 + ... + a_k = 1. \tag{6}$$

Тогда система векторов $\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_k}$ линейно независима и тем же свойством обладает выделенное семейство последовательностей $\{\alpha_{n1}\},\{\alpha_{n2}\},\ldots,\{\alpha_{nk}\}$, причем, 1 не является корнем уравнения (2). Используя (4), (5), для вектор–функции $\overline{r_n}$ с координатами $(x_{n1};x_{n2};...;x_{nk})$ можно записать:

$$\overline{r_n} = A\overline{Z_n}, \tag{7}$$

или в координатах:

$$x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \frac{A_{lj}(z_l^n - 1)}{z_l - 1},\ j = \overline{1,k}, \tag{8}$$

где $\overline{Z}\left(\frac{z_1^n-1}{z_1-1};\frac{z_2^n-1}{z_2-1};\ldots\frac{z_k^n-1}{z_k-1};\right)$. После обращения (7), (8) и последующего линейного преобразования имеем:

$$z_l^n = \frac{z_l - 1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k}(\overline{x_{nj}}\Delta_{lj}),\ l = \overline{1,k}, \tag{9}$$

где Δ_{lj} — алгебраические дополнения для матричных элементов A_{lj}; $\overline{x_{nj}} = x_{nj} + t_j$; t_j определяются из системы:

$$(z_l - 1)\sum_{j=1}^{k}(t_j\Delta_{lj}) = \Delta. \tag{10}$$

Перемножая, по отдельности, левые и правые части системы (9), получаем параметрическое семейство многообразий k-го порядка вида:

$$\prod_{l=1}^{k}\left[(z_l-1)\sum_{j=1}^{k}(\overline{x_{nj}}\Delta_{lj})\right]=\Delta^k\left[(-1)^{k+1}a_k\right]^n, \tag{11}$$

то есть в данном случае образ функции $\overline{r_n}$ — это некоторое счетное множество точек, каждая из которых (в зависимости от $n\in N$) располагается на соответствующем многообразии семейства (11). Применяя к координатам (11) преобразование:

$$X_j=\left[(-1)^{k+1}a_k\right]^{-\frac{n}{k}}\frac{\overline{x_{nj}}}{\Delta}, \tag{12}$$

образы $\overline{r_n}$ "укладываются"на многообразии k–го порядка вида:

$$\prod_{l=1}^{k}\left[(z_l-1)\sum_{j=1}^{k}(X_j\Delta_{lj})\right]=1. \tag{13}$$

Таким образом, в рассмотренном случае образ вектор–функции представляет счетное множество точек алгебраического многообразия k–го порядка вида (13).

Пример 1. Рассмотрим рекуррентное уравнение 3-го порядка вида

$$u_{n+3}=10u_{n+2}-31u_{n+1}+30u_n \tag{14}$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (14): z_1 =2, z_2 = 3, z_3 = 5, так, что вектор $\overline{z_n}$ в (5) имеет координаты $(2^{n-1};3^{n-1};5^{n-1})$. Оператор A, для определенности, зададим матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} \tag{15}$$

с определителем $\Delta = 1$. Вектор $\overline{Z_n}$ в (7) для этого примера имеет координаты $\left(2^n - 1; \frac{1}{2}(3^n - 1); \frac{1}{4}(5^n - 1)\right)$. Далее, действуя в соответствии с методикой (7) – (13), получаем:

$$\begin{cases} 3\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}} - \overline{x_{n3}} = 2^n \\ -2\overline{x_{n1}} + \overline{x_{n2}} = 3^n \\ -4\overline{x_{n1}} + 4\overline{x_{n3}} = 5^n, \end{cases} \tag{16}$$

где $\overline{x_{nj}} = x_{nj} + t_j$, $j = 1; 2; 3$ и $t_1 = \frac{7}{4}$, $t_2 = \frac{9}{4}$, $t_3 = 2$. Из системы (16) следует параметрическое семейство уравнений 3-го порядка

$$8\left(3\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}} - \overline{x_{n3}}\right)\left(\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}}\right)\left(\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n3}}\right) = 30^n \tag{17}$$

Преобразование $X_j = 30^{-\frac{n}{3}}\overline{x_{nj}}$ приводит семейство (17) к поверхности 3-го порядка вида

$$8(3X_1 - X_2 - X_3)(X_1 - X_2)(X_1 - X_3) = 1, \tag{18}$$

полученной на основе рекуррентные последовательности $\{\alpha_{n1}\}$; $\{\alpha_{n2}\}$; $\{\alpha_{n3}\}$. Члены этих последовательностей определяются координатами вектора $\overline{\alpha_n}\,(\alpha_{n1}; \alpha_{n2}; \alpha_{n3})$ в соответствии с (5) при данных A и $\overline{z_n}$.

Таким образом, в рассмотренном примере образ вектор-функции $\overline{r_n}$ представляет счётное множество точек $(X_1; X_2; X_3)$ на поверхности (18). Важно отметить, что при значениях $nM3$ получаются рациональные значения координат, т. е. решения уравнения (18) в духе Диофанта. Например, при $n = 3; 6$ рациональными решениями (18), соответственно, являются тройки: $\left(\frac{211}{120}; \frac{53}{24}; \frac{14}{5}\right)$; $\left(\frac{17339}{3600}; \frac{18797}{3600}; \frac{8241}{900}\right)$.

Пример 2. Рассмотрим рекуррентное уравнение 3-го порядка вида:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2u_n \tag{19}$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (19): $z_1 = 2$, $z_{2,3} = \pm i$, и вектор $\overline{z_n}$ в данном примере имеет координаты $(2^{n-1}; i^n; -i^n)$, а последовательности $\{\alpha_{n1}\}$; $\{\alpha_{n2}\}$; $\{\alpha_{n3}\}$. Из уравнения (19) выделим с помощью оператора A с матрицей (15) согласно (5). Тогда, действуя как и в предыдущем примере, получим систему:

$$\begin{cases} 3\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}} - \overline{x_{n3}} = 2^n \\ -(i-1)\overline{x_{n1}} + (i-1)\overline{x_{n2}} = i^n \\ (i+1)\overline{x_{n1}} - (i+1)\overline{x_{n3}} = (-i)^n, \end{cases} \tag{20}$$

где $\overline{x_{n1}} = x_{n1}$; $\overline{x_{n2}} = x_{n2} - \frac{1}{2}(1+i)$; $\overline{x_{n3}} = x_{n3} - \frac{1}{2}(1-i)$.

Из системы (20) после умножения следует:

$$2\left(3\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}} - \overline{x_{n3}}\right)\left(\overline{x_{n1}}^2 - \overline{x_{n1}x_{n2}} - \overline{x_{n1}x_{n3}} + \overline{x_{n2}x_{n3}}\right) = 2^n. \tag{21}$$

Преобразование $X_j = 2^{-\frac{n}{3}}\overline{x_{nj}}$, $j = 1; 2; 3$ семейство (21) переводит в поверхность 3–го порядка вида:

$$2(3X_1 - X_2 - X_3)(X_1^2 - X_1X_2 - X_1X_3 + X_2X_3) = 1. \tag{22}$$

Как видим, в данном примере образ $\overline{r_n}$ представляет счётное множество точек $(X_1; X_2; X_3)$ на поверхности 3–го порядка (22). Легко убедиться, что координаты этих точек мнимые, причем, X_1 — вещественная координата, а $X_2; X_3$ — комплексно сопряженные. Например, при $n = 3$ решением уравнения (22) является тройка $\left(\frac{7}{2}; \frac{13+i}{4}; \frac{13-i}{4}\right)$.

Замечание. В случае нарушений условий (6) наблюдаются вырожденные случаи, которые подробно исследованы в [4], и сопровождаются понижением размерности многообразия.

3. Случай кратных корней характеристического уравнения

Рассмотрим рекуррентное уравнение (1) и пусть соответствующее характеристическое уравнение (2) имеет дискриминант $D = 0$, то есть оно имеет кратные корни $z_1; \ldots; z_q$ с кратностями $m_1; m_2; \ldots; m_q$, так, что $m_1 + \cdots + m_q = k$, $q < k$. Действуя аналогично п.2, вводится вектор–функция вида (4) и для определения ее координат $x_{n1}; x_{n2}; \ldots; x_{nk}$ члены последовательностей $\{\alpha_{n1}\},\{\alpha_{n2}\},\ldots,\{\alpha_{nk}\}$ также определяются выражением (5), где теперь, согласно [3], вектор $\overline{z_n}$ имеет координаты

$$(z_1^{n-1};(n-1)z_1^{n-1};\ldots;(n-1)^{m_1-1}z_1^{n-1};\ldots$$

$$;z_q^{n-1};(n-1)z_q^{n-1};\ldots;(n-1)^{m_q-1}z_q^{n-1}), \tag{23}$$

а вектор $\overline{\alpha_n}(\alpha_{n1};\alpha_{n2};\ldots;\alpha_{nk})$ и линейный оператор A имеют тот же смысл, что и в п.2. Матричные элементы A_{lj}, $1\le l;j\le k$ оператора A определяются значениями $\alpha_{n1};\alpha_{n2};\ldots;\alpha_{nk}$ при $n=\overline{1,k}$. Кроме того, будем рассматривать невырожденный случай, определенный условиями (6), поскольку вырожденный случай здесь не дает ничего нового [4] и, по сути, наблюдается та же картина, что и в замечании п.2.

Для определения координат функции поступим следующим образом. Так как, согласно (4), $x_{nj}=\sum_{i=1}^n a_{ij}$, $j=\overline{1,k}$, то последовательности $\{x_n1\};\{x_n2\};\ldots;\{x_nk\}$ удовлетворяют следующему рекуррентному уравнению $(k+1)$—го порядка [3]:

$$v_{n+k+1}=(1+a_1)v_{n+k}+(a_2-a_1)v_{n+k-1}+\ldots+(a_k-a_{k-1})v_{n+1}-a_kv_n \tag{24}$$

с характеристическим уравнением

$$z^{k+1}-(1+a_1)z^k-(a_2-a_1)z^{k-1}-\ldots-(a_k-a_{k-1})z+a_k=0. \tag{25}$$

Уравнение (25) имеет корни $z_1;\ldots;z_q$ с кратностями $m_1;m_2;\ldots;m_q$ и корень $z_{q+1}=1$. Поэтому выражение для $\overline{r_n}$ имеет вид:

$$\overline{r_n}=T\overline{z_n}+\overline{\tau} \tag{26}$$

или в координатах

$$x_{nj}=\sum_{l=l_p}^{m_p}\sum_{p=1}^{q}\left[T_{lj}(n-1)^{l-l_p}\right]z_p^{n-1}+T_{k+1,j},\ j=\overline{1,k}, \tag{27}$$

где $m_p = \sum_{i=1}^{p} m_i$, $l_p = 1$ при $p = 1$; при $p > 1$, $l_p = 1 + m_{p-1}$; значения T_{lj} и $Tk + 1; j$ определяются по значениям x_{nj} при $n = \overline{1, k+1}$ с помощью (5), (23); T —- линейный оператор с матричными элементами T_{lj}, $rang =$ $= rangA = k$; $\overline{\tau}\left(T_{k+1;1}, \ldots, T_{k+1;k}\right)$. После обращения (26) имеем

$$\overline{z_n} = T^{-1}\left(\overline{r_n - t}\right), \tag{28}$$

откуда, после перемножения координат $\overline{z_n}$, получается

$$\prod_{l=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\delta_{lj}\overline{x_{nj}}\right)\right] = \delta^k (n-1)^{\omega}\left[(-1)^{k+1}a_k\right]^{n-1}, \tag{29}$$

где d – определитель матрицы оператора T; d_{lj} — алгебраическое дополнение для матричного элемента T_{lj}; $\overline{x_{nj}} = x_{nj} - T_{k+1;j}$; $\omega = \sum\limits_{p=1}^{q} \frac{m_p(m_p-1)}{2} \in$ N. Из уравнения (29) видно, что в рассмотренном случае образ функции $\overline{r_n}$ —- это некоторое счётное множество точек, каждая из которых, в зависимости от $n\hat{I}N$, располагается на соответствующей поверхности семейства (29).

Применяя к координатам (29) преобразование

$$X_j = (n-1)^{-\frac{\omega}{k}}\left[(-1)^{k+1}a_k\right]^{-\frac{n-1}{k}}\frac{\overline{x_{nj}}}{\delta}, \quad n > 1, \tag{30}$$

образы $\overline{r_n}$ укладываются на некоторой k—мерной поверхности k—го порядка вида:

$$\prod_{l=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{k}\left(\delta_{lj}X_j\right)\right] = 1. \tag{31}$$

Пример 3. Рассмотрим рекуррентное уравнение 3–го порядка вида:

$$u_{n+3} = 7u_{n+2}\breve{}16u_{n+1} + 12u_n \tag{32}$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (32) $z_1 = 2$, $m_1 = 2$; $z_2 = 3$, $m_2 = 1$. Вектор $\overline{z_n}$ в данном примере имеет координаты $\left(2^{n-1}; (n-1)2^{n-1}; 3^{n-1}\right)$, а последовательности $\{a_{n1}\}; \{a_{n2}\}; \{a_{n3}\}$ из уравнения (32) выделим с помощью оператора A с матрицей (15). Для определения координат $(x_{n1}; x_{n2}; x_{n3})$ функции имеем следующее рекуррентное уравнение 4–го порядка

$$v_{n+4} = 8u_{n+3}\breve{}23v_{n+2} + 28u_{n+1}\breve{}12v_n, \tag{33}$$

откуда

$$x_{nj} = [T_{1j} + T_{2j}(n-1)]\, 2^{n-1} + T_{3j}3^{n-1} + T_{4j},\ j = 1; 2; 3, \tag{34}$$

где значения T_{lj}, $l = \overline{1,4}$ определяются по значениям a_{nj} при с помощью (5), (23).

Далее, используя методику (27)—(31), получаем следующее семейство уравнений 3–го порядка

$$\frac{1}{3}\left(3\overline{x_{n1}} - \overline{x_{n2}} - \overline{x_{n3}}\right)\left(\overline{x_{n1}} - \frac{1}{2}\overline{x_{n3}}\right)\left(\overline{x_{n3}} - \overline{x_{n1}}\right) = (n-1)12^{n-1}, \tag{35}$$

где $\overline{x_{n1}} = x_{n1} - \frac{1}{2}$, $\overline{x_{n2}} = x_{n2} - \frac{5}{2}$, $\overline{x_{n3}} = x_{n3}$. С помощью преобразования

$$X_j = (n-1)^{-\frac{1}{3}}\, 12^{-\frac{n-1}{3}}\overline{x_{nj}};\ n > 1$$

семейство (35) переходит в поверхность 3–го порядка вида:

$$\frac{1}{3}\left(3X_1 - X_2 - X_3\right)\left(X_1 - \frac{1}{2}X_3\right)\left(X_3 - X_1\right) = 1 \tag{36}$$

Как видим, в данном примере образ $\overline{r_n}$ представляет счётное множество точек $(X_1; X_2; X_3)$ на поверхность 3–го порядка (36), причем, при значениях $(n-1)M(3l)3, l\hat{I}N$ получаются рациональные решения (36).

Таким образом, показано, что всякое линейное рекуррентное уравнение вида (1) порождает класс вполне определенных алгебраических многообразий и, кроме того, определяет топологию рациональных точек на этих многообразиях.

Библиографический список

1. *Фирстов В.Е.* Рекуррентные последовательности при обобщенных пифагоровых построениях и их общая связь с коническими сечениями //

Депонир. в ВИНИТИ 10.05.00., №1351-В00.

2. *Фирстов В.Е.* Рекуррентные последовательности, фрактальные иерархические структуры и конические сечения при конструктивных обобщениях теоремы Пифагора. Саратов: Изд-во Научная книга, 2005.

3. *Гелфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

4. *Фирстов В.Е.* Рекуррентные последовательности и их пространственные алгебраические образы // Депонир. в ВИНИТИ 10.05.00., №1352-В00.

УДК 517.51

С.С. ВОЛОСИВЕЦ, Т.В. ИОФИНА

Сильная аппроксимация функций по мультипликативным системам в равномерной и гельдеровых метриках

Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_i \le N$, $i \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 p_2 ... p_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \le x_n < p_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Для $x = k/m_i$, $0 < k < m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$ берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для x, y такого вида $x \ominus y = z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, где $0 \le z_n < p_n$, $z_n \in \mathbb{Z}$, $z_n = x_n - y_n (\mod p_n)$. Сумма $x \oplus y$ определяется аналогично. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ представимо в виде

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} k_n m_{n-1}, \quad k_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k_n < p_n, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

По определению, функции $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют систему Виленкина $\chi_{\{p_n\}}$. Эта система ортонормирована и полна в $L[0,1)$, причем

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y); \quad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$$

для почти всех y при фиксированном $x \in [0,1)$ (см. [6]).

Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L[0,1)$ по системе Виленкина задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Для $f, g \in L[0,1)$ свертка $f * g$ задается формулой $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)g(x \ominus t)\,dt$. Далее важную роль имеет представление $S_n(f)(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t)D_n(t)\,dt$, где $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$ измеримых интегрируемых в p-й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$, и $C^*[0,1)$, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f(x)|$ и состоящее из ограниченных функций, для которых справедливо $\lim\limits_{h \to 0} \|f(x) - f(x \ominus h)\|_\infty = 0$.

Во всех указанных пространствах можно ввести модуль непрерывности: $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}$. Тогда $E_n(f)_p = \inf\{\|f - t_n\|_p, t_n \in \mathcal{P}_n\}$. Пусть $\omega(\delta)$ — функция типа модуля непрерывности ($\omega(\delta) \in \Omega$), т.е. $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на [0,1), причем $\omega(0) = 0$. Тогда пространство $H_p^\omega[0,1)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$, таких что $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$, где C зависит только от f. Через h_p^ω обозначим H_p^ω, такое что для $f \in h_p^\omega$ $\lim_{h \to 0} \omega^*(f,h)_p/\omega(h) = 0$. Пространства $h_p^\omega[0,1)$ и $H_p^\omega[0,1)$ с нормой $\|f\|p,\omega = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$ являются банаховыми. В $h_p^\omega[0,1)$ можно ввести $E_n(f)_{p,\omega} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,\omega}, t_n \in \mathcal{P}_n\}$.

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ — нижнетреугольная матрица, такая что

$$a_{n,k} \geq 0, \quad n,k \in \mathbb{N}; \quad \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} = 1. \tag{3}$$

Матрица A определяет метод суммирования формулой $T_n(f)(x) = = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} S_k(f)(x)$. В случае тригонометрической системы и монотонной по k последовательности $\{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ оценки $\|f - T_n(f)\|_\infty$ были получены Чандрой [3] в терминах модуля непрерывности. Позже Лейндлер [8] обобщил эти результаты на случай, когда справедливы оценки

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq C a_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq n-1, n \in \mathbb{N}; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq C a_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq n, n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь C не зависит от m, n. Для системы $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ оценки $\|f - T_n(f)\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, получены в работе [7]. Там же изучено уклонение $\|f - T_n(f)\|_{p,v}$, где $v(t) = t^\beta$, для $f \in H_p^\omega$, где $\omega(t) = t^\alpha$, $\beta < \alpha$. Рассмотрим теперь

$$R_n(f,r)(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} |S_k(f)(x) - f(x)|^r \right)^{1/r}.$$

Оценки величин $\|R_n(f,r)\|_\infty$ в случае монотонной по k последовательности $\{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ с дополнительными ограничениями на их колебания были получены Саном и Кси [17]. Для матриц, удовлетворяющих условиям (4) и (5) подобные результаты установил Сзал [14]. Он же получил ряд оценок $\|R_n(f,r)\|_\infty$, близких к доказанным Чандрой [3] и Лейндлером [8] (см. [15]).

В настоящей работе изучается порядок величин $\|R_n(f,r)\|_p$, $1 < p \leq \infty$, а матрица A удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\sum_{k=m}^{2m-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq K a_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq (n-1)/2; \tag{6}$$

$$\sum_{k=[m/2]}^{m-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \le K a_{n,m}, \quad 2 \le m \le n. \tag{7}$$

В обоих случаях будем считать, что K не зависит от n, m.

Ранее класс GM последовательностей с нормой $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{k=m}^{2m-1} |a_k - a_{k+1}| \le C a_m$, изучались Тихоновым [16]. В частности, им было показано, что квазимонотонные последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ (такие, что $a_n n^{-\tau} \downarrow 0$ для некоторых $\tau \ge 0$ и $n \in \mathbb{N}$) содержаться в GM.

Далее будем считать, что $\omega(t) \in \Omega$ удовлетворяет Δ_2-условию, т.е. $\omega(t) \le C\omega(t/2)$, $t \in [0,1)$. Кроме того для $\omega(t), \mu(t) \in \Omega$ существует $\alpha \in (0,1)$, такое что $\omega^{\alpha}(t)/\mu(t)$ ограничена на [0,1).

Поскольку важную роль в доказательствах играют сильные средние Валле-Пуссена, проведено также их специальное исследование (см. теоремы 4 и 5)

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Для $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$ верно неравенство $\|S_n(f,x)\|_p \le C\|f\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, где C не зависит от f и n. Как следствие, $\|S_n(f,x) - f(x)\|_p \le (C+1)E_n(f,x)_p$, где $n \in \mathbb{N}$.*

Для произвольных (в том числе и неограниченных) последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ лемма установлена Шиппом [12] и Шимоном [13].

Пусть $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots)$, где g_j — измеримые на [0,1) функции. Положим по определеию

$$\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^r)} = \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^r \right)^{1/r} \right\|_p; \quad \|\mathbf{g}\|_{l^r(L^p)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|_p^r \right)^{1/r}$$

Лемма 2. *Если $1 \le r \le p < \infty$, то $\|\mathbf{g}\|_{L^p(l^p)} \le \|\mathbf{g}\|_{l^r(L^p)}$.*

Доказательство леммы 2 аналогично рассуждениям, проведенными

Фридли [4] в случае $r = 2$.

Лемма 3. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$. *Тогда для* $q \in (1, \infty)$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k D_k \right\|_1 \leq C(q) n^{1-1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q \right)^{1/q}.$$

Для $q = \infty$ имеем $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k D_k \right\|_1 \leq Cn \sup\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

В неявном виде для ограниченных последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ неравенство (8) доказано в [2], в явном виде оно выписано Авдиспахичем и Пепичем в [1] (в более общем виде, включающем случай неограниченной последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Лемма 4 (Неравенство А.В. Ефимова, см. [6]). *Пусть* $f \in L^p[0, 1)$, $1 \leq p < \infty$ *или* $f \in C^*[0, 1)$. *Тогда*

$$2^{-1} \omega^*(f, 1/m_n)_p \leq E_{m_n}(f)_p \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_p \leq \omega^*(f, 1/m_n)_p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\omega(t) \in \Lambda$ *удовлетворяет* $\Delta - 2$ *условию. Тогда из* $f \in H_p^{\omega}$ *следует, что* $E_n(f)_p \leq C_1 \omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Пусть $\|f\|_{p,\omega} = C_2$ и $n \in [m_k, m_{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда по лемме 4

$$E_n(f)_p \leq E_{m_k}(f)_p \leq \omega^*(f, 1/m_k)_p \leq \omega(1/m_k) \leq$$

$$\leq C_2 C^{[log_2 N]+1} \omega(1/m_{k+1}) \leq C_3 \omega(1/n).$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *1) Пусть матрица* A *удовлетворяет условиям (3) и (6). Тогда* $a_{n,i} \leq (K + 1) a_{n,m}$ *при* $m \leq i \leq 2m \leq n$, *где* K *взято из (6).*

2) Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (7). Тогда $a_{n,i} \leq$ $\leq (K+1)a_{n,m}$ при $[m/2] \leq i \leq m$, где K взято из (7).

Доказательство

Часть 1) взята в [16]. Докажем 2). Рассуждая аналогично [16], находим при $[m/2] \leq i < m$, что

$$Ka_{n,m} \geq \sum_{k=[m/2]}^{m-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \geq \left| \sum_{k=[m/2]}^{m-1} (a_{n,k} - a_{n,k+1}) \right| \geq a_{n,i} - a_{n,m},$$

откуда $(K+1)a_{n,m} \geq a_{n,i}$. При $i = m$ утверждение очевидно. Лемма доказана.

Важную роль играют 2 следующие леммы. Тригонометрический аналог леммы 7 принадлежит Лейндлеру [9].

Лемма 7. *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $1 \leq r < \infty$. Тогда*

$$\|\sigma_n(f,r)\|_\infty := \left\| \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f)(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty \leq M\|f\|_\infty,$$

где M не зависит от $n \in \mathbb{N}$ и f.

Доказательство

Пусть $i \in \mathbb{N}$ таково, что $n \in [m_{i-1}, m_i)$. Тогда

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f)(x)|^r \leq N m_i^{-1} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f)(x)|^r = N\|h\|_r,$$

где $h(t)$ равна $S_k(f)(x)$ на $I_k^i = [k/m_i, (k+1)/m_i]$, $1 \leq k \leq n$ и $h(t) = 0$ на остальных I_k^i. Ясно, что $\|h\|_r = \sup \int\limits_0^1 h(t)g(t)\,dt$, где sup берется по постоянным на I_k^i функциям $g(t)$ со свойством $\|g\|_{r'}$, $1/r + 1/r' = 1$. Другими словами, если $g(t) = a_k$ на I_k^i, $1 \leq k \leq n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{r'} \right)^{1/r'} \leq m_i^{1/r'} \quad (\sup_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq 1, \text{ при } r = 1) \tag{10}$$

Имеем

$$\int_0^1 h(t)g(t)\,dt = m_i^{-1}\sum_{k=1}^n a_k S_k(f)(x) = m_i^{-1}\int_0^1 \sum_{k=1}^n a_k D_k(t) f(x\ominus t)\,dt \le$$

$$\le m_i^{-1}\|f\|_\infty \left\|\sum_{k=1}^n a_k D_k\right\|_1 .$$

Используя (8) и (10), находим что

$$\|\sigma_n(f,r)\|_\infty \le N^{1/r} m_i^{-1}\|f\|_\infty C_2 m_i^{1/r}\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^{r'}\right)^{1/r'} = C_3\|f\|_\infty .$$

Лемма доказана.

Неравенство (12) леммы 8 при $m=[n/2]$ сформулировано для некоторых общих систем Фридли и Шипппом [5] без доказательства. Им же принадлежит идея применения (8) к проблемам сильной сходимости.

Лемма 8. *Пусть $f\in C^*[0,1)$, $1\le r<\infty$, $\nu n\le m<n$, где $\nu\in(0,1)$. Тогда*

$$\|U_{n,m}(f,r)\|_\infty := \left\|\left((m+1)^{-1}\sum_{k=n-m}^n |S_k(f)(\cdot)|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty \le M(\nu)\|f\|_\infty, \tag{11}$$

$$\|V_{n,m}(f,r)\|_\infty := \left\|\left((m+1)^{-1}\sum_{k=n-m}^n |S_k(f)(\cdot)-f(\cdot)|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty \le$$

$$\le (M(\nu)+1)E_{n-m}(f)_\infty, \tag{12}$$

где $M(\lambda)$ не зависит от $n,m\in\mathbb{N}$ и f.

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу (9)

$$(m+1)^{1/r}\|U_{n,m}(f,r)\|_\infty = \left\|\left(\sum_{k=n-m}^n |S_k(f)(\cdot)|^r\right)^{1/r}\right\|_\infty \le$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |S_k(f)(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty + \left\| \left(\sum_{k=1}^{n-m-1} |S_k(f)(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty \leq$$

$$\leq C_1(n^{1/r} + (n-m-1)^{1/r})\|f\|_\infty,$$

откуда в силу неравенства $\nu n \leq m$ вытекает (11).

Неравенство (12) получается из (11) подстановкой $f - t_{n-m}$ вместо f, где $t_{n-m} \in \mathcal{P}_{n-m}$ и $\|f - t_{n-m}\|_\infty = E_{n-m}(f)_\infty$. При этом используется равенство $S_k(t_{n-m}) = t_{n-m}$ при $k \geq n$ и неравенство Минковского в l^r следующим образом

$$\|V_{n,m}(f,r)\|_\infty \leq \left\| (m+1)^{-1} \left(\sum_{k=n-m}^{n} |S_k(f - t_{n-m})(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty +$$

$$+ \left\| (m+1)^{-1} \left(\sum_{k=n-m}^{n} |(f - t_{n-m})(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_\infty =$$

$$= \|U_{n,m}(f - t_{n-m}, r)\|_\infty + E_{n-m}(f)_\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Аналоги (11) и (12) для нормы $\|\cdot\|_p$ легко следуют из леммы 1 и леммы 2.

Следующая лемма является аналогом теоремы Лейндлера-Мейера-Тотика [10].

Лемма 9. *Пусть $\omega, \mu \in \Lambda$, так что $\lambda(t) = \omega(t)/\mu(t)$ возрастает на (0,1). Тогда для $A_n(f) = K_n * f$, $K_n \in L^1[0,1)$ и $f \in H_p^\omega$ справедливо неравенство*

$$\|A_n(f) - f\|_{p,\mu} \leq C(\mu^{-1}(n^{-1})\|A_n(f) - f\|_p + \lambda(n^{-1})(1 + \|A_n\|_{L^p \to L^p})).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 в [7].

Лемма 10. *Пусть $\omega, \mu \in \Lambda$, так что $\lambda(t) = \omega(t)/\mu(t)$ возрастает на (0,1), ω удовлетворяет $\Delta - 2$-условию и $f \in H_p^\omega$. Тогда $E_n(f)_{p,\mu} \leq$ $\leq C\lambda(1/n)$.*

Доказательство

Пусть $K_n = \sum_{k=n}^{2n-1} D_k/n$ и $A_n(f) = K_n * f$. Тогда для любого $t_n \in \mathcal{P}_n$ имеем $K_n * t_n = t_n$, откуда стандартным способом выводится $\|A_n(f) - f\|_p \leq C_1 E_n(f)_p \leq C_2\omega(1/n)$. Кроме того, $\|A_n(f)\|_{L^p \to L^p} \leq \|K_n\|_1 \leq C_3$ (см., например, [7]).

По леммам 9 и 5 получаем

$$\|A_n(f) - f\|_{p,\mu} \leq C_4(\omega(n^{-1})/\mu(n^{-1}) + \lambda(n^{-1})) = 2C_4\lambda(n^{-1}).$$

Значит $E_{2n}(f)_{p,\mu} \leq 2C_4\lambda(n^{-1})$, поэтому, используя монотонность наилучших приближений и $\Delta - 2$-условие, получаем неравенство леммы.

Замечание 2. Удобное для приложений условие возрастания $\omega(t)/\mu(t)$ появилось в работе Престина и Прёсдорфа [11].

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (7), $f \in C^*[0,1)$, $r \geq 1$. Тогда*

$$\|R_n(f,r)\|_\infty = O\left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^k E_{2^k}^r(f)_\infty a_{n,2^{k+1}} + n a_{nn} E_{\frac{n+1}{2}}^r(f)_\infty\right)^{1/r}.$$

Доказательство

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\nu = \nu(n)$ таково, что $2^\nu \leq n < 2^{\nu+1}$, т.е. $\nu = [\log_2 n]$. Тогда при $j < \nu$

$$|R_n(f,r)(x)|^r = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}|S_k(f)(x) - f(x)|^r = \sum_{k=1}^{j} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{n,i}|S_i(f)(x) - f(x)|^r +$$

$$+\sum_{k=2^j}^{n} a_{n,k}|S_k(f)(x)-f(x)|^r =: \Sigma_1+\Sigma_2.$$

Применяя преобразование Абеля, (7) и лемму 6, получаем

$$|\Sigma_1| \leq \sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-2}|a_{n,i}-a_{n,i+1}|\sum_{l=2^{k-1}}^{i}|S_l(f)(x)-f(x)|^r+\right.$$

$$\left.+a_{n,2^k-1}\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}|S_i(f)(x)-f(x)|^r\right) \leq C_1\sum_{k=1}^{j}a_{n,2^k}\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}|S_i(f)(x)-f(x)|^r.$$

Согласно (12) имеем

$$|\Sigma_1| \leq C_2\sum_{k=1}^{j}a_{n,2^k}2^{k-1}E^r_{2^{k-1}}(f)_\infty \leq C_2\sum_{k=0}^{j-1}a_{n,2^{k+1}}2^kE^r_{2^k}(f)_\infty.$$

Ясно, что из (7) и леммы 6 следует, что $\sum\limits_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{n}|a_{n,i}-a_{n,i+1}| \leq C_3a_{n,n}$, а в силу (12)

$$\sum_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{n}|S_i(f)(x)-f(x)|^r \leq C_4nE^r_{[\frac{n+1}{2}]}(f)_\infty.$$

Снова применяя преобразование Абеля, получаем

$$|\Sigma_2| \leq \sum_{k=[\frac{n+1}{2}]}^{n-1}|a_{n,k}-a_{n,k+1}|\sum_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{k}|S_i(f)(x)-f(x)|^r+$$

$$+a_{n,n}\sum_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{n}|S_i(f)(x)-f(x)|^r \leq C_5na_{n,n}E^r_{[\frac{n+1}{2}]}(f)_\infty.$$

Из (14) и (15) вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (7), $f \in L^p[0,1)$, $1<p<\infty$, $p \geq r \geq 1$. Тогда*

$$\|R_n(f,r)\|_p = O\left(\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}E^r_k(f)_p\right)^{1/r}. \qquad (16)$$

Доказательство

С помощью леммы 2 имеем

$$\|R_n(f,r)\|_p = \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} |S_i(f)(\cdot) - f(\cdot)|^r \right)^{1/r} \right\|_p \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \|S_i(f)(\cdot) - f(\cdot)\|_p^r \right)^{1/r}.$$

Поэтому по лемме 1 $\|R_n(f,r)\|_p^r \le C\sum_{k=1}^n a_{n,k}E_k^r(f)_p$, откуда следует неравенство теоремы.

Теорема 3. *Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (6), $f \in C^*[0,1)$, $r \ge 1$. Тогда*

$$\|R_n(f,r)\|_\infty = O\left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} E_k^r(f)_\infty \right)^{1/r}.$$

Доказательство

Пусть снова $j = j(n)$ таково, что $2^j \le n < 2^{j+1}$, т.е. $j = [\log_2 n]$. Используя преобразование Абеля, получаем

$$(R_n(f,r)(x))^r \le \sum_{k=1}^{j} \left(\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-2} |a_{n,i} - a_{n,i+11}| \sum_{l=2^{k-1}}^{i} |S_l(f)(x) - f(x)|^r + \right.$$

$$\left. + a_{n,2^k-1} \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} |S_i(f)(x) - f(x)|^r \right) + \sum_{k=2^j}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \sum_{l=2^j}^{k} |S_l(f)(x) - f(x)|^r +$$

$$+ a_{n,n} \sum_{k=2^j}^{n} |S_k(f)(x) - f(x)|^r.$$

В силу (6), леммы 6 и (12) имеем

$$(R_n(f,r)(x))^r \le C_1 \left(\sum_{k=1}^{j} \left(2^{k-1} a_{n,2^{k-1}} E_{2^{k-1}}^r(f)_\infty + 2^{k-1} a_{n,2^{k-1}} E_{2^{k-1}}^r(f)_\infty \right) \right) +$$

$$+C_2 a_{n,2^j} 2^j E^r_{2^j}(f)_\infty \le C_3 \sum_{k=0}^{j} 2^k a_{n,2^k} E^r_{2^k}(f)_\infty.$$

Учитывая, что по лемме 6 $2^{k-1} a_{n,2^k} \le C_5 \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{n,i}$, находим что

$$(R_n(f,r)(x))^r \le C_6 (a_{n,1} E^r_1(f)_\infty + \sum_{k=0}^{j} 2^k a_{n,2^k} E^r_{2^k}(f)_\infty),$$

откуда следует неравенство теоремы.

Аналогично теореме 2 доказывается

Теорема 3'. *Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (6),* $f \in L^p[0,1)$*,* $1 < p < \infty$*,* $p \ge r \ge 1$*. Тогда справедливо (16).*

Из теорем 3 и 3' вытекает

Следствие 1. Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$, $1 \le r < \infty$. Тогда

$$\left\| \left(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f) - f|^r \right)^{1/r} \right\|_p = O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{E^r_k(f)_p}{n} \right)^{1/r}.$$

В частности при $r = 1$ и $f \in Lip^*(\alpha, p)$, т.е. при $\omega^*(f,h) = O(h^\alpha)$, получаем

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} |S_k(f) - f| \|_p =$$

Известно, что для $f \in h^\omega_p$ и $\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^{n} S_k(f)/n$ справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n(f)\|_{p,\omega} = 0$ (см. [7] для $\omega(h) = h^\alpha$). В частности, для $f \in h^\omega_p$ имеем $lim_{n\to\infty} E(f)_{p,\omega} = 0$.

Докажем для метрики Гёльдера аналог оценки (12).

Теорема 4. *Пусть* $f \in h^\omega_p$*,* $1 < p \le \infty$*,* $p \ge r \ge 1$*. Тогда для* $\nu n \le m < n$

$$\|V_{n,m}(f,r)\|_{p,\omega} \le C(\nu) E_{n-m}(f)_{p,\omega}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу неравенства Минковского и коммутативности сдвига и свертки имеем

$$\|U_{n,m}(f,r)(\cdot\ominus h)-U_{n,m}(f,r)(\cdot)\|_p\le\|U_{n,m}(f(\cdot\ominus h)-f(\cdot),r)\|_p. \quad (17)$$

Отсюда в силу оценки (11) и замечания 1 следует, что

$$\|U_{n,m}(f,r)\|_{p,\omega}\le\|U_{n,m}(f,r)\|_p+\sup_{0<h<1}\frac{\|U_{n,m}(f(\cdot\ominus h)-f(\cdot),r)\|_p}{\omega(h)}\le$$

$$\le C_1\left(\|f\|_p+\sup_{0<h<1}\frac{\|(f(\cdot\ominus h)-f(\cdot)\|_p}{\omega(h)}\right)=C_1\|f\|_{p,\omega}$$

где для $p=\infty$ константа C_1 равна $M(\nu)$ из леммы 8. Пусть $t_{n-m}\in\mathcal{P}_{n-m}$, таков что $\|f-t_{n-m}\|_{p,\omega}=E_{n-m}(f)_{p,\omega}$. Снова $S_k(t_{n-m})= =t_{n-m}$ при $k\ge n-m$ и аналогично (13) имеем

$$\|V_{n-m}(f,r)\|_p\le\|U_{n-m}(f-t_{n-m},r)\|_p+\|f-t_{n-m}\|_p\le$$

$$\le C_1\|f-t_{n-m}\|_p+\|f-t_{n-m}\|_p\le(C_1+1)E_{n-m}(f)_{p,\omega} \quad (13')$$

С другой стороны, в силу (17) и (13') (используем обозначение $\Delta_hf= =f(\cdot\ominus h)-f(\cdot)$)

$$\sup_{0<h<1}\|\Delta_hV_{n-m}(f,r)\|_p/\omega(h)\le\sup_{0<h<1}\|V_{n-m}(\Delta_hf,r)\|_p/\omega(h)\le$$

$$\le\sup_{0<h<1}\left(\|U_{n-m}(\Delta_hf,r)\|_p+\|\Delta_h(f-t_{n-m})\|_p\right)/\omega(h)\le$$

$$\le(C_1+1)\|f-t_{n-m}\|_{p,\omega}=(C_1+1)E_{n-m}(f)_{p,\omega}. \quad (18)$$

Объединяя оценки (13') и (18) завершаем доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $1<p\le\infty$, $\omega,\mu\in\Omega$, *причем* $\omega(t)$ *удовлетворяет* Δ_2*-условию, а* $\lambda(t)=\omega(t)/\mu(t)$ *возрастает на (0,1) и* $\lim_{t\to0}\lambda(t)=0$. *Если* $f\in h_p^\omega$, $p\ge r\ge1$, *и числа* n,m *таковы, что* $\nu n\le m\le n$, $\nu\in(0,1)$, *то*

$$\|V_{n,m}(f,r)\|_{p,\mu}\le C(\lambda((n-m)^{-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

По теореме 4 $\|V_{n,m}(f,r)\|_{p,\mu} \leq C(\nu)E_{n-m}(f)_{p,\mu}$, а по лемме 10 имеем $E_{n-m}(f)_{p,\mu} \leq C\lambda(1/(n-m))$. Подставляя второе неравенство в первое, доказываем теорему.

В последних 2 теоремах, следуя Сзалу [14], будем считать, что существует $\alpha \in (0,1)$, такое что $\omega^{\alpha}(t)/\mu(t)$ возрастает на (0,1). Здесь $\omega, \mu \in \Omega$ и ω удовлетворяет Δ_2-условию.

Теорема 6. *Пусть матрица A удовлетворяет условиям (3) и (7), $f \in H^{\omega}_{\infty}[0,1)$, $r \geq 1$. Тогда*

$$\|R_n(f,r)\|_{\infty,\mu} \leq C(1+na_{n,n})^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{[log_2 n]-1} 2^k a_{n,2^{k+1}}\omega^r(2^{-k})+na_{n,n}\omega^r(n^{-1})\right)^{(1-\alpha)/r}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

В силу теоремы 1 и неравенства Минковского

$$\sup_{0<h<1}\|\Delta_h R_n(f,r)\|_{\infty}/\mu(h) \leq \sup_{0<h<1}\|R_n(\Delta_h f,r)\|_{\infty}/\mu(h) \leq$$

$$\leq \sup_{0<h<1}\left(C_1\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^k E^r_{2^k}(\Delta_h f)_{\infty} a_{n,2^{k+1}} + na_{n,n}E^r_{\frac{n+1}{2}}(\Delta_h f)_{\infty}\right)^{1/r}/\mu(h) :=$$

$$= \sup_{0<h<1} C_1 A_n^{1/r}(h)/\mu(h).$$

С одной стороны, по лемме 5 справедлива оценка

$$E_{2^k}(\Delta_h f)_{\infty} \leq 2E_{2^k}(f)_{\infty} \leq C_2\omega(2^k);\ E_{\frac{n+1}{2}}(\Delta_h f)_{\infty} \leq C_3\omega((n+1)^{-1}) \qquad (19)$$

С другой стороны

$$E_k(\Delta_h f)_{\infty} \leq \|\Delta_h f\|_{\infty} \leq \omega(h),$$

и как следствие

$$A_n(h) \le \omega^r(h) \left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]-1} 2^k a_{n,2^{k+1}} + n a_{n,n} \right) \le C_4 \omega^r(h)(1 + n a_{n,n}). \qquad (20)$$

Записывая $A_n(h) = A_n(h)^\alpha A_n(h)^{1-\alpha}$ и применяя к первому сомножителю оценку (20), а ко второму — (19), получим нужную оценку для $\sup_{0<h<1} \|\Delta_h R_n(f,r)\|_\infty / \mu(h)$. Для $\|R_n(f,r)\|_\infty$ аналогичная оценка вытекает из теоремы 1 и второго неравенства (20).

Теорема 7. *Пусть для матрицы A выполнены условия (3) и (6). $f \in L^p[0,1)$, $1 < p < \infty$ или $f \in C^*[0,1)$ (при $p = \infty$), $p \ge r \ge 1$. Если $f \in H_p^\omega$, то*

$$\|R_n(f,r)\|_{\infty,\mu} \le C \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \omega^r(k^{-1}) \right)^{(1-\alpha)/r}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6 с использованием теорем 3 и 3' вместо теоремы 1.

Замечание 3. В работе [14] в аналогих теорем 1 и 6 вместо $n a_{n,n}$ содержится $\ln 2n a_{n,n}$ (по-видимому, стоило использовать $1 + \ln^+ n a_{n,n}$), что часто дает лучший порядок по k (например, при $a_{n,n} = 1$, $a_{n,k} = 0$, $1 \le k < n$). Было бы интересным улучшить таким образом оценки теорем 1 и 6.

Замечание 4.Было бы интересным изучить $\|R_n(f,r)\|_p$ при $p = 1$.

Библиографический список

1.*Avdispahic M., Pepic M.* Summability and integrability of Vilenkin series. Collect. Math., 2000.

2.*Bloom W., Fournier J.J.F.* Smoothness conditions and integrability theorems on bounded Vilenkin groups, J.Austral. Math. Soc. (Ser. A), 45 (1988).

3.*Chandra P.* On the degree of approximation of class of functions by means of Fourier series, Acta Math. Hungar., 52 (1988).

4.*Fridli S.* On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh-Fourier series, J. Approx. theory, 76 (1994).

5.*Fridli S., Schipp F.* Strong approximation via Sidon type inequalities, J. Approx. theory, 94(1998).

6.*Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М: Наука, 1987.

7.*Iofina T.V., Volosivets S.S.* On the degree on approximation by means of Fourier-Vilenkin series in Holder and L^p norm, East J. on Approx., 15(2009).

8.*Leindler L.* On the degree of approximation of continuous functions, Acta Math. Hungar., 104 (2004).

9.*Leindler L.* On summability of Fourier series, Acta Sci. Math.(Szeged), 29 (1968).

10.*Leindler L., Meir A., Totik V.* On approximation of continuous functions in Lipshitz norms, Acta Math. Hungar., 45 (1985).

11.*Prestin J. and Prössdorf S.* Error estimates in generalized Hölder-Zygmund norms, Zeit. Anal. Anwend., 9(1990).

12.*Schipp F.* On L^p-norm convergence of series with respect to product systems, Anal. Math., 2(1976).

13.*Simon P.* Verallgemeinerte Valsch-Fourierreihen, Acta Math. Hungar., 27 (1976).

14.*Szal B.* On the strong approximation by matrix means in the genealized Hölder metric, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 56(2007).

15.*Szal B.* On the rate of strong summability by matrix means in the genealized Hölder metric, J. Inequel. Pure Appl. Math., 9(1)(2008), N 28.

16.*Tikhonov S.* Trigonometric series with general monotone coefficients, J.

Anal. Math. Appl., 326(2007).
17. *Xie T., Sun X.* On the problem of approximation by linear means, J. Math. Res. Exposition, 5(1985).

УДК 511.3

А.Е. КОРОТКОВ

Приложение метода редукции к степенным рядам к некоторым задачам в теории чисел

Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad s=\sigma+\imath t, \tag{1}$$

с периодическими алгебраическими коэффициентами, который определяет функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению вида:

$$a\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)f(s)=\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s+\delta_1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right)\hat{f}(1-s), \tag{2}$$

где a – некоторая алгебраическая константа; δ и δ_1 – величины, равные либо 0, либо 1; k – период последовательности коэффициентов; $\hat{f}(s)$ – функция, определенная рядом Дирихле с коэффициентами, сопряженными к коэффициентам ряда (1).

Известно [1], что функциональному уравнению римановского вида (2) удовлетворяет достаточно широкий класс рядов Дирихле с периодическими коэффициентами, включающий класс L-функций Дирихле.

Известно также, что Дзета-функция Римана принимает трансцендентные значения при четном натуральном значении аргумента. Это следует из явных формул [2]:

$$\zeta(2k)=(-1)^k\pi^{2k}\frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right),\qquad k=1,2,3,\dots,$$

где B_{2k} – числа Бернулли, которые являются рациональными числами.

Основным моментом получения такого результата для дзета-функции Римана является разложение функции $\frac{1}{e^{-x}-1}$ в ряд Лорана в окрестности нуля. Поэтому, получить обобщение данного результата для значений L-функций Дирихле в четных или нечетных точках так просто не удается.

В данной работе, для доказательства аналогичного факта о значениях, будем использовать метод редукции к степенным рядам, разработанный В.Н. Кузнецовым в работах [3,4]. Суть этого метода заключается в том, что изучение аналитических свойств рядов Дирихле (1) сводится к изучению свойств на границе сходимости для степенного ряда

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

с теми же самыми коэффициентами, что и у ряда Дирихле (1).

Также рассмотрим и другую задачу. В работе [5] показано, что важную роль при решении проблемы о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана играет ответ на следующий вопрос: существуют ли в полуплоскости $\sigma > 1/2$ общие нули целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами?

Особый интерес, в связи с этой задачей, представляют ряды Дирихле, являющиеся линейной комбинацией L-функций Дирихле с первообразными характерами одного и того же модуля. Как показано в [6] такие ряды Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана и имеют бесконечное число нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Поэтому положительный ответ на поставленный выше вопрос позволяет сделать важные выводы о зависимости расширенной гипотезы Римана от основной гипотезы, и о том, что условие удовлетворять функциональному уравнению типа Римана не накладывает существенных ограничений на нули таких функций.

В данной работе приводится достаточно простой алгоритм, позволяющий определять в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

1. Трансцендентность значений рядов Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана, в точках $s = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Используя метод редукции к степенным рядам можно получить следующее утверждение

Теорема 1. *Ряд Дирихле (1) с периодическими алгебраическими коэффициентами, удовлетворяющий функциональному уравнению римановского типа (2), в точках $s = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, принимает трансцендентные значения.*

Доказательство

Рассмотрим соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть d – период последовательности коэффициентов. Тогда

$$g(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^{dm} = \frac{P_d(z)}{1 - z^d} = \frac{P_{d-1}(z)}{1 + z + \cdots + z^{d-1}}.$$

Таким образом, $g(z)$ – рациональная функция, с алгебраическими коэффициентами, регулярная в точке $z = 1$.

Следовательно, существуют радиальные производные $\alpha_n = \lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x)$, которые являются алгебраическими числами, а значит и $\hat{\alpha}_n = \lim_{x \to 0+0} g^{(n)}(e^{-x})$ также алгебраические.

Рассмотрим известное преобразование Меллина:

$$f(s)\,\Gamma(s) = \int_0^{\infty} g\left(e^{-x}\right) x^{s-1} dx, \qquad \sigma > \sigma_0. \tag{4}$$

Запишем это равенство в виде

$$f\left(s\right)\Gamma\left(s\right)=\int_{0}^{\rho}g\left(e^{-x}\right)x^{s-1}dx+\int_{\rho}^{\infty}g\left(e^{-x}\right)x^{s-1}dx. \tag{5}$$

Для любого $\rho\geq\rho_0>0$ второй интеграл в правой части выражения (5) равномерно сходится в любой полосе $\sigma_1\leq\sigma\leq\sigma_0$, следовательно по теореме Вейерштрасса [7] он определяет целую функцию.

В первом интеграле равенства (5) разложим $g\left(e^{-x}\right)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$$\int_{0}^{\rho}g\left(e^{-x}\right)x^{s-1}dx=\int_{0}^{\rho}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\hat{\alpha}_k}{k!}\cdot x^{k+s-1}+O\left(x^{n+1}\right)x^{s-1}\right]dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\hat{\alpha}_k}{k!\left(k+s\right)}\cdot\rho^{k+s}+\varphi\left(s\right)$$

Таким образом, в силу произвольности n, получаем продолжимость $f\left(s\right)$ регулярным образом на всю комплексную плоскость.

Возьмем вычет от обеих частей (4) в точках $s=-k$, $k=0,1,2,\ldots$:

$$\underset{s=-k}{Res}\, f\left(s\right)\Gamma\left(s\right)=\frac{\hat{\alpha}_k}{k!}$$

Используя тот факт, что $Res_{s=-k}\,\Gamma\left(s\right)=\frac{\left(-1\right)^k}{k!}$, а $f\left(s\right)$ – голоморфна в окрестностях точек $s=-k$, получаем

$$\hat{\alpha}_k=\left(-1\right)^k f\left(-k\right).$$

Из данного соотношения следует, что $f\left(-k\right)$ – алгебраические числа.

Отсюда, в силу того факта, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа (2), получаем утверждение теоремы 1.

2. Алгоритм определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, лежащими в полуплоскости $\sigma>\frac{1}{2}$

Приведем известные факты, связанные с аналитическими свойствами целых функций, заданных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые влияют на расположение нулей таких функций.

В работе [8] показано, что ряды Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами, которые определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана, являются L-функциями Дирихле.

В случае немультипликативных коэффициентов условие удовлетворять функциональному уравнению типа Римана не накладывает сильных ограничений на расположение нулей даже в случае периодических коэффициентов. Как уже отмечалось во введении, ряды Дирихле, которые являются линейной комбинацией L-функций Дирихле с различными первообразными характерами данного модуля удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана. В [1, гл. IV, § 5] доказано следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть χ_1 и χ_2 неэквивалентные характеры Дирихле. Тогда функция*

$$f(s) = c_1 L(s,\chi_1) + c_2 L(s,\chi_2), \qquad s = \sigma + it,$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $L(s,\chi_1)$, $L(s,\chi_2)$ – L-функции Дирихле, имеет в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, где $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, бесконечно много нулей.

К сожалению, исходя из приведенных выше фактов, не получается ответить на следующий вопрос: для любого ли нуля z_0, $Re z_0 > 1/2$, целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, существует целая функция, заданная рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, не равная нулю в точке z_0.

Как уже отмечалось выше, ответ на этот вопрос связан с проблемой о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана.

Приведем численную схему определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Как показано в работе [9], целая функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{6}$$

с периодическими коэффициентами, допускает в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ приближение полиномами Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{7}$$

с той же скоростью, с какой функция $g(x)$, заданная степенным рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{8}$$

с теми же коэффициентами a_k, что и ряд Дирихле (6), допускает на отрезке $[0; 1]$ приближение алгебраическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} x^k. \tag{9}$$

При этом полиномы Дирихле вида (7) имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы вида (9).

Легко видно, что для целых функций вида (6), в случае периодических коэффициентов a_n, степенной ряд (8) определяет рациональную функцию

$$g(x) = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}}, \tag{10}$$

где d – период для a_k.

Полюсы функции $g(z)$, как функции комплексного переменного, лежат на единичной окружности, и эта функция регулярна в точке $z = 1$.

В нашем случае, функцию $g(z)$ будем считать регулярной и в точке $z = -1$.

Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом, фокусы которого находятся в точках ± 1 и сумма полуосей которого равна ρ_0. Кроме того, функция $g(z)$ регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области.

Пусть в этом случае $E_n(g)$ обозначает величину наилучшего приближения функции (10) на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят n.

Тогда теорема Бернштейна [10] утверждает что величина $E_n(g)$ ведет себя следующим образом

$$E_n(g) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{11}$$

для любого $\rho:\ 1 < \rho < \rho_0$.

Как показано в [10], оценка (11) имеет место и в случае приближения функции $g(x)$ на отрезке $[-1;1]$ алгебраическими полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k, \tag{12}$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad x \in [-1;1]$$

разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева. При $k \geq 1$

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} g(t)\, T_k(t)\, dt. \tag{13}$$

В силу сказанного выше имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряд Дирихле (6) с периодическими коэффициентами определяет целую функцию. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ вида (7), такая, что в любой полосе: $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ имеют место следующие оценки*

$$\|f(s) - Q_n(s)\| \leq C\frac{1}{\rho^n},$$

где ρ – некоторая константа, большая 1.

Заметим, что в качестве коэффициентов полиномов Дирихле $Q_n(s)$ можно взять коэффициенты алгебраических полиномов $P_n(x)$ вида (12).

Таким образом, для определения нулей целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, лежащими в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$ достаточно искать комплексные нули аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ (7) с коэффициентами из полиномов вида (12). Известно [7], что в любой полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ нули полиномов $Q_n(s)$ с ростом n стремятся к нулям функции $f(s)$, и, так как полиномы $Q_n(s)$ сходятся к $f(s)$ с показательной скоростью, то будет наблюдаться достаточно быстрая сходимость нулей полиномов $Q_n(s)$.

В результате численного эксперимента, основанного на приведенной выше схеме, было установлено, что в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < 10^5$ нет общих нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодами коэффициентов $d = 3$ и $d = 5$, что позволяет предположить, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной гипотезы.

Библиографический список

1.*Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

2.*Коблиц Н.* p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Бибфизмат, 1981.

3.*Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984. Т.36. Вып.6.

4.*Кузнецов В.Н.* О граничных свойствах степенных рядов с конечными коэффициентами // Межвуз. сб. научн. трудов. Дифференциальные уравнения и теория функций. Изд-во Сарат. ун-та, 1987 г.

5.*Кузнецов В.Н., Полякова О.А.* Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

// Чебышевский сборник: Науч.-теор. журн. Тула: Изд-во ТГПУ, 2010. Т. 11. № 1.

6. *Кузнецов В.Н., Полякова О.А.* К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Т. 11. № 3 (часть 1).

7. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

8. *Кривобок В.В.* О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющими функциональному уравнению римановского типа // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Т. 7. № 1.

9. *Кузнецов В.Н., Водолазов А.М.* Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2.

10. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: ЛГУ, 1977.

УДК 511.3

В.В. КРИВОБОК

Об одном уточнении теоремы Брауэра

Пусть K — нормальное, не обязательно абелево, расширение числового поля k степени n и G — группа Галуа этого расширения. Пусть, далее, $\{M(g)\}_{g\in G}$ — представление группы G в группу матриц размерности $n\times n$ и χ — характер этого представления, определяемый как след матрицы представления элемента $g\in G$ [1]:

$$\chi(g) = Sp\ M(g).$$

Тогда L–функция Артина определяется следующим образом [1]:

$$L(s,\chi) = L(s,\chi,K|k) = \prod_{\wp} \left| I - M\left(\left[\frac{K/k}{\wp}\right]\right) N(\wp)^{-s} \right|^{-1}, \qquad (1)$$

где произведение берется по всем неразветвленным простым идеалам $\wp$ поля k.

В 1932 году Е. Артин высказал гипотезу о целостности L—функций числовых полей в случае неглавных характеров неабелевых групп. Эта гипотеза доказана только в отдельных случаях. В данном статье приводится полное доказательство гипотезы Артина для случая, когда неабелева группа Галуа является группой подстановок S_3.

Для начала приведем теорему Брауэра для характеров неабелевых групп.

Теорема (Брауэр). *Неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров χ^* циклических подгрупп с целыми коэффициентами, то есть*

$$\chi = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{t_\alpha} n_{i,\alpha} \chi^*_{i,\alpha}, \quad n_{i,\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим уточнение теоремы Брауэра для неабелевой группы Галуа шестого порядка. В этом случае покажем, что коэффициенты $n_{i,\alpha}$ могут быть натуральными.

Итак, пусть G — неабелева группа шестого порядка, то есть $[G] = 6 = = 2\cdot 3$.

Число 3 является наибольшим простым числом, делящим порядок группы, тогда (см. [2]) получаем. что в G существует нормальная подгруппа H порядка 3. Следовательно, существует еще одна подгруппа H_1 порядка 2.

Найдем число сопряженных с H_1 подгрупп. Для этого вычислим нормализатор данной группы N_{H_1}. Имеем $[N_{H_1}] \neq 3$ (так как в противном случае H_1 была бы нормальной в G), кроме того, в силу неабелевости G $N_{H_1} \neq G$ и $H_1 \subset N_{H_1}$. Значит (см. [2]), $N_{H_1} = H_1$ и $[G/H_1] = 3$. Число сопряженных подгрупп равно 3 — $H_1,\ H_2$ и H_3 (все они пересекаются по нейтральному элементу).

Так как подгруппа H нормальна в G, и G — неабелева, то $N(H) \neq G$ и тогда $N(H) = H$ и $[G/H] = 2$. Следовательно, у H два класса сопряженных элементов.

Окончательно получаем

$$G = \left(\bigcup_{i=1}^{3} H_i\right) \cup H.$$

Имеем три класса сопряженности: $H_1,\ H_2,\ H_3$ — один класс; H состоит из двух классов сопряженных элементов (так как нормальна); и класс, соответствующий нейтральному элементу $\{e\}$.

Следовательно, число простых характеров равно трем. Пусть это будут $\psi_1,\ \psi_2$ и ψ_3. Количество одномерных характеров равно 2. Пусть это будут $\psi_1,\ \psi_2$ (тут мы воспользовались теоремами из [2]).

Вычислим толщину характера ψ_3. Применяя известное равенство для порядка неабелевой группы (см. [2]), имеем

$$n = 6 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 + 1 + n_3^2 \Rightarrow n_3 = 2.$$

Значит ψ_3 — характер толщины 2, то есть $\psi_3(e) = 2$.

Рассмотрим действие характера ψ_3 на классах сопряженности.

Известно, что если $\psi_1,\ \psi_2, ...,\ \psi_s$ — простые характеры, то имеет место соотношение ортогональности:

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(g)\psi_i(e) = \chi_0^*(g), \quad \text{где} \quad g \in G \quad \text{и}$$

$$\chi_0^*(g) = \begin{cases} n, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}.$$

В нашем случае

$$\psi_1(g) + \psi_2(g) + 2\psi_3(g) = \chi_0^*(g).$$

Отсюда видно, что таблица значений характеров группы устроена следующим образом:

$$\begin{array}{cccc} & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ C_1 & 1 & 1 & 2 \\ C_2 & 1 & 1 & -1 \\ C_3 & 1 & -1 & 0 \end{array},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3$ — классы сопряженности.

Тогда

$$\psi_3(g) = \psi_3|_{H_1}(g) + \psi_3|_{H_2}(g) + \psi_3|_{H_3}(g) + \psi_3|_H(g),$$

но на сопряженных подгруппах $H_1,\ H_2,\ H_3$, включающих два элемента значение характера $\psi_3(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$. Тогда

$$\psi_3(g) = 3(\chi_1 + \chi_2)(g) + \psi|_H(g).$$

Так как $[H] = 3$, то H — циклическая, у H имеется три характера: $\chi_{4,1},\ \chi_{4,2},\ \chi_{4,3}$, значениями которых являются корни третьей степени из единицы $1,\ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получим

$$\psi_3(g) = \begin{cases} 3(\chi_1 + \chi_2)(g) + (\chi_{4,2} + \chi_{4,3})(g), & g \neq e \\ 3(\chi_1 + \chi_2)(g) + (\chi_{4,2} + \chi_{4,3})(g) - 2\psi_3(g), & g = e \end{cases} =$$

$$= 3(\chi_1 + \chi_2)(g) + (\chi_{4,2} + \chi_{4,3})(g) - \frac{6}{6}\chi_0^*(g). \qquad (2)$$

Рассмотрим

$$\chi_i^*(g) \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j g \alpha_j^{-1} \in H_1}}^{3} \chi_i(\alpha_j g \alpha_j^{-1}) = 3\chi_i(g).$$

Отсюда получаем

$$3(\chi_1 + \chi_2)(g) = (\chi_1^* + \chi_2^*)(g). \tag{3}$$

Далее рассмотрим

$$\chi_{4,2}^*(g) + \chi_{4,3}^*(g) = \sum_{\chi_{4,i} \neq \chi_0} \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j g \alpha_j^{-1} \in H}}^{2} \chi_{4,i}(\alpha_j g \alpha_j^{-1}) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j g \alpha_j^{-1} \in H}}^{2} \sum_{\chi_{4,i} \neq \chi_0} \chi_{4,i}(\alpha_j g \alpha_j^{-1}) = \begin{cases} 4, & g = e \\ -2, & g \neq e. \end{cases}$$

Но, с другой стороны, имеет место равенство:

$$\chi_{4,2}(g) + \chi_{4,3}(g) = \begin{cases} 2, & g = e \\ -1, & g \neq e. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$(\chi_{4,2} + \chi_{4,3})(g) = \frac{1}{2}(\chi_{4,2}^* + \chi_{4,3}^*)(g). \tag{4}$$

В силу (2), (3) и (4) имеем

$$\psi_3(g) = (\chi_1^* + \chi_2^*)(g) + \frac{1}{2}(\chi_{4,2}^* + \chi_{4,3}^*)(g) - \chi_0^*(g). \tag{5}$$

Рассмотрим цепочку расширений

$$k \subset K_2 \subset K,$$

где $Gal(K/K_2) = H_1$. Тогда в силу (5) и свойств L-функций Артина [1], получаем

$$L(s, \psi_3, K/k) = \frac{Z_{K_2}(s) L(s, \chi_2, K/K_2) L^{\frac{1}{2}}(s, \chi_{4,2}, K/K_1) L^{\frac{1}{2}}(s, \chi_{4,3}, K/K_1)}{Z_K(s)},$$

или

$$L^2(s,\psi_3,K/k)=\frac{Z_{K_2}^2 L^2(s,\chi_2,K/K_2)L(s,\chi_{4,2},K/K_1)L(s,\chi_{4,3},K/K_1)}{Z_K^2(s)}, \tag{6}$$

где $k\subset K_1\subset K,\ \ Gal(K/K_1)=H,\quad k\subset K_2\subset K,\ \ Gal(K/K_2)=H_1.$

Таким образом, формула (6) является уточнением представления некоторой степени L-функции Артина как отношение произведений различных степеней L-функций Дирихле циклических расширений $K_i\subset K$, и некоторой степени Z-функции Дедекинда поля K. В связи с этим встает задача разложения L-функций Дирихле абелевых расширений промежуточных полей $k\subset K_i\subset K$ в произведение L-функций Дирихле основного поля k, и последующего сокращения ряда сомножителей.

В силу известных фактов [1] для Z–функции Дедекинда числовых полей имеет место разложение:

$$Z_K(s)=Z_{K_2}(s)L(s,\chi_2,K/K_2). \tag{7}$$

В силу (6) и разложения (7) получаем

$$L^2(s,\psi_3,K/k)=L(s,\chi_{4,2},K/K_1)L(s,\chi_{4,3},K/K_1).$$

Отсюда получаем, что $L^2(s,\psi_3,K/k)$ — целая функция. Согласно мероморфности L-функции Артина этот факт доказывает целостность данной L-функции.

Замечание. Используя подход, описанный выше для случая неабелева расширения $k\subset K$ с группой Галуа G, порядок которой равен произведению двух различных простых чисел, для L-функции Артина в случае «толстого» характера ψ, можно получить представление вида

$$L(s,\psi,K/k)=\frac{Z_{K_2}^{d_1}(s)\prod\limits_{\chi_i\neq\chi_0}L^{d_1}(s,\chi_i,K/K_2)\prod\limits_{\chi_j\neq\chi_0}L^{\frac{1}{d}}(s,\chi_j,K/K_1)}{Z_K^{d_1}(s)},$$

где $k\subset K_1\subset K,\ \ Gal(K/K_1)=H,\ \ [H]=p_2,$
$k\subset K_2\subset K,\ \ Gal(K/K_2)=H_1,\ \ [H_1]=p_1.$

Отсюда, используя известное разложение для дзета–функции Дедекинда $Z_K(s)$ и наряду с мороморфностью L–функции, следует целостность самой L-функции Артина.

Библиографический список

1. *Хейльброн Х.* ζ-функции и L-функции // В кн.: Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.
2. *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

УДК 511.3

В.Н. КУЗНЕЦОВ, В.В. КРИВОБОК, О.А. МАТВЕЕВА, Е.В. СЕЦИНСКАЯ

О рядах Дирихле, определяющих мероморфные функции с определенным порядком роста модуля

Рассмотри ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \tag{1}$$

и степенной ряд с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле (1):

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n. \tag{2}$$

В данной работе доказывается

Теорема 1. *Пусть степенной ряд (2) определяет функцию $g(z)$, для которой точка $z = 1$ является полюсом k–го порядка. Тогда ряд Дирихле (1) определяет функцию $f(s)$ аналитически продолжимую на комплексную плоскость как мероморфную функцию с возможными про-*

стыми полюсами в точках $s = 1, 2, \dots, k$, модуль которой удовлетворяет слудующему условию роста

$$|f(-n)| = O(e^{n \ln n + An}),$$

где A—некотрая положительная константа, большая чем $\frac{\pi}{2}$.

Обратно, пусть ряд Дирихле (1) определяет функцию $f(s)$, аналитически продолжимую на комплексную плоскость как мероморфную функцию с возможными полюсами в точках $s = 1, 2, \dots, k$, модуль которой удовлетворяет следующим условиям роста:

$$|f(-n)| = O(e^{n \ln n + An}),$$

где A—некотрая положительная константа, большая чем $\frac{\pi}{2}$;

$$|f(s)\Gamma(s)| = O(e^{-\alpha|t|}), \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1,$$

где константа зависит от σ_0 и σ_1.

Тогда степенной ряд (2) определяет функцию $g(z)$, для которой точка $z = 1$ является либо регулярной, либо полюсом порядка не выше k.

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть $f(s)$ — целая функция, определенная рядом Дирихле, модуль которой удовлетворяет условию роста модуля*

$$|f(s)\Gamma(s)| < Ce^{-\alpha|t|}, \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \tag{3}$$

где постоянные C и α зависят только от величин σ_0 и σ_1.

Тогда при $x > 0$ для n–ой производной функции

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\Gamma(s)x^{-s}ds, \quad c > \sigma_0, \tag{4}$$

имеет место представление

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} f(s-n)\Gamma(s-n)(s-n+1)\dots(s-1)x^{-s}ds,$$

где $c_1 = c + n$.

Доказательство

В силу условия (3) интеграл (4) можно продифференцировать по переменной x. Тогда

$$g^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\Gamma(s)(-s)(-s-1)\dots(-s-n+1)x^{-s-n}ds =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} f(s-n)\Gamma(s-n)(s-n+1)\dots(s-1)x^{-s}ds,$$

где $c_1 = c + n$.

Лемма 2. *Последовательность функций* $\left\{\dfrac{1}{z+n}\right\}_{n=k+1}^{\infty}$ *является полной в пространстве регулярных внутри и непрерывных на границе круга радиуса* $R < k+1$ *функций с равномерной нормой.*

Доказательство

В работе [1, стр. 261] показано, что последовательность функций

$$\left\{\frac{1}{e^{i\varphi} - a_k}\right\}_{k=1}^{\infty}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

замкнута в пространстве $C^*[0, 2\pi)$ 2π–периодических функций, тогда и только тогда, когда расходятся следующие два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|^*) \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left|\frac{1}{a_k}\right|^*\right),$$

где

$$|\xi|^* = \begin{cases} |\xi|, & \text{если } |\xi| < 1, \\ 1, & \text{если } |\xi| \geqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда сразу получается утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* γ_R *— дуга полуокружности с центром в точке* $s = 0$ *радиуса* R*:*

$$s = Re^{i\varphi}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi.$$

Тогда при $0 < x < 1$ *и* $|s_0| < R$ *имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{x^{-s}}{s-s_0} ds\right| = O\left(\frac{1}{|\ln x|}\right).$$

Доказательство

Обозначим через $d_0 = \min\limits_{s\in\gamma_R} |s-s_0|$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{x^{-s}}{s-s_0} ds\right| \leqslant \int\limits_{\gamma_R} \left|\frac{x^{-s}}{s-s_0}\right| ds \leqslant \frac{R}{d_0} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{-R\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{R}{d_0} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{R\cos\varphi} d\varphi \leqslant \frac{2R}{d_0} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^{R\left(1-\frac{2}{\pi}\vartheta\right)} d\vartheta = \frac{4R}{\pi d_0} \int\limits_0^1 x^{Rt} dt =$$

$$= \frac{4R}{\pi d_0} \int\limits_0^1 e^{Rt\ln x} dt = \frac{4R}{\pi d_0 R \ln x} e^{Rt\ln x}\Big|_0^1 = O\left(\frac{1}{|\ln x|}\right).$$

Лемма 4. *Пусть* $f(s)$ *— целая функция, определяемая рядом Дирихле (1), модуль которой удовлетворяет условию роста*

$$|f(s)\Gamma(s)| = O(e^{-\alpha|t|}), \quad -\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1, \tag{5}$$

где константа зависит от величин σ_0 *и* σ_1.

Тогда у соответствующего степенного ряда $g(z)$ *вида (2) существуют конечные радиальные производные*

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство

Рассмотрим обратное преобразование Меллина

$$g(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\Gamma(s) x^{-s} ds,$$

где

$$g(e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}.$$

Покажем, что существуют односторонние производные вида

$$\lim_{x\to 0+} |g^{(n)}(e^{-x})| = \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В силу леммы 1 для $g^{(n)}(e^{-x})$ имеем следующее выражение

$$g^{(n)}(e^{-x}) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \psi_n(s) x^{-s} ds,$$

где $\psi_n(s) = f(s-n)\Gamma(s-n)(s-n+1)\ldots(s-1)$.

В силу (5) для функций $\psi_n(s)$ будет выполняться оценка такого же вида. Тогда, применяя метод контурного интегрирования, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \psi_n(s) x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi_n(s) x^{-s} ds + \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^{(n)} x^j, \tag{7}$$

где γ — контур, состоящий из дуги полуокружности с центром в точке $s = 0$ и радиуса R и соответствующих бесконечных участков мнимой оси.

В этой формуле

$$\gamma_j^{(n)} = Res_{s=-j} \psi_n(s), \quad j = \overline{0,k}, \quad k < R < k+1. \tag{$*$}$$

Обозначим контур дуги полуокружности через γ_R, а оствшийся участок через γ_1. Тогда

$$\int_{\gamma} \psi_n(s) x^{-s} ds = \int_{\gamma_R} \psi_n(s) x^{-s} ds + \int_{\gamma_1} \psi_n(s) x^{-s} ds. \tag{8}$$

Оценим второе слагаемое в этом представлении

$$\left| \int_{\gamma_1} \psi_n(s) x^{-s} ds \right| \leqslant c \int_R^{\infty} e^{-\alpha t} dt = c_1 e^{-\alpha R} \leqslant \varepsilon, \ \text{ при } R \geqslant R_0. \tag{9}$$

Оценим первое слагаемое.

$$\left| \int_{\gamma_R} \psi_n(s) x^{-s} ds \right| \leqslant \left| \int_{\gamma_R} [\psi_n(s) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}] x^{-s} ds \right| + \left| \int_{\gamma_R} [\sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}] x^{-s} ds \right|.$$

Обозначим
$$\Phi_n(s) = \psi_n(s) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}. \tag{10}$$

Ясно, что функция $\Phi_n(s)$ регулярна внутри и на границе круга радиуса R с центром в точке $s = 0$. Тогда в силу леммы 2 существует выражение вида
$$T_{N,n}(s) = \sum_{R<k<N} \frac{c_k^{(n)}}{s+k},$$
для которого выполняется оценка
$$\max_{s\in\gamma_k} |\Phi_n(s) - T_{N,n}(s)| < \varepsilon. \tag{11}$$

Тогда в силу (9), (11) и леммы 3 окончательно получаем оценку вида: при $0 < x < 1$
$$\left|\int_{\gamma_R} \Phi_n(s)x^{-s}ds\right| \leqslant \left|\int_{\gamma_R} [\Phi_n(s) - T_{N,n}(s)]x^{-s}ds\right| + \left|\int_{\gamma_R} T_{N,n}(s)x^{-s}ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \int_{\gamma_R} |x^{-s}|ds + \sum_{R<k<N} |c_k^{(n)}| \int_{\gamma_R} \left|\frac{x^{-s}}{s+k}\right| ds \leqslant \frac{c}{\ln x}.$$
Отсюда следует, что
$$\int_{\gamma_R} \Phi_n(s)x^{-s}ds \longrightarrow 0, \quad \text{при} \;\; x \to 0. \tag{12}$$
Опять же, по лемме 3 имеем
$$\int_{\gamma_R} [\sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma_j^{(n)}}{s+j}]x^{-s}ds \longrightarrow 0, \quad \text{при} \;\; x \to 0. \tag{13}$$

В силу (10), (12) и (13) получаем
$$\int_{\gamma_R} \psi_n(s)x^{-s}ds \longrightarrow 0, \quad \text{при} \;\; x \to 0,$$
что вместе с формулами (6) и (7) дает следующее выражение
$$\lim_{x\to 0+} g^{(n)}(e^{-x}) = (-1)^n\gamma_0^{(n)} = \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Последнее равенство завершает доказательство леммы 4.

Замечание. Как следствие леммы 4 получаем следующее выражение для односторонних производных функции $g(e^{-x})$:

$$\lim_{x\to 0+} g^{(n)}(e^{-x}) = \beta_n = f(-n), \tag{15}$$

которое получается на основании формул (*) и (14).

Лемма 5. *Пусть у степенного ряда (2) существуют конечные радиальные производные вида*

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Тогда функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле (1) аналитически продолжима на комплексную плоскость как целая функция.

Доказательство

Ясно, что существование радиальных производных вида (16) равносильно существованию односторонних производных функции $g(e^{-x})$:

$$\lim_{x\to 0+} g^{(n)}(e^{-x}) = \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Итак, пусть существуют односторонние производные вида (17). Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, будем иметь

$$g(e^{-x}) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \frac{\beta_n}{n!}x^n + R_n(x),$$

где

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = O(1), \quad \text{при} \ \ 0 < x < 1.$$

Заменим интегральное представление для функции $f(s)$

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 g(e^{-x})x^{s-1}dx + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx. \tag{18}$$

Так как

$$\int_1^\infty \left|\sum_{n=1}^\infty a_n e^{-nx}\right| x^{\sigma-1}dx \leqslant \int_1^\infty e^{-x}(\sum_0^\infty e^{-nx})x^{\sigma-1}dx < c,$$

то второе слагаемое в формуле (18) определяет целую функцию.

Рассмотрим первое слагаемое

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 (\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\frac{\beta_n}{n!}x^n)x^{s-1}dx+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x^n}x^{n+s-1}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k}{k!(s+k)}+\varphi(s),$$

где $\varphi(s)$ — функция, регулярноя в полуплоскости $\sigma>-n$. Таким образом, первое слагаемое в (18) определяет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma>-n$. Так как n было произвольным числом, то утверждение леммы 5 полностью доказано.

Доказательство теоремы 1

Пусть степенной ряд $g(z)$ имеет в точке $z=1$ полюс k–го порядка. Тогда при $0<x<\rho$

$$g(e^{-x})\sum_{n=-k}^{\infty}A_n x^n=\sum_{n=-1}^{k}\frac{A_{k-n}}{x^n}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n,$$

где ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n x^n$ сходится в некоторой окрестности нуля.

Рассмотрим интегральное представление

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}g(e^{-x})x^{s-1}dx=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\rho}\sum_{n=-1}^{k}\frac{A_{k-n}}{x^n}x^{s-1}dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\rho}(\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n)x^{s-1}dx+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\rho}^{\infty}g(e^{-x})x^{s-1}dx=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\sum_{n=-1}^{k}\frac{A_{k-n}}{s+n}\rho^{s+n}\right)+f_1(s)+f_2(s). \qquad (19)$$

Здесь функция $g_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n x^n$ имеет в точке $x=0$ конечные радиальные производные любого порядка, и, следовательно, как следует из доказательства леммы 5, функция $f_1(s)$ определяет целую функцию. Как следует из доказательства леммы 5 и функция $f_2(s)$ определяет целую функцию.

Следовательно, функция $f(s)$ продолжима на комплексную плоскость как мероморфная функция с простыми полюсами в точках $s = 1, 2, \dots, k$.

Покажем, что

$$|f(-n)| = O(e^{n \ln n + An}), \tag{20}$$

где A — некоторое положительное число.

В силу замечания к лемме 4

$$f_1(-n) = \lim_{x \to 0+} g_1^{(n)}(x) = \hat{\beta}_n,$$

и в силу того, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\beta}_n}{n!} x^n$ сходится в некоторой окрестности нуля радиуса ρ, и определяет там функцию $g_1(x)$. Условие (20) будет иметь место в случае $A < -\ln \rho + 1$.

Для функции $f_2(s)$ при $\sigma < 0$ и $A < -\ln \rho + 1$ получается следующая оценка

$$|f_2(s)| = \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_{\rho}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-nx}) x^{\sigma - 1} dx \leqslant \frac{c}{|\Gamma(s)|} \rho^{\sigma} \int_{\rho}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\frac{x}{2}} (\frac{x}{\rho})^{\sigma - 1} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{|\Gamma(s)|} \rho^{\sigma} \leqslant \frac{c e^{(A-1)|\sigma|}}{|\Gamma(s)|} \leqslant c_1 e^{|s| \ln |s| + A|s|}.$$

Таким образом, для функции $f(s)$ имеет место оценка вида

$$|f(-n)| = O(e^{n \ln n + An}),$$

где A — некоторая положительная константа, что и завершает доказательство первого утверждения теоремы 1.

Обратно, пусть для функции $f(s)$, определнной рядом Дирихле (1), выполняются условия теоремы 1.

Рассмотрим интегральное представление

$$g(e^{-x}) = \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} f(s) \Gamma(s) x^{-s} ds, \quad \sigma > k.$$

В результате сдвига контура интегрирования до мнимой оси, что возможно в случае роста модуля функции $f(s)$ при $|t| \to \infty$, получаем

$$g(e^{-x}) = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(s)\Gamma(s)x^{-s}dx + \sum_{n=1}^{k} \frac{A_n}{x^n},$$

где второе слагаемое — это сумма вычетов подынтегральной функции в точках $s = 1, 2, \ldots, k$.

Далее, рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 4, показывают, что функция

$$g_1(x) = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(s)\Gamma(s)x^{-s}dx$$

имеет односторонние производные в точке $x = 0$ вида

$$\lim_{x\to 0+} g_1^{(n)}(x) = \hat{\beta}_n.$$

В силу замечания к лемме 4 имеем

$$\hat{\beta}_n = f(-n).$$

Отсюда, в силу ограничения на порядок роста модуля $|f(-n)|$, степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\beta}_n}{n!} x^n$$

сходится в некоторой окрестности нуля.

Таким образом,

$$g(e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\beta}_n}{n!} x^n,$$

где второе слагаемое — это степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля, то есть $g(e^{-x})$ в точке $x = 0$ имеет полюс, порядок которого не выше, чем k. Следовательно, и степенной ряд $g(z)$ в точке $z = 1$ имеет полюс порядка, не выше, чем k, что и завершает доказательство теоремы 1.

Библиографический список

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: ОГНЗ, 1947.

УДК 511.3

В.А. Матвеев

О поведении рядов Дирихле с обобщёнными характерами на оси сходимости.

Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)/n^s, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где $h(n)$ — обобщённый характер Дирихле, т.е. конечнозначная мультипликативная функция натурального аргумента, обладающая свойствами:

- почти для всех простых p выполняется $h(p) \neq 0$;
- сумматорная функция $S(x) = \sum_{n \le x} h(n)$ является ограниченной.

В данной работе изучается задача существования полюсов функции $f(s)$, заданной рядом Дирихле (1), на оси $\sigma = 0$.

Обозначим через $S_t(x)$ сумму вида

$$S_t(x) = \sum_{n \le x} h(n) n^{-it}. \tag{2}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если для любого t сумматорная функция вида (2) удовлетворяет условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 : \forall x > x_0 \; |S_t(x)| < \varepsilon \ln x,$$

то функция $f(s)$ не имеет полюсов на оси $\sigma = 0$.

Доказательство

Допустим противное, т.е. предположим, что функция $f(s)$ имеет полюс в точке $s = it_0$. Покажем, что в этом случае функция $S_{t_0}(x)$ не является ограниченной.

Действительно, функция

$$f_{t_0}(\sigma) = f(\sigma + it_0)$$

будет иметь полюс в точке $\sigma = 0$. Запишем $f_{t_0}(\sigma)$ в виде ряда

$$f_{t_0}(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(n)n^{-it_0}}{n^{\sigma}}, \quad \sigma > 0,$$

и запишем для этой функции известное интегральное представление:

$$f_{t_0}(\sigma) = \sigma \int_1^{+\infty} \frac{S_{t_0}(x)}{x^{\sigma+1}} dx, \quad \sigma > 0.$$

По условию теоремы имеем:

$$|S_{t_0}(x)| < \varepsilon \ln x, \quad x > x_0.$$

Отсюда получим оценку:

$$|f_{t_0}(\sigma)| \le \sigma \int_1^{x_0} \frac{|S_{t_0}(x)|}{x^{\sigma+1}} dx + \sigma \int_{x_0}^{+\infty} \frac{|S_{t_0}(x)|}{x^{\sigma+1}} dx \le$$
$$\le \sigma A(x_0) + \sigma \int_{x_0}^{+\infty} \frac{|S_{t_0}(x)|}{x^{\sigma+1}} dx,$$

где $A(x_0)$ — константа.

Далее, имеем оценку:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{|S_{t_0}(x)|}{x^{\sigma+1}} dx < \varepsilon \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\sigma+1}} dx \le$$
$$\le \varepsilon \sup_{x \ge x_0} \frac{\ln x}{x^{\frac{\sigma}{2}}} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{\sigma}{2}+1}} = \varepsilon \frac{2}{\sigma e} \frac{2}{\sigma x_0^{\frac{\sigma}{2}}}.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\sup_{x\geq 1}\frac{\ln x}{x^{\frac{\sigma}{2}}}$ достигается в точке x_1, такой, что $\ln x_1=\frac{2}{\sigma}$.

Таким образом, мы получили оценку

$$|f_{t_0}(\sigma)|<\sigma A(x_0)+\frac{4\varepsilon}{\sigma e},$$

что противоречит предположению, т.е. условию

$$|f_{t_0}(\sigma)|\sim\frac{1}{\sigma^{\alpha}},\quad \alpha\geq 1,\quad \sigma\to 0.$$

Такоми образом, теорема доказана.

Заметим, что остаётся открытым следующий вопрос: следует ли из условия ограниченности сумматорной функции $S(x)=\sum\limits_{n\leq x}h(n)$ отсутствие полюсов функции $f(s)$, заданной рядом Дирихле вида (1), на оси $\sigma=0$?

Случай характеров Дирихле, возмущённых на конечном множестве простых, позволяет предполагать положительный ответ на поставленный вопрос.

Определение. Пусть χ — характер Дирихле, и пусть $\{p_1,\dots,p_k\}$ — конечное множество простых. *Возмущённым на множестве* $\{p_1,\dots,p_k\}$ *характером* называется конечнозначная мультипликативная функция $\hat{\chi}(n)$ натурального аргумента, такая, что

$$\hat{\chi}(p)=\begin{cases}\chi(p), & p\notin\{p_1,\dots,p_k\},\\ \hat{\chi}(p), & p\in\{p_1,\dots,p_k\},\end{cases}$$

где $\hat{\chi}(p)\neq\chi(p)$ и $\hat{\chi}(p)\neq 0$ для $p\in\{p_1,\dots,p_k\}$.

Ясно, что функция вида

$$\hat{f}(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\hat{\chi}(n)}{n^s},\quad s=\sigma+it$$

имеет бесконечное множество полюсов на оси $\sigma=0$. Действительно, имеет место равенство

$$\hat{f}(s)=\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{\chi(p_i)}{p_i^s})(1-\frac{\hat{\chi}(p_i)}{p_i^s})^{-1}L(s,\chi).$$

В этом случай известно ([1]), что сумматорная функция

$$\hat{S}(x) = \sum_{n \le x} \hat{\chi}(n)$$

является неограниченной.

Отметим, что в работе [1] доказательство неограниченности функции $\hat{S}(x)$ не использует аналитические свойства функции $\hat{f}(x)$, и, в частности, метод контурного интегрирования. Представляет интерес привести аналитическое доказательство неограниченности $\hat{S}(x)$.

В заключение приведём один результат, имеющий отношение к нашей задаче.

Предложение 1. *При $x > x_0$ имеет место оценка*

$$\frac{\max_{n \le x} |S_t(n)|}{\max_{n \le x} |S(n)|} \le C \ln x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Применяя приём суммирования Абеля, получим:

$$|S_t(x)| \le |\sum_{n \le x} h(n) n^{-it}| \le |S([x])[x]^{-it} + |\sum_{n=1}^{[x]=1} S(n)[(n+1)^{-it} - n^{-it}]| \le$$

$$\le |S([x])| + |\sum_{n=1}^{[x]-1} S(x)[(n+1)^{-it} - n^{-it} + it(n+1)^{-(1+it)}]| +$$

$$|\sum_{n=1}^{[x]-1} S(x) it (n+1)^{-(1+it)}| \le\le C_0 \max_{1 \le n \le [x]} |S(n)| +$$

$$+ (\max_{1 \le n \le [x]} |S(n)|) \sum_{n=1}^{[x]-1} \frac{1}{n+1} \le C \ln x (\max_{1 \le n \le [x]} |S(x)|),$$

что и доказывает данное утверждение.

Здесь мы воспользовались тем фактом ([2]), что

$$n^{-it} - (n-1)^{-it} + itn^{-(1+it)} = O(\frac{1}{n^2}).$$

Библиографический список

1. *Бронштейн Б.С.* Неограниченность сумматорной функции одного обобщённого характера // Учёные записки МГУ, 1954. Вып. 165. Т. 7.
2. *Гельфонд О.А.* Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\operatorname{Re} s = 1$ // Изд. АН СССР. Серия матем., 1956. Т. 20.

УДК 517.5

В.А. МАТВЕЕВ, Т.А. КУЗНЕЦОВА

Операторный подход при расчете оболочечных конструкций

Введение

В работе [1] показано, что для достаточно широкого класса нелинейных моделей оболочечных конструкций строится последовательность линейных операторных уравнений вида

$$A_0 w - \varphi_{1,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varphi_{2,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \varphi_{3,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varphi_{4,n}(x,y) \quad (1)$$

в статическом случае и

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\alpha_2 A_0 w + \varphi_{1,n}(t,x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi_{2,n}(t,x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varphi_{3,n}(t,x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + \varphi_{4,n}(t,x,y), \quad t \in [0,T] \quad (2)$$

в динамическом случае, где A_0 — линейный оператор (Δ или Δ^2 в зависимости от использованной нелинейной модели; Δ — оператор Лапласа), $\varphi_{i,k}$ — некоторые функции из пространства $L^2(\Omega)$ в случае (1) или $L^\infty[0,T], L^2(\Omega)$ по соответствующим переменным в случае (2), последовательность решений которых $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в пространстве Соболева к функции прогиба w, которая является решением соответствующей нелинейной модели.

При этом было показано, что такие свойства решений операторных уравнений, как свойство единственности, свойство гладкости в зависимости от гладкости начальных условий в случае (2), скорости сходимости проекционных методов к решению, переносятся на решения соответствующих нелинейных моделей.

Такой подход исследования качественных свойств решений нелинейных моделей оболочечных конструкций получил название операторного подхода. Более детальное изложение этого подхода приведено в [2].

В данной работе рассматриваются вопросы применимости операторного подхода к задаче численного расчета оболочечных конструкций, а именно вопросы связанные с решением операторных уравнений (1) и (2) методом Бубнова-Галеркина и вопросы улучшения сходимости последовательности решений $\{w_n\}$ к решению соответствующей нелинейной модели. Дело в том, что метод Бубнова-Галеркина дает хорошие результаты при решении операторных уравнений (1) и (2) только в случае прямоугольной в плане оболочки.

Но в случае, когда не требуется большая точность вычислений, как указано в работе [3], решение операторных уравнений в случае оболочек произвольной конфигурации сводится к случаю решения операторных уравнений для прямоугольных в плане оболочек.

Что касается улучшения сходимости последовательности решений w_n операторных уравнений, то здесь применимы приемы, разработанные в [4], которые позволяют улучшить сходимость метода В.В. Петрова — метода последовательного нагружения, который находит широкое применение при расчете оболочечных конструкций. Изложение этого метода можно найти в [5].

Отметим, что изложенные в данной работе вопросы, связанные с применением операторного метода к задаче расчета оболочечных конструкций, иллюстрируются на примере геометрически нелинейной статической модели Кармана.

1. Применение операторного подхода при расчете прямоугольных в плане оболочечных конструкций

Рассмотрим геометрически нелинейную модель оболочки — модель Кармана, которая в статическом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - L(w,F) - \Delta_k F = q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k w, \end{cases} \tag{3}$$

где выражение $L(w,F) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ отражает гауссову кривизну деформированной серединной поверхности оболочки Ω, Δ — оператор Лапласа, $\Delta_k = K_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, K_x и K_y характеризуют кривизну поверхности оболочки Ω, q — величина нормальной нагрузки, D и E — величины, характеризующие материал оболочки.

Будем считать, что Ω — прямоугольная в плане поверхность, и граничные условия отвечают либо жесткому, либо шарнирному закреплению краев оболочки. Решение (w,F), где w — функция прогиба, а F — функция усилий, рассматривается в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$.

Представим q в виде $q = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta q_i$, где $\forall i \in \overline{1,N} \quad |\Delta q_i| \ll 1$, и обозначим $q_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta q_i$. При $n = 1$ функции (w,F) находим в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \Delta_k F = q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\Delta_k w \end{cases}$$

Допустим, что мы нашли решение (w_{n-1}, F_{n-1}). Тогда w_n ищется как решение операторного уравнения

$$D\Delta^2 w - \varphi_{1,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varphi_{2,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\varphi_{3,n}(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \varphi_{4,n}(x,y), \tag{4}$$

где

$$\varphi_{1,n} = \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial y^2}, \quad \varphi_{2,n} = \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial x^2},$$
$$\varphi_{3,n} = \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial x \partial y}, \quad \varphi_{4,n} = \Delta_k F_{n-1} + q_n,$$

и где решения (4) удовлетворяют соответствующим нулевым граничным условиям. Функция F_n ищется как решение операторного уравнения вида

$$\frac{1}{E}\Delta F = -\frac{1}{2}L(w_n, w_n) - \Delta_k w_n. \tag{5}$$

В результате возникает последовательность функций $\{w_n\}_{n=1}^{N}$. Отметим, что эта последовательность получается иным способом, чем указано в [1–2]. Но так же как в [1], можно показать, что последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{N}$ сходится в пространстве Соболева к функции прогиба w, определяемой нелинейной системой (3).

Таким образом, решение системы нелинейных уравнений (3) сводится к решению последовательности операторных уравнений (4) и (5). Решение этих уравнений ищется методом Бубнова-Галеркина. Отметим, что эта численная схема решения нелинейной модели (3) более простая, чем численная схема, основанная на методе последовательных нагружений, приведенной в [5].

Здесь, как и в методе последовательных нагружений, встает задача улучшения сходимости последовательности $\{w_n\}$ к функции прогиба w. Приведем здесь один из вариантов решения этой задачи.

Допустим, что построена последовательность $\{\hat{w}_i\}_{i=1}^{n-1}$. Тогда $\hat{w}_n$ строим следующим образом:

$$\hat{w}_n = \frac{\hat{w}_{n-1} + w_n}{2},$$

где w_n находится по указанной выше схеме.

Другим вариантом улучшения сходимости последовательности $\{w_n\}$ может служить построение последовательности $\{\hat{w}_n\}$ по схеме, приведенной в работе [4], для улучшения сходимости метода последовательных нагружений. Но здесь мы не будем на этом останавливаться.

2. Применение операторного подхода при расчете оболочечных конструкций произвольной конфигурации

Рассмотрим случай, когда область Ω является областью произвольной конфигурации. В этом случае начальное решение (w, F) находим, например, методом сеток. Остальные решения (w, F) будем находить с заданной точностью ε методом Бубнова-Галеркина. С этой целью дополним область Ω до прямоугольника с границей Γ. В этом прямоугольнике рассмотрим новую граничную задачу, записанную в операторной форме:

$$a_\varepsilon \Delta^2 w - \varphi_{1,n,\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varphi_{2,n,\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\varphi_{3,n,\varepsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \varphi_{4,n,\varepsilon}, \qquad (6)$$

где

$$a_\varepsilon = \begin{cases} D, & (x,y) \in \Omega, \\ 0, & (x,y) \notin \Omega, \end{cases} \quad \varphi_{i,n,\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} \varphi_{i,n}(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ \frac{1}{\varepsilon^2}, & (x,y) \notin \Omega, \end{cases} i = 1, 2,$$

$$\varphi_{3,n,\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} \varphi_{3,n}(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ 0, & (x,y) \notin \Omega, \end{cases}$$

$$\varphi_{4,n,\varepsilon}(x,y) = \begin{cases} \varphi_{4,n}(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ 0, & (x,y) \notin \Omega, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$w\big|_\Gamma = 0, \frac{\partial w}{\partial \overline{n}}\bigg|_\Gamma = 0 \text{ (в случае жесткого закрепления краев оболочки)} \qquad (7)$$

Как показано в [3], решения $\tilde{w}_n$ операторного уравнения (6) с граничными условиями (7) с точностью до ε приближают в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$ решение w_n соответствующего операторного уравнения в области Ω.

Решение $\tilde{w}_n$ задачи (6)-(7) ищется методом Бубнова-Галеркина.

Библиографический список

1. *Кузнецов В.Н.* Метод последовательного возмущения параметров в приложениях к расчету динамической устойчивости тонкостенных конструкций: Дис.... докт. техн. наук. Саратов, 2000.

2. *Кузнецова Т.А., Кузнецов В.Н.* Ограниченные полугруппы операторов и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004.

3. *Кузнецова Т.А., Баев К.А., Чумакова С.В.* Метод фиктивных областей в теории оболочечных конструкций и его численная реализация // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 4.

4. *Кузнецова Т.А., Чумакова С.В., Шабанов Л.Е.* К вопросу улучшения сходимости метода В.В. Петрова — метода последовательного возмущения параметров // Проблемы прочности элементов конструкций под воздействием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002.

1. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

УДК 511.3

О.А. Матвеева

О граничном поведении степенных рядов с целыми коэффициентами

Рассмотрим степенной ряд

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kf^k,\quad \varlimsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=1, \tag{1}$$

с целыми коэффициентами. В работе [1] доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Степенной ряд* (1) *тогда и только тогда определяет рациональную функцию, полюсы которой лежат в корнях из единицы, когда он определяет функцию, для которой точка $z\equiv 1$ является либо регулярной точкой, либо полюсом k-го порядка.*

В данной работе приводится еще один результат относительного граничного поведения степенных рядов с целыми коэффициентами. В основе этого результата лежит взаимосвязь между граничным поведением степенных рядов и аналитическими свойствами рядов Дирихле с теми же коэффициентами, что и у степенного ряда. А именно, имеет место

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *ряд Дирихле*

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\quad s=\sigma+it,\quad \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1, \tag{2}$$

определяет мероморфную функцию с единственными возможными полюсами в точках $s=1,2,\ldots,k$ и условием роста модуля

$$|f(s)|=O(e^{|s|\ln|s|+A|s|}),$$

где A — некоторая положительная константа;

2. *соответствующий (с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле* (2)*) степенной ряд*

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

определяет функцию, либо регулярную в точке $z = 1$, либо имеющую в этой точке полюс порядка, не выше, чем k.

В работе [2] аналогичный результат доказан в случае, когда ряд Дирихле (1) определяет целую функцию. Доказательство теоремы 2 незначительно отличается от доказательства соответствующего результата работы [2], и мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы.

Как следствие теоремы 1 и теоремы 2 получаем следующий результат:

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

с целыми коэффициентами определяет мероморфную функцию с единственными возможными полюсами в точках $s = 1, 2, \ldots, k$ и условием роста модуля

$$|f(s)| = O(e^{|s|\ln|s| + A|s|}), \tag{3}$$

где A — некоторая положительная константа;

2. *соответствующий степенной ряд*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

определяет рациональную функцию, полюсы которой располагаются в корнях из единицы.

Остановимся на примерах степенных рядов, к которым применима теорема 3. Рассмотрим степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) z^n, \tag{4}$$

где $a(n)$ — число делителей числа n. Известно [3], что

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \tag{5}$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. Так как (например, [4])

$$|\zeta(-2n-1)| > ce^{(2n+1)\ln(2n+1)-B(2n+1)},$$

где B — некоторая положительная константа, а c — произвольная положительная константа, то для ряда Дирихле (5) не выполняется условие (3) теоремы 3. Следовательно, степенной ряд (4) определяет функцию $g(z)$, аналитически непродолжимую за границу единичного круга.

В [5] показано, что в точках

$$z = e^{2\pi \frac{p}{q}},$$

где $p > 0, q > 1$ — различные простые числа, имеет место соотношение

$$\lim_{r \to 1}(1-r)g(z) = \infty. \tag{6}$$

Можно уточнить соотношение (6), но мы не будем здесь на этом останавливаться.

Отметим, что аналогичный факт имеет место для степенных рядов вида

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_k(n) z^n, \quad k \leq 2,$$

где $\hat{c}_k(n)$ означает число способов представить n в виде k множителей (представления, полученные из тех же множителей, но расположенных в другом порядке, считаются различными).

Библиографический список

1. *Carlson F.* Uber Potenzreichen mit ganzzahligen Koeffizienten // Mathemat. Zeitshrift, 1921. V. 9.

2. *В.Н. Кузнецов, Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3.
3. *Е.К. Титчмарш.* Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1953.
4. *А.А. Карацуба.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
5. *Е.К. Титчмарш.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

УДК 513.6

Е.В. КОРОБЧЕНКО, С.И. НЕБАЛУЕВ

Системы Мура-Постникова для толерантных пространств

В статье получен толерантный аналог последовательностей толерантных отображений, которые принято называть последовательностями Мура-Постникова (см. [6]).

Толерантное пространство (Т пространство) — это пара (X, τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — рефлексивное и симметричное отношение, называемое отношением толерантности. Отображение $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$ Т пространств называется толерантным (Т отображением), если из $x_1 \tau x_2$ следует $f(x_1)\theta f(x_2)$.

В гомотопической толерантной теории гомотопические параметры берутся из толерантных отрезков (I_m, ι_m) длин m $(m \in \mathbb{N})$, в которых

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} | \ k = \overline{0, m} \right\}, \ \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \overset{df}{\Longleftrightarrow} |k - l| \leqslant 1.$$

Т отображения $f_0, f_1 : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \theta)$ называются толерантно гомотопными относительно подмножества $A \subset X$, что записывается $f_0 \sim$

$\sim f_1(relA)$, если существуют $n \in \mathbb{N}$ и Т отображение $F : (X \times I_n, \tau \times \iota_n) \longrightarrow (Y, \theta)$ такие, что

$$1)(\forall x \in X)\ F(x,0) = f_0(x),\ F(x,1) = f_1(x),$$

$$2)(\forall x \in A)(\forall k = \overline{0,n})\ F\left(x, \frac{k}{n}\right) = f_0(x).$$

Если $n = 1$, то Т отображение f_0, f_1 называются просто толерантно гомотопными и записываются $f_0 \approx f_1(relA)$, или $f_0 \approx f_1$ при $A = \emptyset$.

К настоящему времени имеется достаточно развитая гомологическая и гомотопическая теория Т пространств (см. [2]).

Гомотопические группы определяются через толерантные сфероиды. Подробности можно найти в работах [1] и [5].

Определение 1. Толерантное пространство (X, τ) называется толерантно стягиваемым, если тождественное отображение $\mathbf{1}_X$ толерантно гомотопно некоторому постоянному отображению X в себя.

Определение 2. Толерантное пространство (X, τ) будем называть толерантно условно стягиваемым, если существует возрастающая последовательность подпространств

$$(X_1, \tau) \subset (X_2, \tau) \subset \ldots \subset (X_k, \tau) \subset \ldots \subset (X, \tau)$$

таких, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X,$$

$(\forall k = \overline{1,\infty})$ (X_k, τ) — толерантно стягиваемое.

Предложение 1. *Если пространство (X, τ) толерантно условно стягиваемо, то все его абсолютные толерантные гомотопические группы тривиальны.*

Определение 3. Всякое толерантное отображение $\omega_m : (I_m, \iota_m) \longrightarrow (X, \tau)$, $m \in \mathbb{N}$, называется толерантным путем (Т путем) в пространстве (X, τ) длины m, соединяющим начало пути $x_0 = \omega_m(0) \in X$ с концом пути $x_m = \omega_m(1) \in X$. Точки $x_k = \omega_m(\frac{k}{m})$, $k = \overline{0, m}$, называется траекторией толерантного пути ω_m. Если $\omega_m(0) = \omega_m(1) = x_0$, то ω_m называется толерантной петлей в точке x_0.

Обозначим через $P(X, x_0)$ — множество Т путей в (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$, а через $\Omega(X, x_0)$ — множество Т петель в точке $x_0 \in X$.

На множестве Т путей $P(X, x_0)$ в пространстве (X, τ) структуру толерантного пространства определим следующим образом.

Определение 4. Пусть $\omega_{m_1}, \omega'_{m_2} \in P(X, x_0)$ — произвольные Т пути пространства (X, τ) с началом в точке $x_0 \in X$, и пусть для определенности $m_2 \geqslant m_1$. Тогда Т пути ω_{m_1} и ω'_{m_2} назовем $\varkappa$-толерантными, если выполняются следующие свойства:

1) $\omega'_{m_2} = \varepsilon_{m_2 - m_1} * \gamma'_{m_1}$, где $\varepsilon_{m_2-m_1}$ — постоянный путь длины $m_2 - m_1$:

$$(\forall k = \overline{0, m_2 - m_1})\ \varepsilon_{m_2 - m_1}(\tfrac{k}{m_2 - m_1}) \equiv x_0,$$

а $\gamma'_{m_1} \in P(X, x_0)$ представляет собой отрезок пути ω'_{m_2}:

$$(\forall k = \overline{0, m_1})\ \gamma'_{m_1}(\tfrac{k}{m_1}) = \omega'_{m_2}(\tfrac{k + m_2 - m_1}{m_2});$$

2) $\omega_{m_1} \approx \gamma'_{m_1}$.

Предложение 2. *Пространство всех Т путей $(P(X, x_0), \varkappa)$ является условно толерантно стягиваемым.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Толерантное отображение*

$$p : (P(X, x_0), \varkappa) \longrightarrow (X, \tau),$$

задаваемое формулой $p(\omega_m) = \omega_m(1)$, является толерантным квазирасслоением, в том смысле, что для любого пространства (Y, θ) и любых толерантных отображений

$$F : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \longrightarrow (X, \tau),\ \overline{f} : (Y, \theta) \longrightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$$

таких, что $(\forall y \in Y)\ F(y,0) = p \circ \overline{f}(y)$, *существует толерантное отображение*

$$\overline{F} : (Y \times I_M, \theta \times \iota_M) \longrightarrow (P(X, x_0), \varkappa)$$

такое, что

$$p \circ \overline{F} = F,\ (\forall y \in Y)\ \overline{F}(y,0) = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{p\circ\overline{f}(y)})_M = \overline{f}(y) * (\varepsilon_{F(y,0)})_M,$$

где $(\varepsilon_{F(y,0)})_M$ *— постоянный* T *путь длины* M *в пространстве* (X, τ), *принимающий тождественно значение* $(\varepsilon_{F(y,0)})_M \left(\frac{k}{M}\right) \equiv F(y,0) \in X$. *При этом квазирасслоение* p *имеет слой* $p^{-1}(x_0) = (\Omega(X, x_0), \varkappa)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Доказательство основано на построении квазинакрывающей функции (см. [4]).

Определение 5. Толерантное пространство (X, τ) назовем n-связным, если оно линейно связное и для всех $i = \overline{1, n}$ гомотопические группы $\pi_i(X) = 0$.

Определение 6. Толерантное расслоение (или квазирасслоение) $p : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ назовем n-связным, если (B, τ) линейно связное, $(E, \overline{\tau})$ n-связное и для всех $i > n$ имеет место изоморфизм

$$p_{\pi_i} : \pi_i(E, x_0) \cong \pi_i(B, b_0),\ x_0 \in p^{-1}(b_0).$$

Для построения n-связного толерантного расслоения над произвольным линейно связным пространством (B, τ) необходим будет следующий результат.

Предложение 3. *Пусть* $((B, \tau), b_0)$ *— произвольное пунктированное линейно связное толерантное пространство, и* n *— произвольное натуральное число. Тогда существует толерантное пространство* (X, τ_X) *такое, что*

1) (B, τ) *— подпространство пространства* (X, τ_X);

2) $\pi_n(X, b_0) = 0$;

3) $(\forall q < n)\ i_{\pi_q} : \pi_q(B, b_0) \cong \pi_q(X, b_0)$, *где* $i : (B, \tau) \hookrightarrow (X, \tau_X)$ *— отображение вложения.*

Доказательство

Зафиксируем какую-либо систему A образующих в группе $\pi_n(B, b_0)$. Для каждого элемента $[\alpha] \in A$ выберем ровно по одному представителю $\alpha \in [\alpha]$. Обозначим множество этих представителей той же буквой A. Для упрощения обозначений (и без ущерба для общности) можем считать, что все Т сфероиды $\alpha \in A$ имеют один и тот же размер $\overline{m} = (m, \ldots, m)$. Для каждого элемента $\alpha \in A$ возьмем по одному экземпляру Т куба $(I_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)}(\alpha)) = (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)})$. В каждом из этих Т кубов все точки границы $\partial I_m^{(n)}(\alpha)$ склеим в одну точку O_α, сохранив толерантность этой точки со всеми точками

$$\iota_m^{(n)}(\alpha) < \partial I_m^{(n)}(\alpha) > \backslash \partial I_m^{(n)}(\alpha),$$

то есть со всеми точками, которые были толерантны точкам границы. Получившееся пространство обозначим через $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмем еще по одному элементу $x_\alpha \notin B \cup \bigcup\limits_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha)$. Определим толерантное пространство (X, τ_X) с базисным множеством

$$X \overset{df}{=} B \cup \bigcup_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha) \cup \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\alpha\},$$

и отношением толерантности τ_X таким, что

$$(\forall b_1, b_2 \in B)\ b_1 \tau_X b_2 \Longleftrightarrow b_1 \tau b_2;$$

$$\left(\forall Q = \left(\frac{k_i(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}} \in S_m^{(n)}(\alpha)\right) \quad \tau_X < Q >=$$

$$= \left\{ \alpha\left(\left(\tfrac{k_i'(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}}\right), \left(\tfrac{k_i'(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}} \,\middle|\, |k_i'(\alpha) - k_i(\alpha)| \leqslant 1,\ i = \overline{1,n} \right\} \cup \{x_\alpha\}. \tag{1}$$

При этом в (1) и далее действует соглашение:

$$\left((\exists i = \overline{1,n})\ \ k_i(\alpha) \in \{0, m\}\right) \Longrightarrow \left(\tfrac{k_i(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}} = O_\alpha.$$

Заметим, что из (1) следует

$$\tau_X < x_\alpha >= S_m^{(n)}(\alpha) \cup \{x_\alpha\}. \tag{2}$$

Таким образом, (B, τ) и $\{(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})\}_{\alpha \in A}$ — подпространства в (X, τ_X).

Рассмотрим произвольный элемент $[\beta] \in \pi_q(X, B, x_0)$ и его произвольный представитель — относительный Т сфероид

$$\beta_p : (I_p^{(q)}, I_p^{(q-1)}, J_p^{(q-1)}) \longrightarrow (X, B, b_0),\ 1 \leqslant q \leqslant n.$$

Наша ближайшая цель — показать, что в классе $[\beta]$ найдется представитель, т.е. относительный Т сфероид, толерантно гомотопный Т сфероиду β, все значения которого лежат в B. Но сначала покажем, что в классе $[\beta]$ найдутся представители β_p такие, что для всех $\alpha \in A$ $x_\alpha \notin \operatorname{im} \beta_p$. Предположим, что $(\exists \alpha \in A)$ $x_\alpha \in \operatorname{im} \beta_p$. Т куб $I_p^{(q)}$ состоит из простых Т кубов, представляющих набор соседних, толерантных между собой, вершин. Для этих простых Т кубов договоримся в кратком обозначении: $\omega_p^{(q)}(\overline{k}) \left\{ (\frac{k_i+\varepsilon_i}{p})_{i=\overline{1,q}} | \varepsilon_i = \overline{0,1}, i = \overline{1,q} \right\} \subset I_p^{(q)}, \overline{k} = (k_1, \ldots, k_q), k_i = \overline{0,p}, i = \overline{1,q}.$

Заметим, что $\omega_p^{(q)}(\overline{k})$ — классы толерантности пространства $(I_p^{(q)}, \iota_p^{(q)})$. Будем обозначать через $\omega_p^{(t)}(\overline{k}')$ грани размерностей $t \leqslant q$ кубов $\omega_p^{(q)}(\overline{k})$. Определим вспомогательные подмножества простых Т кубов и их точек:

$$U_p^0 = \{\omega_p^{(q)}(\overline{k}) | k_i = \overline{0,p}, i = \overline{1,q}, x_\alpha \in \beta_p(\omega_p^{(q)}(\overline{k}))\},\ U_p = \bigcup_{\omega_p^{(q)}(\overline{k}) \in U_p^0} \omega_p^{(q)}(\overline{k}),$$

$$V_p^0 = \{\omega_p^{(q)}(\overline{k}) | k_i = \overline{0,p}, i = \overline{1,q}, x_\alpha \notin \beta_p(\omega_p^{(q)}(\overline{k}))\},\ V_p = \bigcup_{\omega_p^{(q)}(\overline{k}) \in V_p^0} \omega_p^{(q)}(\overline{k}).$$

В наших предположениях U_p и V_p — это непустые подмножества в $I_p^{(q)}$. Так же очевидно, что непустым будет и их пересечение $W_p \overset{df}{=} U_p \cap V_p$. Из определения отношения τ_X следует, что

$$\beta_p(W_p) \subset S_m^{(n)}(\alpha), \tag{3}$$

и при этом W_p состоит из точек простых Т кубов размерности $(q-1)$, являющихся $(q-1)$-мерными гранями кубов из U_p^0 и V_p^0. Обозначим это множество $(q-1)$-мерных кубов через W_p^0. Из определения отношения τ_X (см. (2)) следует, что замена всех значений $\beta_p(U_p\backslash W_p)$ на x_α дает новый относительный T сфероид просто гомотопный исходному β. Это позволяет без ущерба для общности считать, что

$$\beta_p|(U_p\backslash W_p) \equiv x_\alpha. \tag{4}$$

Обозначим через U' топологическое подпространство q-мерного куба $I^q = [0,1]^q$, состоящее из топологических кубов $\omega'^{(q)}(\overline{k})$, натянутых (в смысле выпуклой линейной оболочки) на точки T кубов $\omega_p^{(q)}(\overline{k}) \in U_p^0$. Тогда U' — q-мерный полиэдр. $(q-1)$-мерные топологические кубы, натянутые на T кубы из W_p^0, образуют $(q-1)$-мерный полиэдр $W' \subset U'$. Таким образом, имеем полиэдральную пару (U', W').

Действуя аналогично предыдущему, по толерантному пространству $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$ построим топологическое пространство $S'^{(n)}(\alpha)$, склеенное из евклидовых кубов, натянутых на простые T кубы пространства $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$ (часть этих кубов вырождается в "пирамиды", если они содержат точку O_α). На рис. 1 пространство $S'^{(n)}(\alpha)$ изображено схематически для $n = 2$.

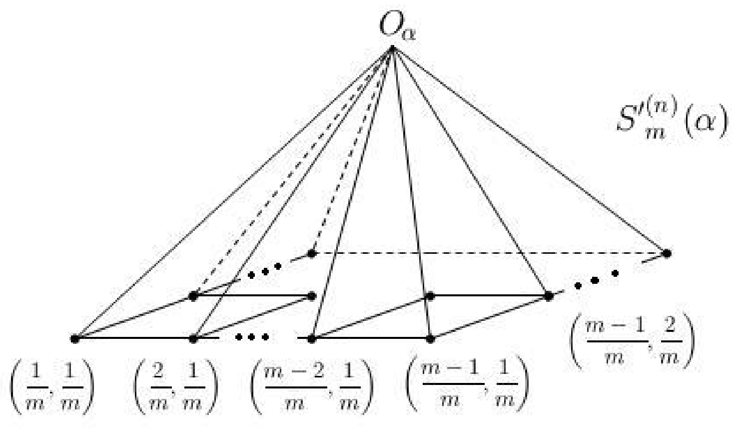


Рис.1

Пространство $S'^{(n)}_m(\alpha)$ гомеоморфно топологической сфере S^n.

Для каждого $(q-1)$-мерного простого T куба $\omega_p^{(q-1)}(\overline{k}) \in W_p^0$ точки образа $\beta_p(\omega_p^{(q-1)}(\overline{k}))$, ввиду (3) и толерантности β_p, являются подмножествами простых T кубов в $S_m^{(n)}(\alpha)$ (или T кубов, вырожденных в "пирамиды", если $O_\alpha \in \beta_p(\omega_p^{(q-1)}(\overline{k}))$. По линейности эти отображения продолжаются до непрерывных отображений, натянутых на них топологических кубов $\beta' : \omega'^{q-1}(\overline{k}) \longrightarrow S'^{(n)}(\alpha)$. Эти непрерывные отображения согласованы на границах кубов, и поэтому склеиваются в непрерывное отображение $\beta' : W' \longrightarrow S'^{(n)}(\alpha)$. Поскольку топологическое пространство $W' \subset I^q$ представляет собой $(q-1)$-мерный полиэдр с $q \leqslant n$, то его n-мерные когомологии тривиальны $H^n(W') = 0$, что позволяет воспользоваться теоремой Хопфа о распространении (см. [7], гл. II, п. 8, теорема P^n), из которой следует существование непрерывного отображения $\beta'' : U' \longrightarrow S'^{(n)}(\alpha)$, продолжающего β', т.е. $\beta''|W' = \beta'|W'$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\beta''|W_p = \beta'|W_p = \beta_p|W_p \tag{5}$$

Возьмем теперь произвольное натуральное число d и рассмотрим d-кратное двойное замедление

$$\beta_P^\sim : (I_P^{(q)}, I_P^{(q-1)}, J_P^{(q-1)}) \longrightarrow (X, B, b_0),\ P = 2^d \cdot p,$$

Т сфероида β_p. Т куб $I_P^{(q)}$ получается из $I_p^{(q)}$ разбиением всех его простых Т кубов, имеющих длину ребра $\frac{1}{p}$, на простые Т кубы с длиной ребра $\frac{1}{2^d \cdot p}$. Назовем эту процедуру 2^d-измельчением. Обозначим через U_P и W_P результат 2^d-измельчения, примененного к U_p и W_p соответственно.

Пространство $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$ по определению получается из $(I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)})$ склейкой всех точек из $\partial I_m^{(n)}$ в одну точку O_α. Отображение склейки

$$\sigma_m : (I_m^{(n)}, \iota_m^{(n)}) \longrightarrow (S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$$

является Т сфероидом в пространстве $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$ с отмеченной точкой O_α. Возьмем его d-кратное двойное замедление

$$\sigma_M^\sim : (I_M^{(n)}, \iota_M^{(n)}) \longrightarrow (S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)}),\ M = 2^d \cdot m.$$

Толерантное отображение $\sigma_M^\sim$ определяет отображение

$$\sigma_{M,m} : (S_M^{(n)}(\alpha), \iota_M^{(n)}) \longrightarrow (S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)}),$$

делающее коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} I_M^{(n)} \arrow[r, "\sigma_m^{\sim}"] & S_m^{(n)}(\alpha) \arrow[dl, "\sigma_{M,m}"] \\ S_M^{(n)}(\alpha) \arrow[u, "\sigma_M"] & \end{tikzcd}$$

Топологическое пространство $S'^{(n)}(\alpha)$ с помощью вложенного в него толерантного пространства $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$ разбивается на евклидовы кубы (и "пирамиды") с вершинами из $S_m^{(n)}(\alpha) = (I_m^{(n)} \backslash \partial I_m^{(n)}) \cup \{O_\alpha\}$. Пусть $l_{\max}$ и $l_{\min}$ — максимальная и минимальная длины ребер этих кубов (и "пирамид") при представлении пространства $S'^{(n)}(\alpha)$, изображенном на рис. 1. Выполняя процеуру 2^d-измельчения всех кубов в $I_m^{(n)}$, получим измельченное разбиение топологического пространства $S'^{(n)}(\alpha)$ на кубы (и "пирамиды") с максимальной длиной ребер $l_{\max}/2^d$, которая может быть сделана сколь угодно малой при возрастании d. В результате получаем вложение точек толерантного пространства $S_M^{(n)}(\alpha)$ в топологическое пространство $S'^{(n)}(\alpha)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) все точки $S_M^{(n)}(\alpha)$, попадающие в кубическую область, с длиной ребер, не превосходящей $l_{\min}$, при отображении $\sigma_{M,m}$ отображаются в толерантные между собой точки пространства $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$;

(ii)
$$\sigma_{M,m} \circ \beta' | (W_p) = \beta_P^{\sim} | (W_P) \tag{6}$$

Свойство (i) легко следует из свойств двойного замедления. Проверим свойство (ii). Так как W_P является результатом применения процедуры 2^d-измельчения к W_p, то по определению W' имеем $W_P \subset W'$. Способ построения β' на W' показывает, что $\beta'(W_P)$ получается 2^d-измельчением из $\beta'(W_p) = \beta(W_p)$. Поэтому применение к $\beta'(W_P)$ отображения $\sigma_{M,m}$ дает отображение $\sigma_{M,m} \circ \beta'$ на W_P, удовлетворяющее (6).

Формула (5) и приведенные в предыдущем абзаце рассуждения показывают, что имеет место свойство

$$\beta''(W_P) = \beta'(W_P) \subset S_M^{(n)}(\alpha) \subset S'^{(n)}(\alpha), \tag{7}$$

которое может нарушаться на всем U_P, т.е. $\beta''(U_P)\not\subset S_M^{(n)}(\alpha)$. В этом случае отображение β'' следует переопределить там, где включение нарушается. Сделать это можно небольшим движением в пределах куба, натянутого на простые кубы из $S_M^{(n)}(\alpha)$. Искомое отображение обозначим следующим образом: $\beta''_P : U_P \longrightarrow S_M^{(n)}(\alpha)$. Если точка $Q = \left(\frac{k_i}{P}\right)_{i=\overline{1,q}} \in U_p$ такова, что $\beta''(Q) \in S_M^{(n)}(\alpha)$, то полагаем $\beta''_P(Q) \overset{df}{=} \beta''(Q)$. Если же $\beta''_P(Q) \notin S_M^{(n)}(\alpha)$, тогда в разбиении пространства $S'^{(n)}(\alpha)$ на кубы с вершинами в $S_M^{(n)}(\alpha)$ возьмем куб ω' минимальной размерности, чьи внутренние точки содержат $\beta''(Q)$, т.е. $\beta''(Q) \in Int\, \omega'$ (такой куб ω' существует, однозначно определен, и его размерность больше нуля). Зафиксируем в этом кубе ω' любую его вершину $R \in S_M^{(n)}(\alpha)$, и положим $\beta''_P(Q) \overset{df}{=} R$. Определенное таким образом отображение $\beta''_P : U_P \longrightarrow S_M^{(n)}(\alpha)$ по построению обладает свойством (см. (7)):

$$\beta''_P|(W_P) = \beta''|(W_P) = \beta'|(W_P) \tag{8}$$

Поскольку непрерывное отображение β'' на компактном множестве $U' \subset I^q \subset \mathbb{R}^q$ является равномерно непрерывным, то можно выбрать достаточно большое d так, чтобы точки любого простого куба $\omega \subset U_P$ имели бы значения $\beta''_P(\omega)$, лежащие в прямоугольной области с размером ребер не превосходящим $l_{\min}$. Тогда по свойству (i) отображение $\sigma_{M,m}\circ\beta''_P$, определенное на толерантном подпространстве $(U_P, \iota_P^{(q)}) \subset (I_P^{(q)}, \iota_P^{(q)})$ со значениями в $(S_m^{(n)}(\alpha), \iota_m^{(n)})$, является толерантным. Из свойств (8) и (6) следует, что

$$\sigma_{M,m} \circ \beta''_P|(W_P) = \beta^{\sim}_P|(W_P). \tag{9}$$

Согласно свойствам двойного замедления имеем толерантную гомотопность T сфероидов (см. [1])

$$\beta_p \underset{B}{\simeq} \beta^{\sim}_P \tag{10}$$

Как уже отмечалось выше (см. (4)), замена всех значений $\beta^{\sim}_P(U_P\backslash W_P)$ одним значнием x_α дает новый относительный T сфероид β^*_P, просто гомотопный исходному:

$$\beta_P^* \approx \beta_P^{\sim}. \tag{11}$$

Определим новое отображение $\gamma_P : I_P^{(q)} \longrightarrow X$ формулой

$$\gamma_P(Q) = \begin{cases} \beta_P^*(Q), \ Q \notin U_P; \\ \sigma_{M,m} \circ \beta_P''(Q), \ Q \in U_P. \end{cases} \tag{12}$$

Тот факт, что β — относительный Т сфероид, толерантность отображения $\sigma_{M,m} \circ \beta_P''$ на U_P, и свойство (9) показывают, что γ_P — относительный Т сфероид. С помощью (2) легко проверяется простая Т гомотопность.

$$\gamma_P \approx \beta_P^*. \tag{13}$$

Из (10), (11), (12) следует, что $[\beta_p] = [\gamma_P]$, а из (12) получается, что значения Т сфероида γ_P не содержат элемента x_α. Отсюда, ввиду произвольности $\alpha \in A$, следует, что в классе $[\beta_p] \in \pi_q(X, B, b_0)$ имеется представитель $\gamma_P \in [\beta_p]$ такой, что

$$\gamma_P : (I_P^{(q)}, I_P^{(q-1)}, J_P^{(q-1)}) \longrightarrow (B \cup \bigcup_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha), B, b_0).$$

Определим отображение $r : B \cup \bigcup_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha) \longrightarrow B$ формулой

$$r(Q) = \begin{cases} Q, \ Q \in B; \\ \alpha\left(\left(\frac{k_i(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}}\right), \ Q = \left(\frac{k_i(\alpha)}{m}\right)_{i=\overline{1,n}} \in S_m^{(n)}(\alpha). \end{cases}$$

С помощью (1) легко проверяется, что r — толерантное отображение, и что

$$r \approx \mathbf{1}_{B \cup \bigcup_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$r \circ \gamma_P \approx \mathbf{1}_{B \cup \bigcup_{\alpha \in A} S_m^{(n)}(\alpha)} \circ \gamma_P = \gamma_P.$$

Это значит, что в классе $[\beta_p] = [\gamma_P]$ имеется относительный Т сфероид $r \circ \gamma_P$ такой, что $r \circ \gamma_P : (I_P^{(q)}, I_P^{(q-1)}, J_P^{(q-1)}) \longrightarrow (B, B, b_0)$. Отсюда, применяя теорему 5 работы [3], получаем $[\beta_p] = [r \circ \gamma_P] = [\varepsilon_{b_0}]$ —нейтральный элемент группы $\pi_q(X, B, b_0)$. Т.о., мы доказали, что

$$(\forall q = \overline{1, n})\ \pi_q(X, B, b_0) = 0. \tag{14}$$

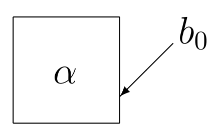
Для пары толерантных пространств $(B, \tau) \subset (X, \tau_X)$ имеются фрагменты точной гомотопической последовательности (см. [3], теорема 7) следующего вида:

$$\pi_{s+1}(X, B, b_0) \to \pi_s(B, b_0) \to \pi_s(X, b_0) \to \pi_s(X, B, b_0) \to \pi_{s-1}(B, b_0) \to \tag{15}$$

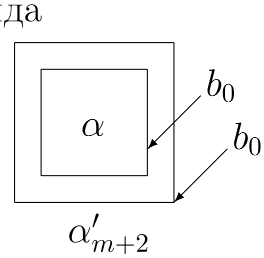
Точность последовательности (15) и (14) доказывают свойство 3):

$$(\forall q = \overline{1, n-1})\ i_{\pi_q} : \pi_q(B, b_0) \cong \pi_q(X, b_0),$$

и одновременно показывают сюрьективность гомоморфизма $i_{\pi_n} : \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_n(X, b_0)$. Рассмотрим $i_{\pi_n}([\alpha]_B) = [i \circ \alpha] = [\alpha]_X$, где в правой части α рассматривается как Т сфероид в (X, τ_X). Чтобы упростить дальнейшие выкладки воспользуемся тем, что Т сфероид можно представить в виде многомерной кубической таблицы своих значений. Изобразим условно (в предположении $n = 2$) таблицу значений Т сфероида α в виде квадрата

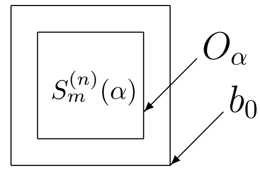


на границе которого все значения тождественно равны b_0. Этот сфероид по определению гомотопности Т сфероидов будет гомотопен Т сфероиду α'_{m+2} размера $m + 2$ следующего вида



$$\alpha'_{m+2} \simeq \alpha.$$

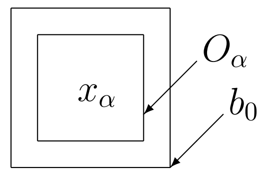
С помощью (1) легко проверяется, что Т сфероид α'_{m+2} будет просто гомотопен Т сфероиду α''_{m+2} вида



α''_{m+2}

$$\alpha''_{m+2} \approx \alpha'_{m+2}(rel\ \partial I^{(n)}_{m+2}).$$

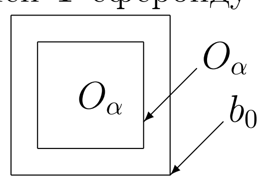
Опять же, с помощью (1) убеждаемся, что Т сфероид α''_{m+2} просто гомотопен Т сфероиду α'''_{m+2} вида



α'''_{m+2}

$$\alpha'''_{m+2} \approx \alpha''_{m+2}(rel\ \partial I^{(n)}_{m+2}),$$

где все значения внутри внутреннего квадрата тождественно равны x_α. Т сфероид α'''_{m+2} просто гомотопен Т сфероиду α^{IV}_{m+2}



α^{IV}_{m+2}

$$\alpha^{IV}_{m+2} \approx \alpha'''_{m+2},$$

который в свою очередь просто гомотопен постоянному: $\alpha^{IV}_{m+2} \approx (\varepsilon_{b_0})^{(n)}_{m+2}$. Тем самым, доказано, что $i_{\pi_n}([\alpha]) = [\varepsilon_{b_0}]$ — нейтральный элемент в группе $\pi_n(X, b_0)$. Это значит, что i_{π_n} — тривиальный (нулевой) гомоморфизм, так как элементы $[\alpha] \in A$ порождают всю группу $\pi_n(B, b_0)$. Отсюда, ввиду сюрьективности i_{π_n}, получаем, что $\pi_n(X, b_0) = 0$.

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Для произвольного пунктированного линейно связного толерантного пространства* $((B,\tau), b_0)$ *и произвольного* $n \in \mathbb{N}$ *существует пространство* (X, τ_X) *такое, что*

1) (B,τ) *— подпространство пространства* (X, τ_X)*;*

2) $(\forall q > n)\ \pi_q(X, b_0) = 0$*;*

3) $(\forall q = \overline{1, n})\ i_{\pi_q} : \pi_q(B, b_0) \cong \pi_q(X, b_0)$*, где* $i : (B,\tau) \hookrightarrow (X, \tau_X))$ *— вложение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

В предложении 3 в качестве фиксированного натурального числа возьмем $n+1$. Тогда существует пространство (X_1, τ_{X_1}), имеющее (B, τ) в качестве подпространства, такое что $\pi_{n+1}(X, b_0) = 0$ и

$$(\forall q = \overline{1, n})\ (i_1)_{\pi_q} : \pi_q(X_1, b_0) \cong \pi_q(B, b_0),\ \text{где } i_1 : (B, \tau) \hookrightarrow (X_1, \tau_{X_1}).$$

Теперь в предложении 3 в качестве (B, τ) возьмем (X_1, τ_{X_1}), а вместо n число $n+2$. Тогда существует простарнство (X_2, τ_{X_2}), имеющее (X_1, τ_{X_1}) в качестве подпространства, и такое, что $\pi_{n+2}(X_2, b_0) = 0$ и

$$(\forall q = \overline{1, n+1})\ (i_2)_{\pi_q} : \pi_q(X_1, b_0) \cong \pi_q(X_2, b_0),\ \text{где } i_2 : (X_1, \tau_{X_1}) \hookrightarrow (X_2, \tau_{X_2}).$$

Продолжая эти построения, получим последовательность толерантных пространств $\{(X_r, \tau_{X_r})\}_{r=\overline{0,\infty}}$ таких, что

(i) $(X_0, \tau_{X_0}) = (B, \tau)$;

(ii) $(\forall r \geqslant 1)\ (X_{r-1}, \tau_{X_{r-1}})$ — подпространство в (X_r, τ_{X_r});

(iii) $(\forall r \geqslant 1)\ \pi_{n+r}(X_r, b_0) = 0$;

(iv) $\forall q = \overline{1, n+r-1}\ (i_r)_{\pi_q} : \pi_q(X_{r-1}, b_0) \cong \pi_q(X_r, b_0)$,
$i_r : (X_{r-1}, \tau_{X_{r-1}}) \hookrightarrow (X_r, \tau_{X_r})$.

Рассмотрим $X = \bigcup\limits_{r \geqslant 0} X_r$, и определим толерантность $\tau_X \subset X \times X$:

$$x_1 \tau_X x_2 \overset{df}{\iff} (\exists r \geqslant 0)\ x_1, x_2 \in X_r,\ x_1 \tau_{X_r} x_2.$$

Это определение показывает, что все (X_r, τ_{X_r}) — подпространства в (X, τ_X). Вложения $j_r : (X_r, \tau_{X_r}) \hookrightarrow (X, \tau_X)$ индуцируют гомоморфизм

$$(j_r)_{\pi_q} : \pi_q(X_r, b_0) \longrightarrow \pi_q(X, b_0).$$

Покажем, что для $q < n + r$ эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Пусть $[\alpha_m]_X \in \pi_q(X, b_0)$ и $\alpha_m : (I_m^{(q)}, \partial I_m^{(q)}) \longrightarrow (X, b_0)$ — Т сфероид в пространстве (X, τ_X). Так как $\alpha_m(I_m^{(q)})$ — конечное множество, то найдется $s \geqslant 0$ такое, что $\alpha_m(I_m^{(q)}) \subset X_{r+s}$, т.е. α_m можно рассматривать как Т сфероид в пространстве $(X_{r+s}, \tau_{X_{r+s}})$, определяющий элемент $[\alpha_m]_{X_{r+s}} \in \pi_q(X_{r+s}, b_0)$ такой, что $(j_{r+s})_{\pi_q}\left([\alpha_m]_{X_{r+s}}\right) = [\alpha_m]_X$.

Функториальные свойства гомотопических групп и свойство (iv) показывают, что вложение $i_{r,r+s} \overset{df}{=} i_{r+s} \circ \ldots \circ i_{r+1} : (X_r, \tau_{X_r}) \hookrightarrow (X_{r+s}, \tau_{X_{r+s}})$ при $q < n + r$ индуцирует изоморфизмы

$$(i_{r,r+s})_{\pi_q} = (i_{r+s})_{\pi_q} \circ \ldots \circ (i_{r+1})_{\pi_q} : \pi_q(X_r, b_0) \cong \pi_q(X_{r+s}, b_0). \tag{16}$$

Следовательно, существует $[\beta]_{X_r} \in \pi_q(X_r, b_0)$, для которого

$$(i_{r,r+s})_{\pi_q}([\beta]_{X_r}) = [\alpha_m]_{X_{r+s}}.$$

Отсюда следует, что

$$(j_r)_{\pi_q}([\beta]_{X_r}) = (j_{r+s} \circ i_{r,r+s})_{\pi_q}([\beta]_{X_r}) = (j_{r+s})_{\pi_q}((i_{r,r+s})_{\pi_q}([\beta]_{X_r})) =$$

$$= (j_{r+s})_{\pi_q}([\alpha_m]_{X_{r+s}}) = [\alpha_m]_X.$$

Тем самым доказана сюрьективность гомоморфизмов $(j_r)_{\pi_q}$, $q < n + r$.

Пусть теперь $[\alpha_m]_{X_r} \in \pi_q(X_r, b_0)$ и $(j_r)_{\pi_q}([\alpha_m]) = [(\varepsilon_{b_0})_m^{(q)}] = 0$ в группе $\pi_q(X, b_0)$. Отсюда заключаем, что без ущерба для общности можно считать, что у Т сфероидов α_m и ε_{b_0} одинаковый размер $\overline{m} = (m, \ldots, m)$ и существует толерантное отображение $F : (I_m^{(q)} \times I_N, \iota_m^{(q)} \times \iota_N) \longrightarrow (X, \tau_X)$ такое, что

$$(\forall l = \overline{0, N})\ F|\left(I_m^{(q)} \times \left\{\frac{l}{N}\right\}\right) \text{ — Т сфероид в } ((X, \tau_X), b_0);$$

$$F|(I_m^{(q)} \times \{0\}) = \alpha_m,\ F|(I_m^{(q)} \times \{1\}) = (\varepsilon_{b_0})_m^{(q)}.$$

Так как $F(I_m^{(q)} \times I_N)$ — конечное множество, то существует $s \geqslant 0$ такое, что $F(I_m^{(q)} \times I_N) \subset X_{r+s}$. Отсюда следует, что для вложения $i_{r,r+s} : X_r \hookrightarrow X_{r+s}$ имеем $(i_{r,r+s})_{\pi_q}([\alpha_m]_{X_r}) = [(\varepsilon_{b_0})_m^{(q)}]_{X_{r+s}}$ — нулевой элемент в группе $\pi_q(X_{r+s}, b_0)$. Но так как $(i_{r,r+s})_{\pi_q}$ — изоморфизм (см. (16)), то $[\alpha_m]$ — нулевой элемент в группе $\pi_q(X_r, b_0)$, $q < n + r$, что доказывает инъективность $(j_r)_{\pi_q}$ при $q < n + r$, а значит и изоморфность:

$$(j_r)_{\pi_q} : \pi_q(X_r, b_0) \cong \pi_q(X, b_0),\ q < n + r. \tag{17}$$

Пусть $q > n$, возьмем $r \overset{df}{=} (q - n) + 1$, т.е. $q = n + r - 1 < n + r$. Отсюда, применяя (17), (iv) и (iii), получаем свойство 2):

$$\pi_q(X, b_0) \cong \pi_q(X_r, b_0) \cong \pi_q(X_{r-1}, b_0) = \pi_{n+(r-1)}(X_{r-1}, b_0) = 0.$$

Если же $q \leqslant n$, то, взяв $r = 1$, и воспользовавшись (17), (iv) и (i), получим свойство 3):

$$\pi_q(X, b_0) \cong \pi_q(X_1, b_0) \cong \pi_q(X_0, b_0) = \pi_q(B, b_0).$$

Предложение 4 доказано.

Пусть теперь (X, τ) — произвольное толерантное пространство с отмеченной точкой $b_0 \in X$, $(P(X, b_0), \varkappa_X)$ — пространство Т путей пространства (X, τ) с началом в точке b_0. Согласно теореме 1, толерантное отображение

$$p : (P(X, b_0), \varkappa_X) \longrightarrow (X, \tau),\ p(\omega_m) = \omega_m(1),$$

является толерантным квазирасслоением, чьим слоем над точкой b_0 является пространство Т петель

$$p^{-1}(b_0) = (\Omega(X, b_0), \varkappa_X)$$

с отмеченной точкой $\varepsilon_1 \in \Omega(X, b_0) \subset P(X, b_0)$, где ε_1 — тривиальная петля в точке b_0 единичной длины.

Пусть (B, τ) — подпространство в (X, τ), содержащее отмеченную точку $b_0 \in B$. Обозначим через $(P(X, B, b_0), \varkappa_X)$ — подпространство в $(P(X, b_0), \varkappa_X)$ такое, что

$$P(X, B, b_0) = \{\omega_m \in P(X, b_0) | p(\omega_m) = \omega_m(1) \in B\}.$$

Легко видеть, что отображение

$$p_B = p|P(X,B,b_0) : (P(X,B,b_0), \varkappa_X) \longrightarrow (B,\tau)$$

является толерантным. Далее заметим, что в доказательстве теоремы 1 главным пунктом является построение квазинакрывающей функции, которое допускает замену $\omega_M \in P'_M(X)$ на $\omega_M \in P'_M(B)$. Это значит, что отображение p_B является толерантным квазирасслоением со слоем

$$p^{-1}(b_0) = (\Omega(X,b_0), \varkappa_X),$$

с отмеченной точкой $\varepsilon_1 \in \Omega(X,b_0) \subset P(X,B,b_0)$.

Теорема 2. *Для любого линейно связного пространства (B,τ) и любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ существует n-связное толерантное квазирасслоение $p : (E,\overline{\tau}) \longrightarrow (B,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выберем точку $b_0 \in B$ и рассмотрим пространство (X,τ_X), удовлетворяющее свойствам 1)-3) предложения 4. Как было отмечено выше, имеются два толерантных квазирасслоения

$$p : (P(X,b_0), \varkappa_X) \longrightarrow (X,\tau_X) \text{ и } p_B : (P(X,B,b_0), \varkappa_X) \longrightarrow (B,\tau)$$

с одним и тем же слоем $p^{-1}(b_0) = p_B^{-1}(b_0) = (\Omega(X,b_0), \varkappa_X)$ и одной отмеченной точкой $\varepsilon_1 \in \Omega(X,b_0)$. Точные гомотопические последовательности этих толерантных квазирасслоений (см. [5], теорема 2) дают следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_q(P(X,B,b_0),\varepsilon_1) \arrow[r, "(p_B)_{\pi_q}"] \arrow[d, "j_{\pi_q}"] & \pi_q(B,b_0) \arrow[dr, "\partial'_q"] \arrow[d, "i_{\pi_q}"] & \\
\ldots\pi_q(\Omega(X,b_0),\varepsilon_1) \arrow[ur, "(k_B)_{\pi_q}"] \arrow[dr, "(k)_{\pi_q}"'] & & & \pi_{q-1}(\Omega(X,b_0),\varepsilon_1)\ldots \\
 & \pi_q(P(X,b_0),\varepsilon_1) \arrow[r, "p_{\pi_q}"] & \pi_q(X,b_0) \arrow[ur, "\partial_q"'] &
\end{tikzcd} \tag{18}$$

где i, j, k, k_B — вложения, ∂_q и ∂'_q — связующие гомоморфизмы гомотопических последовательностей. Согласно предложению 2 пространство $(P(X,b_0), \varkappa_X)$ является условно толерантно стягиваемым. Отсюда по предложению 1 получаем, что

$$(\forall q > 0)\ \pi_q(P(X, b_0), \varepsilon_1) = 0. \tag{19}$$

Из (19) и (18) следует, что

$$(\forall q > 0)\ \partial_q : \pi_q(X, b_0) \cong \pi_{q-1}(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1). \tag{20}$$

Для $q > n$, с помощью (20) и свойства 2) предложения 4, получаем

$$\pi_q(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1) \cong \pi_{q+1}(X, b_0) = 0,\ \ \pi_{q-1}(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1) \cong \pi_q(X, b_0) = 0. \tag{21}$$

Из (21) и (18) следует, что

$$(\forall q > n)\ (p_B)_{\pi_q} : \pi_q(P(X, B, b_0), \varepsilon_1) \cong \pi_q(B, b_0). \tag{22}$$

Если $q \leqslant n$, то, согласно свойству 3) предложения 4, i_{π_q} — изоморфизм. Отсюда, учитывая (20), получаем

$$(\forall q \leqslant n)\ \partial'_q = \partial_q \circ i_{\pi_q} : \pi_q(B, b_0) \cong \pi_{q-1}(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1). \tag{23}$$

Из (23) и точности верхней строки в (18) следует:

$$(\forall q \leqslant n)\ \mathrm{im}\,(p_B)_{\pi_q} = \ker \partial'_q = 0,\ \text{ т.е. } (\forall q \leqslant n)\ (p_B)_{\pi_q} = 0; \tag{24}$$

$$(\forall q \leqslant n)\ \mathrm{im}\,\partial'_q = \pi_{q-1}(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1) = \ker (k_B)_{\pi_{q-1}}. \tag{25}$$

(25) означает, что $(\forall q \leqslant n)\ (k_B)_{\pi_{q-1}} = 0$, т.е.

$$(\forall q \leqslant n)\ 0 = \mathrm{im}\,(k_B)_{\pi_{q-1}} = \ker (p_B)_{\pi_{q-1}} \tag{26}$$

Из (24) и (26) следует, что $(\forall q < n)\ (p_B)_{\pi_q} = 0$ и $(p_B)_{\pi_q}$ — инъективен. Это значит, что

$$(\forall q < n)\ \pi_q(P(X, B, b_0), \varepsilon_1) = 0.$$

Для $q = n$ из (21) и свойства 2) предложения 4 следует, что

$$\pi_n(\Omega(X, b_0), \varepsilon_1) \cong \pi_{n+1}(X, b_0) = 0,$$

и это, по-прежнему, означает, что $(k_B)_{\pi_n} = 0$, и тем самым, что $(p_B)_{\pi_n}$ — инъективен, а, с учетом, (24), что $\pi_n(P(X, B, b_0), \varepsilon_1) = 0$. Т.о., имеем

$$(\forall q \leqslant n)\ \ \pi_q(P(X, B, b_0), \varepsilon_1) = 0. \tag{27}$$

Так как в определение n-связного квазирасслоения входит условие линейной связности пространства расслоения, то для получения этого свойства возьмем компоненту линейной связности E пространства $(P(X, B, b_0), \varkappa_X)$, содержащую точку $\varepsilon_1 \in E$. Получившееся подпространство в $(P(X, B, b_0), \varkappa_X)$ обозначим $(E, \overline{\tau})$ и рассмотрим отображение $p|E : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$, которое является квазирасслоением, как это следует из способа построения квазинакрывающей функции в теореме 1. Тогда из (27) следует, что пространство $(E, \overline{\tau})$ является n-связным, а из (22) следует, что $(\forall q > n)\ (p|E)_{\pi_q} : \pi_q(E, \varepsilon_1) \cong \pi_q(B, b_0)$, т.е. $p|E : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ — n-связное толерантное квазирасслоение.

С помощью точной гомотопической последовательности для n-связного толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ легко получается следующее утверждение:

Предложение 5. *Пусть $p : (E, \overline{\tau}) \longrightarrow (B, \tau)$ n-связное толерантное расслоение (или квазирасслоение) такое, что пространство (B, τ) является $(n-1)$-связным. Пусть $(F = p^{-1}(b_0), \overline{\tau})$ — слой над произвольной точкой $b_0 \in B$, и $\overline{b}_0 \in F$ — его произвольная точка. Тогда*

$$\pi_q(F, \overline{b}_0) \cong \begin{cases} \pi_n(B, b_0),\ \ q = n-1; \\ 0,\ \ q \neq n-1. \end{cases} \qquad \square$$

Пусть (π, n) — пара, где $n \in \mathbb{N}$, а π — произвольная группа для $n = 1$, и π — произвольная абелева группа для $n > 1$.

Определение 7. Линейно связное толерантное пространство (X, τ) назовем толерантным пространством типа (π, n), если

$$\pi_q(X) \cong \begin{cases} \pi,\ \ q = n; \\ 0,\ \ q \neq n. \end{cases}$$

Т.о., в предложении 5 утверждается, что слой $(F,\overline{\tau})$ является пространством типа $(\pi_n(B), n-1)$.

В следующей теореме строится толерантный аналог последовательности Мура-Постникова (см. [6], гл. 8, §3).

Теорема 3. *Пусть (X,τ) — произвольное линейно связное и односвязное толерантное пространство с отмеченной точкой x_0, тогда существует последовательность толерантных отображений*

$$\ldots \xrightarrow{p_n} (E_{n-1},\tau_{n-1}) \xrightarrow{p_{n-1}} (E_{n-2},\tau_{n-2}) \xrightarrow{p_{n-2}} \ldots \xrightarrow{p_2} (E_1,\tau_1) = (X,\tau) \qquad (28)$$

таких, что $(\forall j \geqslant 2)$ $p_j : (E_j,\tau_j) \longrightarrow (E_{j-1},\tau_{j-1})$ — j-связное толерантное квазирасслоение. Каждый слой (F_j,τ_j) толерантного квазирасслоения $p_j : (E_j,\tau_j) \longrightarrow (E_{j-1},\tau_{j-1})$, $j \geqslant 2$ в данной последовательности является толерантным пространством типа $(\pi_j(X), j-1)$, а отображение $p_n \circ \ldots \circ p_2 : (E_n,\tau_n) \longrightarrow (X,\tau)$, $j = \overline{2,n}$ индуцируют изоморфизмы гомотопических групп $\pi_i(E_n) \cong \pi_i(X)$, $i > n$.

Доказательство

Из определения 6 для двух последовательных индексов j и $j-1$ следует, что

$$(\forall i = \overline{1,j})\ \pi_i(E_j) = 0, \quad (\forall i = \overline{1,j-1})\ \pi_i(E_{j-1}) = 0; \qquad (29)$$

$$(\forall i > j)\ (p_j)_{\pi_i} : \pi_i(E_j) \cong \pi_i(E_{j-1}). \qquad (30)$$

Если $i < j-1$, то из точной гомотопической последовательности квазирасслоения p_j (см. [5])

$$\ldots \longrightarrow \pi_{i+1}(E_{j-1}) \longrightarrow \pi_i(F_j) \longrightarrow \pi_i(E_j) \longrightarrow \pi_i(E_{j-1}) \longrightarrow \ldots$$

и формул (29) следует, что

$$(\forall i = \overline{1,j-2})\ \pi_i(F_j) = 0. \qquad (31)$$

Если $i = j - 1$, то из точной гомотопической последовательности для p_j и формул (29) получаем фрагмент точной последовательности

$$0 = \pi_j(E_j) \longrightarrow \pi_j(E_{j-1}) \longrightarrow \pi_{j-1}(F_j) \longrightarrow \pi_{j-1}(E_j) = 0,$$

откуда следует, что

$$\pi_{j-1}(F_j) \cong \pi_j(E_{j-1}). \tag{32}$$

Если $i = j$, то формулы (30) и (29) дают фрагмент точной гомотопической последовательности

$$\pi_{j+1}(E_j) \xrightarrow{\cong} \pi_{j+1}(E_{j-1}) \longrightarrow \pi_j(F_j)) \longrightarrow \pi_j(E_j) = 0,$$

из которой следует, что

$$\pi_j(F_j) = 0. \tag{33}$$

Если $i > j$, то с помощью (30) получаем точную последовательность

$$\pi_{i+1}(E_j) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(E_{j-1}) \longrightarrow \pi_i(F_j) \longrightarrow \pi_i(E_j) \xrightarrow{\cong} \pi_i(E_{j-1}),$$

откуда следует, что

$$(\forall i > j)\ \pi_i(F_j) = 0. \tag{34}$$

Наконец заметим, что из (30) получается цепочка изоморфизмов

$$\pi_j(E_{j-1}) \cong \pi_j(E_{j-2}) \cong \ldots \cong \pi_j(E_2) \cong \pi_j(E_1) = \pi_j(X). \tag{35}$$

Формулы (31)-(35) доказывают, что пространство (F_j, τ_j) имеет тип $(\pi_j(X), j-1)$ и доказывают изоморфизмы, указанные в теореме.

Как и в алгебраической топологии, толерантные последовательности Мура-Постникова, предоставляют аппроксимации толерантных пространств, которые являются удобным инструментом для доказательства самых разнообразных утверждений. В частности, с помощью таких последовательностей доказывается обобщенная теорема Гуревича для толерантных пространств.

Библиографический список

1. *Небалуев С.И.* Высшие гомотопические группы толерантных пространств // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2006.

3. *Небалуев С.И.* Точные гомотопические последовательности в теории толерантных пространств // Чебышевский сборник. Труды VI международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». Тула, 2004. Т.V. Вып. 3(11).

4. *Небалуев С.И., Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвузовский сборник научных трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3.

5. *Небалуев С.И., Сусин М.Н.* Точная гомотопическая последовательность толерантного квазирасслоения пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвузовский сборник научных трудов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып.6.

6. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

7. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.

УДК 511

В.Н. ПОЛЯКОВ

Об одном диофантовом уравнении, его аналогах и обобщениях

Данная статья навеяна чтением интересной работы [1], посвященной так называемому ал–хусайнову уравнению

$$x^4 + y^2 = z^2, \tag{1}$$

впервые попавшему в поле зрения математика X века н.э. Ал–Хусайна и в дальнейшем изредка привлекавшему внимание ряда известных математиков и у нас в стране и за рубежом.

Наиболее глубокие результаты (при том, что x, y, z должны быть числами натуральными) получены автором работы [1]. Но вот что нам хотелось бы сказать по существу дела.

Во-первых, несмотря на впечатляющее обилие формул (или комплектов формул) для компонент x, y, z решений уравнения (1), содержащихся в [1], мы можем здесь предложить и свои формулы для отыскания решений как уравнения (1), так и его обобщения, здесь предложенного, а именно уранения

$$x^4 + my^2 = z^2 \tag{2}$$

при $m \in \mathbb{N}$ (или даже $m \in \mathbb{Z}$).

Заметим, что все формулируемые здесь теоремы (их число можно было бы и увеличить) пересекаются с результатами нашей работы [2].

Теорема 1. *Для компонент x, y, z решений уравнения (2) справедливы формулы:*

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 4u^3v + 4muv^3, \\ z = u^4 + 6mu^2v^2 + m^2v^4 \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 2u^3v - 2muv^3, \\ z = u^4 - m^2v^4 \end{cases} \tag{II}$$

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 0, \\ z = u^4 - 2mu^2v^2 + m^2v^4. \end{cases} \qquad (III)$$

Примечания:

1. При $m = 1$ получаем результаты об уравнении (1) (конечно не в таком количестве как в [1]), но у нас для x, y, z получаются не обязательно натуральные значения.

2. В приведенных только что формулах u и v могут иметь любые целочисленные значения, а иногда и рациональные. Например, для уравнения (1) решение (2,3,5) получается из нашего второго комплекта формул при $u = \frac{3}{2}$, $v = \frac{1}{2}$.

Заметим, однако, что при рациональных значениях u и v решения не всегда будут целочисленными.

В работе [1] отмечено, в частности, следующее решение уравнения (1): $(21, 420, 609)$. Это решение можно получить из нашего второго комплекта формул теоремы 1 при $u = 5$, $v = 2$. Но мы можем указать и другие решения уравнения (1) (с $x = 21$): (21, 1160, 1241), (21, 4620, 4641) , (21, 97240, 97241).

Во-вторых, с нашей точки зрения, в математической литературе незаслуженно обойдено вниманием уравнение, аналогичное уравнению (1), а именно, уравнение

$$x^4 - y^2 = z^2 \qquad (3)$$

и его обощение

$$x^4 - my^2 = z^2. \qquad (4)$$

Между тем, уравнение (3), так же как и уравнение (1) можно связать с пифагоровыми треугольниками. Действительно, если задача решения уравнения (1) (при $x, y, z \in \mathbb{N}$) может формулироваться как задача нахождения прямоугольных треугольников, у которых один из катетов является квадратом натурального числа, то для уравнения (3) задача отыскания его решений может трактоваться как задача о прямоугольных треугольниках с гипотенузой, равной квадрату натурального числа. Такие треугольники существуют и заслуживают изучения.

Теорема 2. *Для компонент x, y, z решений уравнения (4) справедливы формулы*

$$\begin{cases} x = u^2 + mv^2, \\ y = 4u^3v - 4muv^3, \\ z = u^4 - 6mu^2v^2 + m^2v^4 \end{cases} \qquad (IV)$$

$$\begin{cases} x = u^2 + mv^2, \\ y = 2u^3v + 2muv^3, \\ z = u^4 - m^2v^4 \end{cases} \qquad (V)$$

$$\begin{cases} x = u^2 + mv^2, \\ y = 0, \\ z = u^4 + 2mu^2v^2 + m^2v^4. \end{cases} \qquad (VI)$$

Из формул двух первых комплектов теоремы 2 при $m = 1$ следует существование бесконечного множества пифагоровых треугольников, у которых гипотенуза является квадратом натурального числа.

Вот некоторые из решений уравнения (3) в натуральных числах: (5,7,24), (5,15,20), (10,28,96), (10,60,80), (13,65,156), (13,119,120).

В-третьих, кроме уравнения (1) можно было бы рассматривать и уравнения, в которых x содержалось бы в шестой или восьмой или десятой степенях и т.д.

Приведем здесь, например, наши результаты об уравнениях

$$x^6 + y^2 = z^2 \tag{5}$$

и

$$x^6 + my^2 = z^2. \tag{6}$$

Теорема 3. *Для компонент x, y, z решений уравнения (6) справедливы формулы*

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 6u^5v + 20mu^3v^3 + 6m^2uv^5, \\ z = u^6 + 15mu^4v^2 + 15m^2u^2v^4 + m^3v^6 \end{cases} \tag{VII}$$

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 4u^5v - 4m^2uv^5, \\ z = u^6 + 5mu^4v^2 - 5m^2u^2v^4 - m^3v^6 \end{cases} \tag{$VIII$}$$

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 2u^5v - 4mu^3v^3 + 2m^2uv^5, \\ z = u^6 - mu^4v^2 - m^2u^2v^4 + m^3v^6 \end{cases} \tag{IX}$$

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 0, \\ z = u^6 - 3mu^4v^2 + 3m^2u^2v^4 - m^3v^6. \end{cases} \tag{X}$$

Например, для уравнения (5) мы по трем первым комплектам формул теоремы 3 получаем чледующие решения: (5, 7812, 7813), (5, 1560, 1565), (5, 300, 325) соответственно.

Библиографический список

1. *Кожегельдинов С.Ш.* Ал–хусайново уравнение $x^4 + y^2 = z^2$ // Матем. заметки, 2011. Т.89. Вып.3.

2. *Поляков В.Н.* О некоторых диофантовых уравнениях // Чебышевский сборник: Труды VIII Междунар. конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула: Изд-во ТГПУ, 2011. Т.12. Вып.2.

3. *Диксон Л. Е.* Введение в теорию чисел. Изд-во АН Груз. ССР, 1941 г.

УДК 517.51

А.В. ШАТАЛИНА, Л.В. БОРИСОВА

О сходимости процессов Лагранжа в областях Келлога–Альпера

Пусть D– ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ. AC– множество аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функций с равномерной нормой и обычным модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$.

Функция $z = \varphi(w)$ однолистно и конформно отображает внешность единичного круга $|W| > 1$ на дополнение области D до расширенной плоскости так, что бесконечно удаленные точки переходят друг в друга, причем $\varphi'(\infty) > 0$. $M = \{z_{k,n}\}$ – матрица узлов интерполирования, $M \in \Gamma, k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots$

Определение. Матрица будет называться правильной, если узлы $z_{k,n}$ любой n-ой строки при отображении $W_{k,n} = \varphi^{-1}(z_{k,n})$ переходят в вершины правильного n-угольника, вписанного в единичный круг.

Назовем функцию $\omega(\delta)$ мажорантой модуля непрерывности, если $\omega(\delta)$– непреывная, полуаддитивная и неубывающая на $[0,\infty)$, при чем $\omega(0) = 0$. Множество таких функций обозначим через Ω. Для каждой фиксированной $\omega(\delta) \in \Omega$ построим классы функций:

$$AC(\omega) = \{f(z); f(z) \in AC, \omega(f,\delta) = \underline{O}\{\omega(\delta)\}\},$$

$$AC^*(\omega) = \{f(z); f(z) \in AC, \omega(f,\delta) = \bar{o}\{\omega(\delta)\}\}.$$

Пусть $\{L_n(M,f,z)\}$ — последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа интерполирующих функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,n}$.

При изучении аппроксимативных свойств процесса Лагранжа в случае единичного круга для функций из классов, заданных мажорантой модулей непрерывности, ранее были найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости последовательностей полиномов к функции в замкнутом круге. Можно ли перенести полученные результаты на произвольные области, не забывая, что при этом придется учитывать их „вид“?

В качестве D рассматриваются области, граница которых удовлетворяет некоторому условию гладкости.

Определение. D удовлетворяет условию Келлога-Альпера, $D \in (K-A)$, если угол $\theta(s)$, образованный касательной к границе Γ с вещественной осью, как функция длины дуги S на Γ, имеет модуль непрерывности $\omega(\theta,h)$, удовлетворяющий условию:

$$\int_0^C \frac{\omega(\theta,h)}{h}\,|\ln h|\,dh < \infty.$$

Для правильных матриц с ограничением на распределение узлов найдена метрическая характеристика множества точек расходимости $\{L_n(M,f,z)\}$.

Определение. Матрица M удовлетворяет условию (B_m), $M \in (B_m)$, если для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$ существуют числа $q = q(\varepsilon)$, для которых можно указать последовательность номеров n_j, такую, что для любого натурального μ существует натуральное ν, для которых

$$\varepsilon \sum_{i=\mu}^{\nu} n_j \geq 2\pi, \quad n_\nu \leq n_\mu^q,$$

и все узлы z_{k,n_j}, z_{s,n_i}, $\mu \leq i \neq j \leq \nu$, расстояние между образами которых $W_{k,n_j} = \varphi_{-1}(z_{k,n_j})$, $W_{s,n_i} = \varphi_{-1}(z_{s,n_i})$ меньше n_μ^{-2q}, принадлежат множеству B_m, содержащему не более m дуг границы Γ, длина каждой из которых меньше $2n_\mu^{-2q}$.

Примерами таких матриц могут служить образы корней n-ой степени из любого комплексного числа.

Теорема 1. *Пусть $M \in D$ – правильная матрица узлов интерполирования и область $D \in (K - A)$. Если для $\omega \in \Omega$ выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \omega \left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \ln n = 0,$$

тогда для любой функции $f \in AC(\omega, D)$ последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $\{L_n(M, f, z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ в $\overline{D}$.

Если же для $\omega \in \Omega$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \omega \left\{\frac{1}{n}\right\} \cdot \ln n < \infty,$$

то для любой функции $f \in AC^*(\omega, \overline{D})$ последовательность $\{L_n(M, f, z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ в $\overline{D}$.

Теорема 2. *Пусть $M \in \Gamma$– правильная матрица, $M \in (B_m)$. Область $D \in (K - A)$. Если для $\omega(\delta) \in \Omega$ выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \omega \left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0,$$

тогда существует $f(z) \in AC(\omega)$ такая, что интерполяционный процесс Лагранжа для этой функции расходится почти всюду на Γ. *Если* *для* $\omega(\delta) \in \Omega$ *выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \infty,$$

тогда существует $f(z) \in AC^*(\omega)$ *такая, что процесс Лагранжа для этой функции неограниченно расходится почти всюду на* Γ.

Теорема 3. *Пусть* $M \in \Gamma$ *- матрица, составленная из образов корней* n*-ой степени из* -1. *Область* $D \in (K - A)$. *Если для* $\omega(\delta) \in \Omega$ *выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n > 0,$$

тогда существует $f(z) \in AC(\omega)$ *такая, что интерполяционный процесс Лагранжа для этой функции расходится всюду на* Γ. *Если для* $\omega(\delta) \in \Omega$ *выполняется*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \infty,$$

тогда существует $f(z) \in AC^*(\omega)$ *такая, что процесс Лагранжа для этой функции неограниченно расходится всюду на* Γ.

Как уже отмечалось, сформулированные выше результаты были ранее получены для круга.

Свойства областей, удовлетворяющих условию Келлога-Альпера, позволили перенести различные оценки и разработанную схему построения функции и множества с круга на область.

Доказательство можно условно разбить на следующие этапы:

- при каждом натуральном n для точек единичной окружности с "вырезанными" узлами найдена оценка снизу функции Лебега

$$\sum_{k=0}^{n-1} |l_{k,n}(M, z)| \geq C_1 \ln n, \tag{1}$$

где константа C_1 зависит только от того, какую часть единичной окружности "вырезали"и $l_{k,n}(M, z)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа;

- используя эту оценку строится вспомогательное, используемое в дальнейшем множество ε_μ, каждой точке которого соответствует своя функция Лебега, а точнее номер $n = n_p$ из некоторой пачки номеров $\mu < p < \nu$, для которого справедливо (1). Отметим, что ε_μ, состоит из конечного числа непересекающихся дуг единичной окружности, которые полностью ее покрывают за исключением множества меры меньшей ε $(0 < \varepsilon < \pi)$, причем каждой дуге соответствует номер n_p такой, что дуга заключена между двумя соседними узлами Z_{k,n_p} и Z_{k+1,n_p} и выполняется (1) для всех точек этой дуги;

-доказывается свойство круга о том, что $\arg l_{k,n}(M,z), k = \overline{1, n-1}$ остаются постоянными для всех z, лежащих между соседними узлами $Z_{i,n}$ и $Z_{i+1,n}$ при любом фиксированном $i, i = \overline{0, n-1}$, это дает возможность определить такие числа $W_{k,n}$, что

$$|\sum_{k=0}^{n} W_{k,n} l_{k,n}(M,z)| = \sum_{k=0}^{n} |l_{k,n}(M,z)|.$$

Таким образом, оценка (1) будет справедлива уже для соответствующего полинома Лагранжа во всех точках z, принадлежащих фиксированной ранее дуге окружности, заключенной между $z_{i,n}$ и $z_{i+1,n}$;

- взяв на каждой дуге, входящей во множество ε_μ, произвольную точку z, определяем числа $W_{k,n_p}, k = 0, n_p - 1, \mu < p < \nu$, и строим вспомогательную функцию f_μ, совпадающую с W_{k,n_p} в узлах z_k, n_p и обладающую рядом дополнительных, необходимых в дальнейшем свойств;

- построенные вспомогательные множество ε_μ, и функция f_μ, , связаны с соответствующей пачкой строк в матрице узлов интерполирования. Идея разбиения последовательности натуральных чисел на счетное число непересекающихся последователей, позволила объединить пачки и найти итоговую функцию в виде двойного ряда и множество, которые удовлетворяют утверждениям теоремы 2, но в качестве области D пока выбирается круг;

- выбирая конкретную матрицу корней n-ой степени из "-1", показываем что расположение узлов на единичной окружности по отношению друг к другу позволяет так объединить строки матрицы узлов интерполирования в пачки, что никаких "пропусков" при построении множества точек расходимости ε_μ, не будет. Таким образом добиваемся расходимости всюду на окружности процесса Лагранжа;

- для того, чтобы перейти с круга на область (с сохранением всех необходимых свойств у множества ε_μ, и функции f_μ,), требуется некоторая "пропорциональность", то есть отношение расстояний между точками на окружности и их образами на Γ должны быть ограничены и сверху и снизу. Именно таким свойством обладают области Келлога-Альпера. Воспользовавшись этими оценками, переносим ранее полученные результаты с круга на область и окончательно получаем утверждения теорем 1–3.

Библиографический список

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комлексного переменного. М.:Наука, 1964.

2. *Шаталина А. В.* Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности // Депонир. в ВИНИТИ 19.07.90., №4060-В90.

УДК 516.9

В.Р ШЕБАЛДИН

О необходимых условиях экстремума для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: с нелинейными дифференциальными связями на бесконечном интервале времени

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

с ограничениями на управление

$$u(t) \in U, \quad \text{для почти всех} \quad t \in [t_0, \infty) \tag{2}$$

с ограничениями на траекторию

$$x(t_j) \leq 0, \quad j = \overline{1, q}; \tag{3}$$

и с интегральным критерием качества

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x, u, t) dt \to \min_{x,u,T}, \tag{4}$$

где $f(x, u) = (f_1(x, u), \ldots, f_n(x, u))^T$- заданная вектор-функция, причем $f_l(x, u)$, $l = \overline{1, n}$- скалярные, дифференцируемые функции своих аргументов; $f_0(x, u, t)$-выпуклая, скалярная, дифференцируемая функция своих аргументов, $U \subset R^1$-ограниченное выпуклое множество; $x(t) \in R^n$, $\quad t_j \in [t_0, \infty), j = \overline{1, q}$—набор фиксированных точек.

Обозначим:$(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{T})$ — оптимальное решение исходной задачи.

Функции $u(t)$ будем считать допустимыми, если они являются измеримыми функциями и удовлетворяют ограничению (2). Множество допустимых управлений в задаче (1)-(3) будем обозначать символом V. В настоящей работе будут получены уравнения, определяющие необходимые условия экстремума в виде максиминной задачи.

Ранее в статьях [1-3] были получены уравнения необходимых условий экстремума в виде максиминной задачи для линейной задачи оптимального управления на конечном отрезке времени с терминальным критерием качества и доказана сходимость алгоритма, построенного на их основе. В настоящей работе, как и в статьях [1-3], необходимые условия экстремума будут получены с помощью теоремы Дубовицкого–Милютина, см.[4]. Для этой цели сведём исходную задачу на бесконечном интервале времени к задаче оптимального управления на конечном отрезке времени. Для полученной вспомогательной задачи необходимо построить конуса допустимых вариаций и им сопряженные, соответствующие имеющимся ограничениям, а также конус запрещенных вариаций и его сопряженный для критерия качества в пространстве функций $(x, u) \in C_n[0,1] \times L^\infty[0,1]$. Напомним, что согласно [4] конус запрещенных вариаций определяется следующим множеством:

$$\tilde{K}_0 = \{ \quad (x,u) \quad |\exists \delta > 0, \quad \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad ||\tilde{x}|| \leq \delta, ||\tilde{u}|| \leq \delta$$

$$J(\hat{x} + \varepsilon(x + \tilde{x}), \hat{u} + \varepsilon(u + \tilde{u})) < J(\hat{x}, \hat{u})\}.$$

Конус допустимых вариаций для ограничений в виде неравенства типа ограничений (3) имеет вид:

$$\tilde{K}_1 = \{ \quad (x,u) \quad |\exists \delta > 0, \quad \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \quad ||\tilde{x}|| \leq \delta, ||\tilde{u}|| \leq \delta$$

$$\hat{x}(t_j) + \varepsilon(x(t_j) + \tilde{x}(t_j)) \leq 0, j = \overline{1, q}\},$$

а для ограничений в виде равенства, определённых дифференциальными уравнениями, было доказано, см.[4], что конус допустимых вариаций состоит из пар функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих равенству

$$\dot{x}(t) = f_x(\hat{x}, \hat{u})x(t) + f_u(\hat{x}, \hat{u})u(t), \quad x(t_0) = 0.$$

Определим функционал

$$F_1(x) = \max_{i,j}(x_i(t_j)).$$

В [1] было доказано, что пара функций $(x(t), u(t))$ принадлежит конусу $\tilde{K}_1$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\max_{(i,j) \in M} x_i(t_j) < 0,$$

где

$$M = \{i, j| \quad \max_{i,j} \hat{x}_i(t_j) = 0\}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}.$$

Получим выражение для конуса, сопряженного для $\tilde{K}_1$. Согласно [4] сопряженный конус образует множество линейных функционалов, положительных на исходном конусе. Поскольку исходный конус определяется выражением $F(x) < 0$, то сопряженный конус состоит из функционалов вида $-\alpha\mu(x)$, см.[4], где $\alpha = const, \alpha > 0, \mu(x)$ — функционал, опорный к $F(x)$. Далее, если, как и в нашем случае, $F(x) = = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}, f_i$ — линейные функционалы, то опорный функционал к нему имеет вид

$$-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x), \alpha_i = const, \alpha_i > 0.$$

Следовательно, сопряженный конус для конуса $\tilde{K}_1$ состоит из функционалов вида

$$J^*(x,u) = \sum_{(i,j)\in M} \alpha_{i,j} x_{i,j}, \quad \sum_{(i,j)\in M} \alpha_{i,j} = 1, \quad \alpha_{i,j} \geq 0.$$

Приступим к доказательству необходимых условий экстремума для задачи (1)-(3).

Теорема. *Пусть $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{T})$ — оптимальное решение задачи(1)-(3), тогда существуют интегрируемые функции $\psi_{i,j}(t) \in R^n, (i,j) \in M$, что имеют место следующие уравнения*

$$\max_{u\in V} \min_{(i,j)\in M\cup(0,0)} \int_{t_0}^{\hat{T}} \psi_{i,j}^T [f_0(\hat{x}, u, t) - f_0(\hat{x}, \hat{u}, t)] dt = 0,$$

где

$$\psi_{i,j}(t) = \begin{cases} \bar{\psi}_{i,j}(t), & t \in [t_0, t_j], \\ 0, & t \in (t_j, \hat{T}], \end{cases}$$

при $(i,j) \in M$;

$$M = \{i, j| \quad \hat{x}_i(t_j) = 0\}, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,q};$$

$$\dot{\bar{\psi}}_{i,j}(t) = -f_x^T(\hat{x}, \hat{u}, t)\bar{\psi}_{i,j}, \quad \bar{\psi}_{i,j}^i(t_j) = -1, \bar{\psi}_{i,j}^r(t_j) = 0,$$

$$t \in [t_0, \hat{T}], \quad i \neq r, \quad r, i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, q}, \quad (i, j) \in M \quad t_j \leq \hat{T};$$

$$\dot{\psi}_{0,0}(t) = -f_x^T(\hat{x}, \hat{u}, t)\psi_{0,0} + f_{0,x}(\hat{x}, \hat{u}, t), \quad \psi_{0,0}(\hat{T}) = -1$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, \hat{u}), \quad \hat{x}(t_0) = x_0.$$

Доказательство

Применим метод Дубовицкого-Милютина для вывода необходимых условий экстремума. Поскольку управляемая система определяется нелинейными дифференциальными связями и ограничения на управляющие функции не являются выпуклыми, то воспользуемся следующим способом преодоления этих трудностей, основные идеи которого изложены в [5]. По исходной задаче оптимального управления построим вспомогательную линейную задачу с выпуклыми ограничениями на управление. Обозначим символом q число точек t_j таких, что $t_j \leq \hat{T}$. Введем положительные функции $v(t)$ по следующим правилам

$$v(\tau) = \begin{cases} \bar{v}(\tau), \quad \tau \in \Delta(v), \quad \Delta(v) = \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_k, \quad \Delta_k \subset [0,1] \\ 0, \quad \tau \subseteq \Delta(v), \end{cases},$$

$$\int_0^1 v(s)ds = \hat{T} - t_0,$$

где $\bar{v}(t)$ — произвольная, ограниченная,измеримая, положительная функция, а $\Delta_k(v) = (\tilde{\theta}_k, \theta_k]$, см.[5, с.160]. Обозначим: $t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v(s)ds$. Зафиксируем некоторую функцию $v_*(t)$ с перечисленными выше свойствами. Тогда соответственно определим функцию

$$t_*(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v_*(\xi)d\xi.$$

Обозначим

$$\omega_*(\tau) = \hat{u}(t_*(\tau)).$$

Будем также рассматривать ограничения $v(\tau_j) \leq 0$, где τ_j являются решениями уравнения

$$t_j = t_0 + \int_0^{\tau_j} v_*(\xi) d\xi.$$

Определим: $\tau(t) = \min\{\xi \in [0,1] \quad | \quad t(\xi) = t\}$. Таким образом во вспомогательной задаче оптимального управления множество допустимых управлений составят положительные, кусочно непрерывные, ограниченные функции $v(\tau), \tau \in [0,1]$ такие, что

$$t_0 + \int_0^{\tau} v(s) ds = t(\tau), \int_0^1 v(s) ds = \hat{T} - t_0.$$

Сформулируем вспомогательную задачу. Положим

$$\omega_*(\tau) = \begin{cases} \hat{u}(t_*(\tau)), \quad \tau \in \Delta(v_*), \\ u(\tau), \quad \tau \subseteq \Delta(v_*), \end{cases}$$

где $u(t) \in U$. Можно доказать, что, см.[5, с.160-163], что тогда пара функций $(y_* = y(t, v_*), v_*)$ является оптимальной для следующей задачи оптимального управления

$$\dot{y} = f(y(\tau), \omega_*(\tau)) v(\tau), \quad y(0) = x_0, \quad \tau \in [0,1],$$

$$\dot{t}(\tau) = v(\tau), \quad t(0) = 0, \quad t(1) = \hat{T} - t_0,$$

$$y(\tau_j) \leq 0, j = \overline{1,q},$$

$$v(\tau) \geq 0,$$

$$J_1(y, v) = \int_0^1 v(\tau) f_0(y(\tau), \omega_*(t(\tau))) d\tau \longrightarrow \min.$$

Тогда согласно теоремы 2.1, см.[4,с.400], вида функционалов, принадлежащих сопряженным конусам, соответствующих ограничениям данной задачи оптимального управления, см.[4], леммы 1, теоремы 1, см.[1], получим неравенство

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{M} \cup (0,0)} \alpha_{i,j} \int_0^1 \tilde{\psi}_{i,j}^T f(y_*, \omega_*)(v - v_*) d\tau + \mu \int_0^1 (v - v_*) d\tau \leq 0,$$

где

$$y_*(t) = y(t, v_*), \quad \alpha_{i,j} \geq 0, \alpha_{i,j} = const; \quad \mu = const,$$

$$\tilde{M} = \{(i,j) \quad | \quad y_{*i}(\tau_j) = 0\}, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,q};$$

$$\dot{y}(t) = f_x(y_*, \omega_*)y(\tau)v_*(\tau) + f_v(y_*, \omega_*)v(\tau), y(0) = 0,$$

$$\dot{t}(\tau) = v(\tau), t(0) = 0, \tau \in [0,1],$$

$$v_*(\tau) + \varepsilon(v + \tilde{v}) \geq 0, \quad \text{при} \quad ||\tilde{v}|| \leq 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_{l,i}(\tau) = -v_* f_x^T(y_*, \omega_*)\tilde{\psi}_{l,i}, \quad \tilde{\psi}_{l,i}^l(\tau_j) = -1, \quad \tilde{\psi}_{l,i}^r(\tau_j) = 0,$$

$$\tau \in (0, \tau_j], \tilde{\psi}_{l,i}(\tau) \equiv 0, \quad \text{при} \quad \tau \in (\tau_j, \hat{T}]; l, r = \overline{1,n}, j = \overline{1,q},$$

$$\dot{\psi}_{0,0}(\tau) = -v_* f_x^T(y_*, \omega_*)\psi_{0,0} + v_* f_{0,x}(y_*, \omega_*), \quad \psi_{0,0}(\hat{T}) = -1.$$

Тогда, как при доказательстве теоремы 1 из [1], можно получить

$$\sum_{(i,j)\in \bar{M}\cup(0,0)} \alpha_{i,j}\tilde{\psi}_{i,j}^T f(y_*, \omega_*) \leq 0 \quad \text{для п.в.} \tau \in [0,1]/\Delta(v_*)$$

и при $\tau \in \Delta(v_*)$ получим

$$\sum_{(i,j)\in \bar{M}\cup(0,0)} \alpha_{i,j}\tilde{\psi}_{i,j}^T f(y_*, \omega_*) = 0.$$

Согласно [5] при замене $\tau = \tau(t)$, определения функции $\omega_*(t)$ из последних двух выражений следует

$$\sum_{(i,j)\in M\cup(0,0)} \int_{t_0}^{\hat{T}} \alpha_{i,j}\psi_{i,j}^T(t) f(\hat{x}, \hat{u})dt = 0,$$

а также

$$\sum_{(i,j)\in M\cup(0,0)} \int_{t_0}^{\hat{T}} \alpha_{i,j}\psi_{i,j}^T(t) f(x(t), u(t))dt \leq 0,$$

где $u \in U, t \in [t_0, \hat{T}]$. Откуда как и в [1] можно получить необходимые условия экстремума в форме максиминной задачи.

Библиографический список

1.*Шебалдин В.Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями // Депонир. в ВИНИТИ, №2999-В89ДЕП, 1989.
2.*Шебалдин В.Р.* Об одной задаче оптимального управления с ограничениями // Депонир. в ВИНИТИ, №33074-В96, 1996.
3.*Шебалдин В.Р.* О минимизирующих последовательностях в задаче оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями // Депонир. в ВИНИТИ, №709-В98, 1998.
4.*Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ, 1965. Т.5. №3.
5.*Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М:Наука, 1974.

УДК 511.3

Д.С. СТЕПАНЕНКО

Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле

Пусть поле k является нормальным расширением поля рациональных чисел конечной степени. Рассмотрим ряд Дирихле вида

$$f(s) = \prod_{\beta} (1 - \frac{1}{N(\beta)}^{s})^{-1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \qquad (1)$$

где произведение берется по всем неразветвленным простым идеалам поля k.

Относительно рядов вида (1) имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле* (1), *аналитически продолжается на комплексную плоскость как мероморфная функция с единственным полюсом в точке $s = 1$.*

Замечание. При доказательстве Теоремы 1 будут использоваться только факты относительно аналитических свойств L-функций с числовыми характерами Дирихле и поведения идеалов при расширении Галуа числовых полей.

Доказательству теоремы предшествует доказательство следующей леммы.

Лемма. *Пусть k — абелево расширение Галуа поля рациональных чисел. Тогда ряд Дирихле (1) определяет мероморфную функцию $f(s)$ с единственным простым полюсом в точке $s = 1$.*

Доказательство

Рассмотрим дзета-функцию Дедекинда поля k

$$Z_k(s) = \sum_{\Omega} \frac{1}{N(\Omega)^s} = \prod_{\beta}(1 - \frac{1}{N(\beta)^s}), \quad s = \sigma + it,$$

где произведение берется по простым идеалам поля k.

В случае абелева расширения известно [1] разложение функции $Z_k(s)$ в произведение L-функций с числовыми характерами Дирихле:

$$Z_k(s) = \prod_{\chi_i} L(s, \chi_i), \tag{2}$$

где χ_i — числовые характеры Дирихле, согласованные с характерами группы Галуа, $L(s, \chi_i)$ — L-функция Дирихле.

Напомним, что числовой характер Дирихле χ называется согласованным с характером $\hat{\chi}$ группы Галуа, если для любого неразветвленного простого p выполняется условие

$$\chi(p) = \hat{\chi}(F[p]),$$

где $F[p]$ — автоморфизм Фробениуса соответствующего расширения полей вычетов по простым идеалам.

Отметим, что при доказательстве формулы (2) используются только факты относительно аналитических свойств L-функций Дирихле с числовыми характерами и поведения простых идеалов при расширении Галуа.

В силу (2) $Z_k(s)$ является мероморфной функцией с единственным простым полюсом в точке $s = 1$.

Из определения $Z_k(s)$ легко видеть, что

$$f(s) = \prod_{\beta}(1 - \frac{1}{N(\beta)^s})Z_k(s), \tag{3}$$

где произведение берется по конечному числу разветвленных простых идеалов. Соотношение (3) доказывает утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы

Обозначим через K_{ab} — максимальное абелево подрасширение поля k:

$$Q \subset K_{ab} \subset k$$

Пусть β — неразветвленный простой идеал поля k, а ρ — простой идеал поля K_{ab}, над которым лежит идеал β. Известно [1], что

$$N(\beta) = N(\rho) = p^f, \tag{4}$$

где f — степень инерции простого идеала (p) поля Q при расширении полей.

Обозначим через $f_1(s)$ функцию вида

$$f_1(s) = \prod_{\rho}(1 - \frac{1}{N(\rho)^s})^{-1}, \tag{5}$$

где произведение берется по всем простым идеалам поля K_{ab}, над которыми лежит простой идеал β поля k.

Утверждение леммы имеет место для любой функции вида

$$f(s) = \prod_{\beta}(1 - \frac{1}{N(\beta)^s})^{-1},$$

где произведение берется почти для всех простых идеалов поля k

В силу следствия леммы функция $f(s)$ вида (5) является мероморфной функцией с простым полюсом в точке $s = 1$.

В силу (4) имеет место соотношение

$$f(s) = f_1^l(s),$$

где $l = [k : K_{ab}]$, которое доказывает утверждение теоремы.

Библиографический список

1.*Хейльброн X.* ζ-функции и L-функции // В кн.: Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса, А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.

УДК 512.7

А.М. ВОДОЛАЗОВ

Кольцо целозначных многочленов для алгебраических торов

В работе [1] при изучении целых моделей для алгебраических торов была введена алгебра

$$A = \{f \in \mathbb{Q}_p[t, t^{-1}] \mid f(\mathbb{Z}_p^*) \subset \mathbb{Z}_p\}\ , \tag{1}$$

алгебра A ($X = SpecA$) является целой моделью для тора $T = \mathbb{G}_m$ (то есть $T \cong X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$).

Алгебра A, рассматриваимая как кольцо, является примером целозначных колец, такие колца активно изучаются. По теме целозначных колец вышла монография [2]. Одним из главных вопросов изучения является задача определения образующих таких колец, и выяснения свойств факторизации в этих кольцах. Они оказываются имеют неоднозначную факторизацию. Свойства нефакториальности в кольцах многочленов изучалась в различных работах. Например, в [4] доказывается неоднозначность разложение в $\mathbb{Z}_{p^n}[t]$, а в работах [2, 5] изучалось кольцо целочисленных полиномов $Int(\mathbb{Z}) = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\}$.

Сначала мы определим образующие A. Для этого мы докажем существование многочленов $H_n(t)$ и чисел $t_n \in \mathbb{Z}_p^*$, обладающих следующим свойствами:

1) $\deg H_n = n$

2) $H_n \in A$

3) $H_n(t_n) \in \mathbb{Z}_p^*$ или $(\frac{H_n}{p} \notin A)$.

Сначала построим многочлены H_n при $n = \varphi(p^k)$ (φ– функция Эйлера).

Лемма. *Многочлен*

$$H_{\varphi(p^k)}(t) = \frac{1}{p^{\alpha_k}} \prod_{i=1,\ (i,p)=1}^{p^{k-1}-1} (t-i)$$

принадлежит A и $\frac{H_{\varphi(p^k)}(t)}{p}$ не принадлежит A, где

$$\alpha_k = 1 + p + \cdots + p^{k-1} = \frac{p^k - 1}{p-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Так как t и i принадлежат $\mathbb{Z}_p^*$, значит имеет место следующие разложение

$$t = b_0 + b_1 p + \cdots + b_{k-1} p^{k-1} + b_k p^k + \ldots \ (0 < b_0 \leq p-1,\ 0 \leq b_i \leq p-1)$$

$$i = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{k-1} p^{k-1} \ (0 < a_0 \leq p-1, \ 0 \leq a_i \leq p-1)$$

Разность $(t-i)$ делится точно на p^l если $b_i = a_i$ при $i = 0, \ldots, l-1$, а $b_l \neq a_l$. При фиксированном t, когда i пробегает приведенную систему вычетов по модулю p^k S', количество $(t-i)$ в $\prod\limits_{i \in S'} (t-i)$ делящихся точно на p^l при $l < k$ равно $(p-1)p^{k-(l+1)}$ потому, что для этих i

$$a_0 = b_0, \ldots, a_{l-1} = b_{l-1}, a_l = b_l$$

a_j произвольные $j \geq l+1$. Заметим, что если $a_j = b_j$ $j = 0, \ldots, k-1$, то $(t-i)$ делится на p^k, только для одного i из S' и может делится на большую степень если $b_k = \cdots = b_{k+m} = 0$. В результате, $\prod\limits_{i \in S'} (t-i)$ всегда делится на p^{α_k}, где

$$\alpha_k = k + (p-1)(k-1) + p(p-1)(k-2) + \cdots + (p-1)p^{k-(l+1)} l + \cdots + (p-1)p^{k-2} 1 =$$

$$= 1 + p + \cdots + p^{k-1} = \frac{p^k - 1}{p-1}.$$

Для $t_0 = 1 + p^k$ $\prod_{i \in S'} (t_0 - i)$ не делится на $p^{\alpha_k + 1}$.Лемма доказана.

Теперь построим числа t_n. Числа t_n выбираем в порядке возрастания из приведенной по $\mod p^{k+1}$, а n предполагаем большим $\varphi(p^k)$. При $n = \varphi(p^k) + 1$ $t_n = 1 + p^k$ и т.д.

Как и для многочленов при $n = \varphi(p^k)$, для произвольного n сначала рассмотрим произведение

$$\prod_{\substack{i=1 \\ (i,p)=1}}^{p^k - 1} (t-i) \prod_{\varphi(p^k) < j \leq n} (t - t_j). \qquad (2)$$

Определим на какую степень p (2) точно делится. Для n имеем разложение

$$n = n_k \varphi(p^k) + n_{k-1} \varphi(p^{k-1}) + \cdots + n_1 \varphi(p) + n_0 \ n_k > 0, \ 0 \leq n_i p, \ n_0 < p-1.$$

При таком n среди чисел i и t_j в произведение (2), есть n_k приведенных систем вычета по $\mod p^k$ у которых цифра при p^k равна $0, 1, \ldots, n_k - 1$.

Среди чисел у которых цифра при p^k равна n_k имеется n_{k-1} приведенная система вычетов по $\mod p^{k-1}$, у которых цифры при p^{k-1} равны $0, 1, \dots, n_{k-1} - 1$ соответственно и т.д. …В итоге числа i пробегают n_k приведенных систем по модулю p^k, оставшиеся n_{k-1} приведенных систем по модулю p^{k-1}, и т.д. Значит из доказательства леммы следует, что (2) всегда делится на p^{s_n}, где

$$s_n = n_k\alpha_k + \cdots + n_2\alpha_2 + n_1 \ .$$

По построению $t_{n+1} = (n_kp^k + \cdots + n_1p + n_0) + 1$, тогда при подстановке $t = t_{n+1}$ в (2) , т.к. $n_k \neq 0$, то $\prod(t_{n+1} - j)$, когда j пробегает любую приведенную систему вычетов по $\mod p^k$ в (2) делится точно на p^{α_k}, по доказательству леммы. Аналогично, если какое-то $n_s \neq 0$, то $\prod(t_{n+1} - j)$, когда j пробегает любую приведенную систему вычетов по $\mod p^s$ в (2) делится точно на p^{α_s}. Эти рассуждения показывают, что (2) при $t = t_{n+1}$ не делится на p^{s_n+1}.

В итоге мы построили числа t_n и многочлены

$$H_n(t) = \frac{1}{p^{s_n}} \prod_{i=1,\ (i,p)=1}^{p^k-1} (t - i) \prod_{\varphi(p^k)<j\leq n} (t - t_j) \ .$$

Многочлены $H_n(t)$ обладают свойствами 1, 2, 3 более того $H_n(t_k) = 0$ при $k \leq n$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(p^k) < n \leq \varphi(p^{k+1})$, а*

$$H_n(t) = \frac{1}{p^{s_n}} \prod_{i=1,\ (i,p)=1}^{p^k-1} (t - i) \prod_{\varphi(p^k)<j\leq n} (t - t_j)$$

если $n = n_k\varphi(p^k) + \cdots + n_1\varphi(p) + n_0$, то $s_n = n_k\alpha_k + \cdots + n_1\alpha_1$ где $0 \leq n_i < p$, $\alpha_i = \frac{p^i-1}{p-1}$,при $0 < i \leq k$ $n_k \neq 0$, $n_0 < p - 1$, тогда

$$A = \mathbb{Z}_p[t, t^{-1}, H_1(t), \dots, H_n(t), \dots] \ .$$

Доказательство

Произвольная функция $f(t) \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ имеет вид $f(t) = \frac{g(t)}{t^n}$.

$$f(t) \in A \Leftrightarrow g(t) \in A \ .$$

Пусть $\deg g(t) = m$ так как многочлены $H_s(t)$ определены для любой степени s, то

$$g(t) = a_m H_m(t) + a_{m-1} H_{m-1}(t) + \cdots + a_0 \ .$$

По предположению $g(t) \in A$, значит для $t_n \in \mathbb{Z}_p^* \ g(t_n) \in \mathbb{Z}_p$.

Рассмотрим $t = 1$. $g(1) \in Z_p$, по свойству 3) многочленов $H_n(t)$ $H_n(1) = 0$ при $n \geq 1$. Следовательно, $a_0 \in Z_p$. Пусть $t = 2$, $g(2) \in Z_p$, тогда

$$g(2) = a_n H_n(2) + a_{n-1} H_{n-1}(2) + ... + a_1 H_1(2) + a_0 = a_1 H_1(2) + a_0,$$

$H_1(2) \in \mathbb{Z}_p^*$ $(H_i(2) = 0)$.
Тогда

$$a_1 = -\frac{a_0 + g(2)}{H_1(2)} \in \mathbb{Z}_p.$$

Пусть аналогично доказано, что $a_0, a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{Z}_p$. Докажем, что $a_k \in \mathbb{Z}_p$.

$$\begin{aligned} g(t_{k+1}) = & (a_n H_n(t_{k+1}) + a_{n-1} H_{n-1}(t_{k+1}) + ... + a_{k+1} H_{k+1}(t_{k+1})) + \\ & + a_k H_k(t_{k+1}) + +(a_{k-1} H_{k-1}(t_{k+1}) + ... + a_1 H_1(t_{k+1}) + a_0) = \\ & = 0 + a_k H_k(t_{k+1}) + b_k, \end{aligned}$$

$$b_k = a_{k-1} H_{k-1}(t_{k+1}) + ... + a_1 H_1(t_{k+1}) + a_0 \in \mathbb{Z}_p$$

по доказанному выше.

$$a_k = \frac{g(t_{k+1}) - b_k}{H_k(t_{k+1})} \in \mathbb{Z}_p,$$

так как $g(t_{k+1}) - b_k \in \mathbb{Z}_p$, а $H_k(t_{k+1}) \in \mathbb{Z}_p^*$ по свойствам многочленов $H_k(t)$. Теорема 1 доказана.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Ненулевой и неединичный элемент $r \in R$ называется неприводимым в R, если из того, что $r = ab$ с $a, b \in R$ следует, что либо a, либо b является целыой единицей в R (то есть $a \in R$ и $a^{-1} \in R$). Представление элемента $r \in R$ в виде произведения неприводимых элементов $r = s_1 ... s_n$, $s_i \in R$, будем называть факторизацией r. Число n неприводимых множителей называется длиной факторизации.

Множество длин $L(r)$ элемента $r \in R$ есть множество всех натуральных чисел n таких, что r имеет факторизацию длины n в R.

Кольцо R называется атомарным, если любой ненулевой неединичный элемент в R допускает факторизацию в R.

Атомарная область целостности R, для которой множество длин каждого ненулевого и неединичного элемента конечно, называется областью ограниченной факторизации.

Кольцо R называется факториальным, если для каждого ненулевого и неединичного элемента r существует однозначная, с точностью до перестановки и умножения на единичные элементы, факторизация.

Обозначим $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)}) = \mathbb{Z}_p[t, H_1(t), \dots, H_n(t), \dots]$

Теорема 2.*Кольцо $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$ удовлетворяет следующим свойствам, оно:*

1) атомарно;

2) является областью ограниченной факторизации;

3) не факториально.

Доказательство

1) Каждый ненулевой многочлен $f \in \mathbb{Q}_p[t]$ можно единственным образом представить в виде

$$f(t) = p^k \prod_{i \in I} g_i(t),$$

где $g_i(t)$ – неприводимый примитивный полином из $\mathbb{Z}_p^{(*)}[t]$, $k \in Z$ и множество I конечно. Если $k \geq 0$, то мы получили разложение на неприводимые. Если $k < 0$, то или f неприводим в $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$ и разложение получено, или множество I разбивается на два подмножества I_1 и I_2 таких, что каждый $f_j(t) = p^{k_j} \prod_{i \in I_j} g_i(t)$ содержится в $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$. Дальше раскладываем каждый многочлен $f_j(t)$ и на каком-то шаге разложение закончиться, так как на каждом понижаем степень многочлена.

2) Из 1) для любого $f \in Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$ имеет место представление

$$f(t) = p^k \prod_{i \in I} \frac{g_i(t)}{p^{n_i}} = \prod_{j=1}^{k} h_j(t) \prod_{i \in I} \frac{g_i(t)}{p^{n_i}},$$

где $\frac{g_i(t)}{p^{n_i}}$ – неприводимый полином из $\mathbb{Z}_p^{(*)}$, $k \in \mathbb{N}$ и множество I конечно. Многочлены $h_j(t) = p$ неприводимы в $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$, для $j = 1, \ldots, k$.

3) Рассмотрим многочлен

$$f(t) = \frac{\prod_{j=1, j \neq p}^{p+1} (t-j)}{p}.$$

Он принадлежит $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$, так как $j = 1, \ldots, p$ образуют полную систему вычетов. Для f имеется два различных представления на неприводимые в $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$:

$$f(t) = (t-1)\frac{\prod_{j=2,\ j \neq p}^{p+1} (t-j)}{p} = (t-(p+1))\frac{\prod_{j=1, j \neq p}^{p} (t-j)}{p}.$$

Теорема доказана.

Для атомарных колец определяются следующие важные понятия.

Определение 2. Если кольцо R является атомарным, то для любого ненулевого неединичного $r \in R$ эластичность r определяется следующим образом:

$$\rho(r) = \sup\{\frac{m}{n}|n, m \in L(r)\},$$

и эластичность R равна

$$\rho(R) = \sup_{r \in R_1}\{\rho(r)\},$$

где R_1 есть множество ненулевых неединичных элементов R. R называется полностью эластичным, если для каждого рационального числа q большего 1, существует некоторый ненулевой неединичный элемент $r \in R$, для которого $q = \rho(r)$.

Теорема 3. *Кольцо $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$ имеет бесконечную эластчность, то есть*

$$\rho(Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})) = \infty.$$

Доказательство

В работе [4] было доказано, что $\rho(\mathbb{Z}_{p^n}[t]) = \infty$. Для этого был построен неприводимый полином $f(x)$ и доказана неприводимость полинома $f^q(x) + p^{n-1}$, где q– большое простое число. Для полинома $g(x)$ из формулы

$$g(t) = (f^q(t) + p^{n-1})^2 = f^q(t)(f^q(t) + 2p^{n-1})$$

следует, что разложение слева имеет два неприводимых множителя, а в разложении справа $q+1$ неприводимый множитель. В силу модификации леммы Гензеля [6], два разложения для $g(t)$ можно продолжить на разложение в кольце $Int(\mathbb{Z}_p^{(*)})$. Наличие двух таких разложений для $g(t)$ и доказывает теорему.

Замечание. В работах [3, 5] было доказано, что $\rho(Int(\mathbb{Z})) = \infty$, и доказана полная эластичность кольца $Int(\mathbb{Z})$.

Библиографический список

1. *Kunyvskii B.E., Moroz B.Z., Voskresenskii V.E.* On integral models of an algebraic torus // Max - Planck - Institut fur Mathematic. Preprint Series, 2001(12).

2. *Cahen P.-J., ChabertJ.-L.* Integer-valued polynomials // Vol. 48 of Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., 1997.

3. *Chapman S.T., McClain B.A.* Irreducible polynomials and full elasticity in rings of integer-valued polynomials // J. Algebra, 2005. V. 293.

4. *Frei Ch., Frisch S.* Non-unique factorization of polynomials over residue class rings of the integers // Comm. Algebra, 2011. V. 39.

5. *Frisch S.* A construction of integer-valued polynomials with prescribed sets of lengths of factorizations // Comm. Algebra, 2012. V. 42.

6. *Hasse H.* Number theory / Springer-Verlag. Berlin, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ,
ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 7

Ответственный за выпуск *В.Н. Кузнецов*
Технический редактор *Л.В. Агальцова*
Подготовка оригинал-макета *Е.В. Сецинская, В.В. Кривобок*

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.