Саратовский национальный исследовательский университет
имени Н. Г. Чернышевского

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

Выпуск 8

Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина (Саратов, 12–15 сентября 2016 г.)

САРАТОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2016

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5
И88

И88 **Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам :** межвуз. сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2016. – Вып. 8 : Материалы XIV Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящ. 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова и С. М. Воронина (Саратов, 12–15 сентября 2016 г.) – 140 с.

В сборнике представлены материалы исследований в области алгебры и теории чисел на современном этапе.

Для специалистов в области алгебры, теории чисел и смежных вопросов.

УДК 511.3; 512.7; 517.5; 519
ББК 22.161.5

Работа издана в авторской редакции

ISSN 1810-4134

О НУЛЯХ ФУНКЦИИ ДЭВЕНПОРТА–ХЕЙЛЬБРОННА, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

А. С. Аминов (г. Душанбе)

E-mail: aminov.aslambek@mail.ru

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой,что $\chi(2) = i$

$$æ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2}{\sqrt{5} - 1}$$

Определение 1. *Функцией Дэвенпорта-Хейльбронна называется функция*

$$f(s) = \frac{1 - iæ}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1 + iæ}{2} L(s, \bar{\chi}_1) \qquad (1)$$

где

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Функция $f(s)$ введена и исследована в [1], (см. также [2,3]). Она удовлетворяет уравнению римановского типа:

$$g(s) = g(1 - s), \qquad (2)$$

где

$$g(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s).$$

Однако для $f(s)$ гипотеза Римана (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Res = \frac{1}{2}$) не выполняется. Более того, число нулей $f(s)$ в области

$Res > 1$, $0 < Ims \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная. В 1980 г. С. М. Воронин [3, 4] доказал, что тем не менее, прямая $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$. Пусть $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка $f(s)$ на промежутке $Res = \frac{1}{2}$, $0 < Ims \leq$ $\leq T$. Теорема С. М. Воронина формулируется так:

$$N_0(T) > cT \exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log\log T}\right), \qquad c > 0 \ - \ \textit{постояннная.}$$

В 1985 г. А. А. Карацуба [3] доказал следующий результат:

Теорема 1. *Пусть ε и ε_1 — произвольно малые фиксированные положительные числа не превосходящие $0,01$. Тогда при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Определение 2. *Если $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $f(u) \in C^\infty(B, 2B)$, $A \geq 1$,*

$$AB^{i-r} \ll |f^{(r)}(u)| \ll AB^{i-r}, \; r = 1, 2, 3, \cdots,$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(f(n)) \ll A^k B^\lambda, \quad \textit{где} \quad 0 \leq k \leq 0,5, \quad 0,5 \leq \lambda \leq 1,$$

то пара $(k; \lambda)$ называется экспоненциальной парой.

Тривиальная оценка показывает, что (0,1) является экспоненциальной парой. E. Phillips [4] показал, что если $(k; \lambda)$экспоненциальная пара, то

$$A(k;\lambda) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2k+2}\right) \qquad (A - \text{процесс})$$

$$B(k;\lambda) = (\lambda - 0,5, k + 0,5) \qquad (B - \text{ процесс})$$

также являются экспоненциальными парами.

Основным результатом этой работы является.

Теорема 2. *Пусть ε и ε_1 — произвольно малые фиксированные положительные числа не превосходящие $0,00001$, $(k; \lambda)$ — произвольная экспоненциальная пара, $\theta(k;\lambda) = \frac{k+\lambda}{2(k+1)}$. Тогда при $H = T^{\theta(k;\lambda)+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq H(\log T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Из работ [5, 6] следует, что

$$\theta_0 = \min_{(k;\lambda)} \theta(k;\lambda) \leq \frac{7}{22} = \frac{1}{3} - \frac{1}{66}.$$

Библиографический список

1. *Davenport H., Heilbronn H.* On the zeroes of certain Dirichlet series. I, II // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11.

2. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М. : Иностр. лит., 1953.

3. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М. : Физматлит, 1994.

4. *Phillips E.* The zeta-fucntion of Riemann; further developments of van der Corput's method // Quart. J. Math. (Oxford). 1933. Vol. 4.

5. *Graham S. W., Kolesnik G.* Van der Corput's Method of Exponential Sums. Cambridge University Press, 1991.

6. *Heath-Brown D. R., Huxley M. N.* Exponential sums with a difference // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 61.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

И. Н. Балаба, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва (г. Тула)
E-mail: ibalaba@mail.ru, dobrovol@tspu.tula.ru, i_rebrova@mail.ru

Многочленом Туэ порядка n называется многочлен вида $P(z)-\alpha Q(z)$, где $P(z)$, $Q(z)$ — целочисленные многочлены, такой, что многочлен $P(z)-\alpha Q(z)$ делится на многочлен $(z-\alpha)^n$. Это естественным образом приводит к рассмотрению $\mathbb{Z}[z]$-модуля пар Туэ вида $< P(z), Q(z) >$ из $\mathbb{Z}[z]^2$ порядка n, то есть таких пар, что соответствующий многочлен Туэ имеет порядок n.

Как показал М. Н. Добровольский в 60-х годах XX столетия, каждый модуль Туэ имеет два образующих многочлена (основные многочлены Туэ порядка n). Кроме того, в работах М. Н. Добровольского и В. Д. Подсыпанина было показано, что существуют рекуррентные формулы перехода от основных многочленов Туэ порядка n к основным многочленам Туэ порядка $n+1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01540).

Основная цель данного направления — исследовать модуль Туэ и алгоритмические проблемы вычисления основных многочленов Туэ, то есть построить алгоритмы символьных вычислений основных многочленов Туэ.

Другое направление исследований связано с изучением минимальных многочленов остаточных дробей алгебраических иррациональностей.

Целью этих исследований будет алгебраическая классификация приведенных алгебраических чисел в случае чисто вещественных алгебраических полей и приведенных обобщённых чисел Пизо в случае произвольной вещественной алгебраической иррациональности.

Теперь кратко остановимся на перечислении предлагаемых методов и подходов. Это методы алгебраической теории чисел и диофантова анализа, геометрии чисел, методы теории колец и модулей. Совокупность этих методов применительно к диофантовым приближениям и приложениям к теоретико-числовому методу в приближенном анализе успешно применяется в тульской школе теории чисел и является оригинальным подходом к рассматриваемым проблемам.

Прежде всего предполагается:

1. Исследовать алгебраическую структуру модулей Туэ.

2. Найти явные рекуррентные формулы для основных многочленов Туэ широкого класса алгебраических чисел.

3. Построить алгоритмы символьных вычислений для основных многочленов Туэ.

Дальнейшие исследования по данной тематике будут уточнены по результатам исследований и будут связаны с переносом результатов на многочлены Рота. Предполагается рассмотреть аналог модулей Туэ — модули Рота.

Таким образом, предполагается:

1. Исследовать алгебраические свойства модулей Туэ произвольного порядка.

2. Исследовать чисто-вещественные кубические поля, порожденные приведенными кубическими иррациональностями.

3. Табулировать основные многочлены Туэ для кубических иррациональностей.

Результаты исследований будут представлены в серии статей и в электронных ресурсах ПОИВС «ТМК».

Остановимся на современном состоянии исследований в данной области науки.

Вычисление многочленов Туэ и Рота, а также построение общей теории этих многочленов имеет принципиальное значение в теории диофантовых приближений.

В классической теории диофантовых приближений алгебраических чисел теоремы существования многочленов Туэ и Рота, основанные на искусном применении принципа Дирихле, позволили доказать знаменитую теорему Туэ — Зигеля — Рота о приближении алгебраических иррациональностей.

Как показали в 60-х годах 20-го столетия М. Н. Добровольский и В. Д. Подсыпанин, многочлены Туэ любого порядка можно конструктивно вычислять через основные многочлены. Эти результаты позволили им впервые получить матричные разложения кубических и биквадратичных иррациональностей.

Естественно продолжить эти исследования для расширения класса алгебраических иррациональностей, для которых можно получить матричные разложения.

Дальнейшее развитие этой теории на модули Рота, построение аналога основных многочленов для многочленов Рота должно сыграть принципиальную роль в теории диофантовых приближений алгебраических иррациональностей чисто вещественных алгебраических полей.

Решение научной проблемы приближения алгебраических решёток чисто вещественных алгебраических полей имеет принципиальное значение для теоретико-числового метода приближенного анализа, так как метод Фролова опирается на использование алгебраических сеток, порожденных чисто вещественными алгебраическими полями, а построение рациональных сеток, приближающих алгебраические, упирается в вопросы приближения алгебраических решёток целочисленными. Вопросы приближения алгебраических решеток целочисленными имеет принципиальное значение для метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова.

Матричные разложения алгебраических иррациональностей были введены М. Н. Добровольским и В. Д. Подсыпаниным в 60-х годах XX столетия. Их исследования не были практически опубликованы и сохранились только в личном научном архиве М. Н. Добровольского. В настоящее время это оригинальное обобщение цепных дробей интенсивно разрабатывается представителями тульской школы теории чисел.

Исследования по матричным разложениям алгебраических иррациональностей и функциональному уравнению гиперболической дзета-функции решеток целиком принадлежат представителям тульской школы теории чисел и предыдущие результаты в этой области позволяют предполагать, что намеченная в ряде статей программа исследований должна привести к цели.

В самое последнее время в работах представителей тульской школы теории чисел был установлен удивительный факт, что начиная с некоторого номера все остаточные дроби в разложении вещественной алгебраической иррациональности являются приведенными алгебраическими иррациональностями в случае чисто вещественных полей и приведенными обобщёнными числами Пизо в общем случае.

О разложение алгебраических иррациональностей степени $n > 2$ в цепные дроби известно очень мало. Это один из труднейших вопросов современной теории чисел. Поэтому изучение матричных разложений алгебраических чисел является актуальным.

Получение новых результатов по теории матричных разложений, по поведению остаточных дробей и их алгебраически сопряжённых чисел должно продвинуть решение вопросов о приближении алгебраических решёток целочисленными и построение новых алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов в методе Коробова [1–3].

Данная тематика продолжает исследования, поддержанные РФФИ (проекты № 02-01-00584, 05-01-00672, 07-01-96415-р_центр_а, 11-01-00571, 15-01-01540).

Библиографический список

1. *Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Юшина Е. И.* О матричной форме теоремы Галуа о чисто периодических цепных дробях // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 3(43).

2. *Добровольский Н. М., Соболев Д. К., Соболева В. Н.* О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1(45).

3. *Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н.* О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3(55).

ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА И СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ В ГРУППАХ АРТИНА, КОКСТЕРА С n-УГОЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя (г. Москва)
E-mail: vnbezv@rambler.ru

Пусть G – конечно порожденная группа Артина с копредставлением

$$G = \langle a_1, a_2, ..., a_k | \langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}}, i \neq j, i, j = \overline{1, k} \rangle, \qquad (1)$$

где $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}}$ – слово длины m_{ij}, состоящее из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j; m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, связанной с данной группой: $m_{ii} = 1, m_{ij} \geq 2, i \neq j$.

Фактор-группа группы G по нормальному делителю, порожденному элементами $\{a_i^2, i = \overline{1, k}\}$, имеющая представление

$$\overline{G} = \langle a_1, ..., a_k | (a_i a_j)^{m_{ij}}, i \neq j, (a_i)^2, i = \overline{1, k} \rangle, \qquad (2)$$

называется группой Кокстера, соответствующей группе Артина G (1).

Поставим в соответствие группе $G(\overline{G})$ конечный граф Γ, вершинам которого соответствуют образующие a_i, а каждому ребру, соединяющему a_i и a_j – определяющее соотношение $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_j a_i \rangle^{m_{ji}} ((a_i a_j)^{m_{ij}})$.

Если граф Γ есть дерево-граф, то соответствующая группа Артина (Кокстера) называется группой Артина (Кокстера) с древесной структурой. В этом классе групп $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$ [1–4].

Доказано [5], что в группах Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

Если граф Γ представляет собой объединение многоугольников с числом вершин $n \geq 3$ (считаем, что Γ – связный граф), то такую группу Артина (Кокстера) будем называть группой Артина (Кокстера) с n-угольной структурой.

Пусть граф Γ, соответствующий группе Кокстера (2), является объединением треугольников, тогда группу Кокстера $\overline{G}$ будем называть группой Кокстера с треугольной структурой.

Теорема 1. *В группах Кокстера*

$$\overline{G}_3 = \langle a_1, a_2, a_3 | (a_1 a_2)^{m_{12}}, (a_1 a_3)^{m_{13}}, (a_2 a_3)^{m_{23}} \rangle,$$

где $m_{ij} \geq 2$ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-03222 р_центр_а).

Теорема 2. *В конечно порожденной группе Кокстера* $\overline{G}$ *с треугольной структурой разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 3. *В конечно порожденной группе Кокстера* $\overline{G}$ *с треугольной структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

Если граф Г представляет собой объединение многоугольников с числом вершин $n > 3$, то группу Артина (Кокстера) будем называть группой Артина (Кокстера) с n-угольной, при $n > 3$, структурой [6].

Теорема 4. *В конечно порожденной группе Артина с* n*-угольной, при* $n > 3$*, структурой разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 5. *В конечно порожденной группе Артина с* n*-угольной, при* $n > 3$*, структурой разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 6. *В конечно порожденных группах Кокстера с* n*-угольной, при* $n > 3$*, структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Библиографический список

1. *Брискорн Э., Сайто К.* Группы Артина и группы Кокстера // Математика. 1974. Т. 18, № 6.

2. *Appel K., Schupp P.* Artin groups and infinite Coxeter groups // Invent. Math. 1984. T. 72.

3. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5, № 1.

4. *Безверхний В. Н., Добрынина И. В.* Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискрет. матем. 1999. Т. 17, № 3.

5. *Безверхний В. Н., Карпова О. Ю.* Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина с древесной структурой // Известия ТулГУ. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2006. Т. 12, № 1.

6. *Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б.* Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина и Кокстера // Алгоритмические проблемы в алгебре и теории вычислимости : сб. тр. Иваново, 2015.

О БАЗИСЕ ТОЖДЕСТВ ОДНОГО КЛАССА ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Д. А. Бредихин (г. Саратов)
E-mail: bredikhin@mail.ru

Алгебра отношений представляет собой упорядоченную пару (Φ, Ω), где Φ – множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними. Алгебра отношений с одной бинарной операцией образует группоид бинарных отношений. Мотивация рассмотрения группоидов бинарных отношений и ряд результатов в этом направлении можно найти в работах [1–4].

Для заданного множества Ω операций над отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Важным классом операций над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется диофантовой [5,6] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [7]), если она может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования.

Сосредоточим внимание на следующей $*$ бинарной диофантовой операции над отношениями, определяемой следующим образом: для всяких бинарных отношений ρ и σ, определенных на множестве U, положим

$$\rho * \sigma = \{(x, x) \in U \times U : \, (\exists u, v)(x, u) \in \rho \, \wedge \, (v, u) \in \sigma\}.$$

Основной полученный результат формулируется в следующий теореме, в которой найден базис тождеств многообразия, порожденных соответствующим классом группоидов бинарных отношений.

Теорема. *Группоид* $(A, \cdot)$ *принадлежит многообразию* $Var\{*\}$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим тождествам:*

$$(x^2y)y = x^2y, \qquad (xy)^2 = xy, \qquad x^2y^2 = y^2x^2,$$
$$(x^2y)z = (x^2z)y, \qquad (x^2y^2)z = x^2(y^2z)$$

Библиографический список

1. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids assosiated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44, № 1.

2. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1.

3. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2.

4. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra universalis. 2015. Vol. 73.

5. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360.

6. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирский матем. журн. 1997. № 1.

7. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Д. Брюно (г. Москва)
E-mail: abruno@keldysh.ru

Показано, что для вычисления сингулярных решений алгебраических и дифференциальных уравнений вблизи особенностей удобно вычислять аналоги многогранника Ньютона, и по ним выделять укороченные уравнения. Для асимптотического разложения решений определённого вида справедлива теорема, что их укорочение является решением соответствующего укороченного уравнения. Здесь предложен новый вид асимптотических разложений.

Многогранник

Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathrm{R}^n = \{Q = (q_1, \dots, q_n)\}$, $n \geq 2$, задано конечное множество точек $\mathbf{S} = \{Q_1, \dots, Q_k\}$. Их выпуклая оболочка $\Gamma = \left\{Q = \sum_{i=1}^{k} \mu_i Q_i,\ 0 \leq \mu_i \leq 1,\ \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1\right\}$ является выпуклым многогранником. Его граница $\partial\Gamma$ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$ размерностей $d = 0, 1, \dots, n-1$. Нульмерные грани — это вершины, одномерные — рёбра и $(n-1)$-мерные — гиперграни. Каждая грань $\Gamma_j^{(d)}$ является выпуклым многогранником. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют:

граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$ и нормальный конус

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle \,, Q', Q'' \in \mathbf{S}_j^{(d)}, Q''' \in \mathbf{S} \backslash \mathbf{S}_j^{(d)} \right\}, \tag{1}$$

где $P = (p_1, \ldots, p_n)$— точка сопряжённого к R^n пространства R_*^n, а $\langle P, Q \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i$ — скалярное произведение. Это ситуация афинной геометрии [1, гл. I].

Алгебраическое уравнение

Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$ или C^n, а $f(X)$ — многочлен. Корни уравнения $f(X) = 0$ образуют алгебраическое многообразие. Его точка X^0 называется особой, если в ней многочлен $f(X)$ и все его частные производные обращаются в ноль. Если $X^0 = 0$, то

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} a_i X^{Q_i}, \tag{2}$$

где $a_i = \mathrm{const} \neq 0$, $X^Q = x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$. При $X \to 0$ по разным путям разные слагаемые суммы (2) дают ведущие члены суммы (2).

Чтобы их выделить, рассмотрим множество векторных показателей степени $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = \mathbf{S}$, его выпуклую оболочку Γ. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: граничное подмножество $\mathbf{S}_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)} = \sum a_i X^{Q_i} \text{ по } Q_i \in \mathbf{S}_j^{(d)} \tag{3}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$. Если $x_i = b_i \tau^{p_i}$, $b_i, p_i = \mathrm{const} \in \mathrm{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\tau \to \infty$ и $P = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то ведущие слагаемые в сумме (2) объединены в укороченную сумму (3), которая квазиоднородна. Пусть вещественные постоянные $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} > 0$ и $z_i = x_i / x_1^{\alpha_i}$, $i = 2, \ldots, n-1$. Будем искать решение уравнения $f(X) = 0$ в виде ряда

$$x_n = x^{\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(z_2, \ldots, z_{n-1}) x_1^{l\kappa}, \tag{4}$$

где $\kappa, \lambda = \mathrm{const} > 0$.

Теорема. *Если уравнение $f(X) = 0$ имеет решением разложение вида (4) и $P = -(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0$ имеет решение $x_n = x_1^{\lambda} \varphi_0(z_2, \ldots, z_{n-1})$.*

Используя описанную выше конструкцию и степенные преобразования координат [1], можно вычислить разложения решений вида (4) [2, § 2].

Библиографический список

1. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М. : Наука, 1998.

2. *Bruno A. D.* Asymptotic solution of nonlinear algebraic and differential equations // International Mathematical Forum. 2015. Vol. 10, № 11.

ОТ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДО ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Д. Брюно (г. Москва)
E-mail: abruno@keldysh.ru

Рассматривается глобальное обобщение цепной дроби, дающее наилучшие диофантовы приближения. На нём основан способ вычисления основных единиц алгебраических колец и нахождение всех решений некоторого класса диофантовых уравнений.

Пусть в вещественном n-мерном пространстве $\mathrm{R}^n = \{X\}$ задано m однородных вещественных форм $f_i(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $2 \leq m \leq n$. Выпуклая оболочка множества значений $G(X) = (|f_1(X)|, \ldots, |f_m(X)|) \in \mathrm{R}^m_+$ для целочисленных $X \in \mathrm{Z}^n$ во многих случаях является выпуклым многогранным множеством, граница которого для $||X|| <$ const вычисляется с помощью стандартной программы. Точки $X \in \mathrm{Z}^n$, для которых значения $G(X)$ лежат на этой границе, названы граничными. Они являются наилучшими диофантовыми приближениями для корневых множеств указанных форм. Их вычисление даёт глобальное обобщение цепной дроби. Для $n = 3$ обобщить цепную дробь безуспешно пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Брун, Арнольд и многие другие [1].

Пусть $p(\xi)$ — целый неприводимый в Q многочлен степени n и λ — его корень. Набор основных единиц кольца $\mathrm{Z}[\lambda]$ можно вычислить по граничным точкам некоторой совокупности линейных и квадратичных форм, построенных по корням многочлена $p(\xi)$. До сих пор эти единицы вычислялись только для $n = 2$ (с помощью обычных цепных дробей) и $n = 3$ (с помощью алгоритма Вороного). Каждая единица определяет автоморфизм граничных точек в R^n и в R^m_+. В логарифмической проекции R_+^m на R^{m-1} можно найти фундаментальную область для группы автоморфизмов, соответствующих единицам.

С помощью этих конструкций можно находить целочисленные решения диофантовых уравнений специального вида. Аналогично вычисляются все указанные объекты для других колец поля $\mathrm{Q}(\lambda)$. Приведены примеры.

Наш подход обобщает цепную дробь, позволяет вычислить наилучшие совместные приближения, основные единицы алгебраических колец поля $\mathrm{Q}(\lambda)$ и все решения некоторого класса диофантовых уравнений для любого n [2].

Библиографический список

1. *Брюно А. Д.* Вычисление наилучших диофантовых приближений и основных единиц алгебраических полей // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 1.

2. *Брюно А. Д.* От диофантовых приближений к диофантовым уравнениям // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 1.

О ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПОЛУКОЛЬЦЕ $(0;\infty]$ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ[1]

Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков (г. Киров)
E-mail: vecht@mail.ru, chupdiv@yandex.ru

В работе начато исследование аддитивно идемпотентных полуколец $C_\vee^\infty(X)$ непрерывных функций, определенных на произвольном топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце $\langle(0;\infty]\,,\vee,\cdot\rangle$ положительных действительных чисел с добавленным поглощающим элементом ∞ и интервальной топологией, рассматриваемых с поточечными операциями взятия максимума $(\vee)$ и умножения $(\cdot)$ функций. Под полукольцом S мы понимаем алгебраическую структуру с коммутативно-ассоциативной операцией сложения и ассоциативной операцией умножения, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Источником идей и методов изучения аддитивно-сократимых полуколец непрерывных функций $C^\infty(X)$, принимающих значения из полукольца $(0;\infty]$, служит изложенная в монографии [1] теория полуколец непрерывных неотрицательных действительнозначных функций $C^+(X)$ с поточечными операциями сложения и умножения функций

[1]Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1375.2014/К).

и полуколец $C^{\vee}(X)$, полученных и заменой операции сложения на взятие поточенных максимума $\vee$. Кольцо $C(X)$ всех непрерывных на X действительнозначных функций служит кольцом разностей для полукольца $C^{+}(X)$.

Каждой функции $f \in C^{\infty}_{\vee}(X)$ сопоставим множества $\mathrm{H}(f) = f^{-1}(\infty)$ и $\operatorname{coz} f = X \setminus \mathrm{H}(f)$. Функция f^{*}, заданная на $\operatorname{coz} f$ равенством $f^{*}(x) = \frac{1}{f(x)}$ и принимающая значение 0 на $\mathrm{H}(f)$, непрерывна на X. Отображение $*\colon\ C^{\infty}_{\vee}(X) \to C^{\wedge}(X)$ является полукольцевым изоморфизмом.

Для каждого идеала I кольца $C(X)$ определим на полукольце $C^{\infty}_{\vee}(X)$ отношение $\gamma(I)$, заданное свойством $f\,\gamma(I)\,g \Longleftrightarrow f^{*} - g^{*} \in I$. Оно является конгруэнцией тогда и только тогда, когда I — абсолютно выпуклый идеал. Конгруэнции $\gamma(I)$ являются аналогами идеальных конгруэнций полуколец непрерывных функций $C^{+}(X)$.

Идеал I полукольца $C^{\infty}_{\vee}(X)$ назовем *H-идеалом*, если $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g)$ влечет $g \in I$ для любых $f \in I$ и $g \in C^{\infty}_{\vee}(X)$. Для $f, g \in C^{\infty}_{\vee}(X)$ положим $f \sim_{H} g$, если $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g)$. Отношение $\sim_{H}$ является конгруэнцией на полукольце $C^{\infty}_{\vee}(X)$. Конгруэнцию на полукольце $C^{\infty}_{\vee}(X)$ назовём *H-конгруэнцией*, если она содержит $\sim_{H}$.

Отметим, что полукольца $C^{\infty}(X)$ и $C^{\infty}_{\vee}(X)$ имеют общую теорию делимости [1], поэтому справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Для полукольца $C^{\infty}_{\vee}(X)$ имеют место следующие утверждения:*

1. *В $C^{\infty}_{\vee}(X)$ нет собственных полустрогих идеалов.*
2. *Решетка H-идеалов полукольца $C^{\infty}_{\vee}(X)$ является ретрактом решетки идеалов $C^{\infty}_{\vee}(X)$.*
3. *Максимальными H-конгруэнциями полукольца $C^{\infty}_{\vee}(X)$ являются двуклассовые конгруэнции $\rho_{I} = \{I, C^{\infty}_{\vee}(X) \setminus I\}$ по всевозможным простым H-идеалам I, и только они.*
4. *Решётка $\operatorname{Con} C^{\infty}_{\vee}(X)$ конгруэнций на полукольце $C^{\infty}_{\vee}(X)$ над тихоновским пространством X не модулярна при $|X| \geq 2$.*

Известно [2], что решётки конгруэнций полуколец $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ над топологическими пространствами X являются решётками с псевдодополнениями. Аналогичное утверждение справедливо и для решётки конгруэнций полукольца $C^{\infty}_{\vee}(X)$. Обозначим через ϱ_{A} отношение равенства функций на множестве $A \subseteq X$: $f\,\varrho_{A}\,g \Longleftrightarrow f|_{A} = g|_{A}$.

Предложение 2. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Любая конгруэнция $\rho \in \operatorname{Con} C^{\infty}_{\vee}(X)$ имеет псевдодополнение ϱ_{A}*

для некоторого единственного канонически замкнутого подмножества A пространства X. Обратно, для каждого канонически замкнутого множества A в X конгруэнция ϱ_A является псевдодополнением некоторой конгруэнции на $C^\infty_\vee(X)$.

Отношение ρ на полукольце $C^\infty_\vee(X)$ является дополняемой конгруэнцией тогда и только тогда, когда $\rho = \varrho_A$ для некоторого (единственного) открыто-замкнутого подмножества A пространства X. При этом, любая дополняемая конгруэнция на $C^\infty_\vee(X)$ имеет единственное дополнение.

В заключение отметим, что все конгруэнции аддитивно идемпотентного полуполя $U^\vee(X)$ непрерывных положительных функций на X продолжаются до конгруэнций полукольца $C^\infty_\vee(X)$. При этом наименьшим продолжением конгруэнции ρ полуполя $U^\vee(X)$ с ядром K является конгруэнция ρ_K, заданная условием $f\,\rho_K\,g \Longleftrightarrow gk \le f \le gk'$ для некоторых $k, k' \in K$, а наибольшим — конгруэнция δ_K, совпадающая с ρ на $U^\vee(X)$ и склеивающая все функции с непустым H-множеством.

Библиографический список

1. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Полукольца непрерывных функций. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2011.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ СДВИГОВ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ[1]

А. М. Водолазов (г. Саратов)
E-mail: vam21@yandex.ru

Пусть K – локальное поле, являющиеся конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Поле K является нормированным с нормой $\|\cdot\|_K$, которая является продолжением нормы с поля $\mathbb{Q}_p$. $\mathbb{Z}_K = \{x \in K \mid \|x\| \le$ $\le 1\}$–кольцо целых в K с единственным максимальным идеалом $\mathbb{P}_K =$ $= \{x \in K \mid \|x\| < 1\} = \pi\mathbb{Z}_K$. Любое число $x \ne 0$ из K единственным образом представимо в виде

$$x = \pi^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} x_k \pi^k \ ,$$

где $x_0 \ne 0$ и x_k элемент множества представителей смежных классов $\mathbb{Z}_K/P$, которое изоморфно конечному полю из $q = p^f$ элементов.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152 А).

Дробной частью числа x называется $\{x\}_\pi = p^\gamma \sum_{k=0}^{-\gamma-1} x_k\pi^k$, множество H_0 состоит из чисто дробных чисел $x = \{x\}_\pi$. Множество $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{K} \| \|x-a\|_K \leq p^\gamma\}$ является π-адическим шаром. Обозначим $D_{-N}(M)$, где $N, M \in \mathbb{N}$, множество локально постоянных функций носитель которых содержиться в $B_N(0)$ и являющихся π^M – периодическими.

Для построения кратномаштабного анализа на K [1–3] одним из важных условий является существование функции φ сдвиги, которой на элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{K})$. В случае полей p-адических чисел этот вопрос изучен С.Ф. Лукомским. Мы изучаем способы нахождения таких функций в случае локальных полей.

Теорема. *Если поле K отлично от поля $\mathbb{Q}_p$ при $p = 2, 3$, в этом случае надо взять $M \geq 2$, то множество $\varphi \in D_{-N}(M)$, сдвиги которых на элементы из H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(K)$ содержат не менее $q^{N+M} - 4(q^{N-1} - 1)$ линейно независимых функци в пространстве $D_{-N}(M)$.*

Нами получен алгоритм нахождения таких функций и способы определения коэффициентов разложения по системе сдвигов этих функций.

Библиографический список

1. *Jiang H., Li D., Jin N.* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294.

2. *Behera B., Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure Appl. Math. 2012. Vol. 3.

3. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, № 5.

ЭФФЕКТИВНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С ЦЕЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧКАХ

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков (г. Донецк)
E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $c > 0$. Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(a, c; z)$ определяется равенством

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$$

и является целой функцией переменной $z \in \mathbb{C}$. В случае, когда $c \in \mathbb{N}$ и $-a \in \mathbb{N}$, функция $\Phi(a, c; z)$ выражается через многочлен Лагерра. Для этого случая авторами получена следующая оценка снизу для $|\Phi(a, c; z)|$ при алгебраических z.

Теорема. *Пусть $c \in \mathbb{N}$ и α – алгебраическое число степени d и высоты h. Тогда существует эффективная постоянная $m_0 = m_0(\alpha, c) > 0$ такая, что при всех натуральных $m > m_0$ выполнено неравенство*

$$|\Phi(-m, c; \alpha)| \geqslant \frac{1}{h^{md}} \left(\frac{(c-1)!}{6^m\,(c+m-1)!} \right)^{d-1}.$$

Отметим, что это неравенство может не выполняться для некоторого алгебраического α степени d при некоторых $c \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant d+1$. Кроме того, арифметические требования на величины m, c, α в теореме являются существенными. А именно, асимптотика функции $\Phi(a, c; z)$ при $a \to -\infty$ показывает, что при любых фиксированных $c > 0$ и $\alpha > 0$ равенство $\Phi(a, c; \alpha) = 0$ выполняется для бесконечной последовательности отрицательных чисел a, стремящейся к $-\infty$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ МЕТОДОМ РАССЕЧЕНИЯ

Г. В. Воскресенская (г. Самара)
E-mail: galvosk@mail.ru

Замечательным свойством модулярной формы, представляемой в виде эта-частного, является то, что ее дивизор сосредоточен в параболических вершинах. Основная идея исследования состоит в представлении пространства $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ в виде $f(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi_2) \oplus W$, где $f(z)$— эта-произведение, $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi_1)$, $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi$, размерность пространства W не зависит от k, а при возрастании k она значительно меньше, чем $dim \quad S_k(\Gamma_0(N), \chi)$. Мы получим ряд структурных теорем, аналогичных следующей.

Теорема. *Пусть $N \equiv 5 \pmod{12}$. Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(N)) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3,$$

где

$V_1 = \eta^4(Nz)\eta^4(z) \cdot M_{k-4}(\Gamma_0(N)), V_2 =< \eta^4(Nz)\eta^4(z) >^{\perp} \cdot G(z),$
$V_3 = S_2(\Gamma_0(N)) \cdot H(z),$

$G(z) = E_4^{\frac{k-4}{4}}(z), H(z) = E_6^{\frac{k-2}{6}}(z)$, *при* $k \equiv 0 \pmod 4$,
$G(z) = E_6^{\frac{k-4}{6}}(z), H(z) = E_4^{\frac{k-4}{4}}(z)$, *при* $k \equiv 2 \pmod 4$,
пространство $< \eta^4(Nz)\eta^4(z) >^{\perp}$ *— ортогональное дополнение к* $< \eta^4(Nz)\eta^4(z) >$ *в* $S_4(\Gamma_0(N))$.

В докладе будет обсуждаться также вопрос, когда имеет место точное рассечение, то есть $W = \{0\}$ [1–4].

Библиографический список

1. *Ono K.* The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence, 2004.
2. *Dummit D., Kisilevsky H., McKay J.* Multiplicative products of $\eta-$functions // Contemp. Math. 1985. Vol. 45.
3. *Voskresenskaya G. V.* One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. Vol. 11.
4. *Воскресенская Г. В.* О пространствах модулярных форм четного веса // Вестник СамГУ. 2014. Т. 121.

ПОЛЯ U-ИНВАРИАНТОВ И КОНСТРУКЦИЯ U-ПРОЕКТОРА

К. А. Вяткина (г. Самара)
E-mail: vjatkina.k@gmail.com

Цель доклада — предложить метод построения специального оператора — U-проектора. U-проектор позволяет конструировать системы функций, свободно порождающих поля U-инвариантов. В докладе будут приведены примеры таких построений для присоединённого и произвольного представлений редуктивных расщепимых групп [1–3].

Пусть K – поле характеристики нуль, $\mathfrak{u}$ — нильпотентная алгебра Ли над K, а $U = \exp \mathfrak{u}$ соответствующая ей унипотентная группа. Обозначим $\mathcal{A}$ коммутативную ассоциативную конечно-порождённую алгебру над K без делителей нуля, а $\mathcal{F}$ — поле частных $\mathcal{A}$. Пусть D – гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{u}$ в алгебру Ли локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$. Тогда группа U действует в A по формуле $g(a) = \exp D_x(a),\ g = \exp(x)$.

Определение 1. U-проектором *называется гомоморфизм алгебры* $\mathcal{A}$ *на поле инвариантов* $\mathcal{F}^U$, *тождественный на* $\mathcal{A}^U$.

Зафиксируем цепочку идеалов $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n \supset \mathfrak{u}_{n-1} \supset \dots \supset \mathfrak{u}_1 \supset \mathfrak{u}_0 = 0$, где $\operatorname{codim}(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{u}_{i+1}) = 1$ и с каждым $\mathfrak{u}_i$ свяжем подалгебру инвариантов $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_i} \subset \subset \mathcal{A}$. Пусть i_1 — наименьший номер, такой что $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}} \subsetneq \mathcal{A}$ и зафиксируем $x_1 \in \mathfrak{u}_{i_1} \setminus \mathfrak{u}_{i_1 - 1}$.

Лемма 1. *Существуют элементы $a_{1,1} \in \mathcal{A}, a_{1,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$ такие, что*

$$D_{x_1}(a_{1,1}) = a_{1,0}. \tag{1}$$

Обозначим элемент $Q_1 = a_{1,1} \cdot a_{1,0}^{-1}$ из локализации $\mathcal{A}_1$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $a_{1,0}$, такой что $D_{x_i}(Q_1) = 1$ и свяжем с ним гомоморфизм $S_1 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ вида:

$$S_1(a) = a - D_{x_1}(a)Q_1 + {D_{x_1}}^2(a)\frac{Q_1^2}{2!} - {D_{x_1}}^3(a)\frac{Q_1^3}{3!} + \dots$$

Подалгебра $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ инвариантна относительно всех D_x, $x \in \mathfrak{u}$. Отображение S_1 продолжается до гомоморфизма $\mathcal{A}_1$ на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$, тождественного на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$. Переходя к следующему наименьшему i_2, такому что $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_2}} \subsetneq \mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ продолжим процесс. В результате получаем цепочку $n \geq i_m > \dots > i_2 > i_1 \geq 1$, наборы элементов $a_{k,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$ и $a_{k,1} \in \mathcal{A}$, удовлетворяющие (1) и отображений $S_1, \dots, S_m$. Обозначим $\mathcal{A}_*$ локализацию алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $\{a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{m,0}\}$. Рассмотрим отображение

$$P = S_m \circ \dots \circ S_2 \circ S_1.$$

Теорема 1. *Отображение P является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_*^{\mathfrak{u}}$ тождественным на $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$. То есть P является U-проектором.*

U-проектор можно использовать для нахождения набора функций, свободно порождающих поля U-инвариантов. Рассмотрим U-инвариантное открытое подмножество $X_0 = \{x \in X_0 : a_{k,0}(x) \neq 0, 1 \leq k \leq m\}$ и подмножество в нем

$$\mathfrak{S} = \{x \in X_0 : \ a_{k,1}(x) = 0, \ 1 \leq k \leq m\}.$$

Определеним отображение ограничения $\operatorname{Res} \colon K[X_0] \to K[\mathfrak{S}]$ [1–3].

Теорема 2. *Предположим, что $\{a_{k,1} : \ 1 \leq k \leq m\}$ порождают определяющий идеал для подмножества $\mathfrak{S}$ в алгебре $K[X_0]$. Пусть $b_1, \dots, b_s \in \mathcal{A}$ система элементов такая, что*

$$Res(b_1), \dots, Res(b_s), Res(a_{0,0})^{\pm 1}, \dots, Res(a_{m,0})^{\pm 1}$$

порождают алгебру $K[\mathfrak{G}]$. *Тогда* $P(b_1), \ldots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \ldots, a_{m,0}^{\pm 1}$ *порождают алгебру инвариантов* $K[X_0]^U$. *В частности,* $P(b_1), \ldots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \ldots, a_{m,0}^{\pm 1}$ *порождают поле инвариантов* $K(X)^U$.

Библиографический список

1. *Panyushev D. I.* Complexity and rank of actions in invariant theory // Jounal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 95, № 1.

2. *Вяткина К. А., Панов А. Н.* Поле U-инвариантов присоединенного представления группы $GL(n, K)$ // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 1.

3. *Вяткина К. А.* U-проектор для присоединённого представления группы $GL(n, K)$ // Вестник СамГУ. 2015. Т 132, № 10.

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ВАРИНГА В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Гриценко (г. Москва), Н. Н. Моткина (г. Белгород)
E-mail: s.gritsenko@gmail.com, motkina@bsu.edu.ru

Проблемой Варинга называют задачу о числе решений уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N$$

с натуральными числами $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $n \geq 3$.

При $n \geq 3$ функция $G(n)$ равняется наименьшему k такому, что любое натуральное $N \geq N_0(n)$ представляется суммою k натуральных слагаемых вида x^n. Для $G(n)$ справедливы оценки [1]:

$$n < G(n) \leq cn \log n,$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Пусть при $n \geq 3$ функция $G_{a,b}(n)$ равняется наименьшему k такому, что любое натуральное $N \geq N_0(n)$ представляется в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — натуральные числа такие, что $a \leq \{\eta x_j^n\} < b$, a и b — произвольные действительные числа, $0 \leq a < b \leq 1$, η — алгебраическое число степени $s \geq 2$, $j = 1, 2, \ldots k$.

Нами получен следующие оценки [2].

Теорема. *Для любых действительных a и b, $0 \le a < b \le 1$, существует $c_0 = c_0(a, b) > 0$ такое, что*

$$\max(n, \frac{1}{b-a}) < G_{a,b}(n) \le c_0 n \log n.$$

Библиографический список

1. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. М. : Наука, 1983.

2. *Гриценко С. А., Мотькина Н. Н.* О разрешимости уравнения Варинга в натуральных числах специального вида // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1(57).

СОБСТВЕННЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ЯДЕРНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ТОЖДЕСТВОМ ЛИЕВОЙ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ СТЕПЕНИ 5 И 6

А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев (г. Москва)
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru, pchelinzev@mail.ru

Рассматриваются только ассоциативные алгебры над полем K характеристики нуль. Всюду ниже используются следующие обозначения: $(f_1, f_2, \dots)^T$ и $\{f_1, f_2, \dots\}^T$ – Т-идеал и Т-пространство, порожденные элементами $f_1, f_2, \dots$; $[x_1, \dots, x_n]$ – правонормированный коммутатор степени $n \ge 2$; $\mathrm{LN}\,(n) : [x_1, \dots, x_n] = 0$ – тождество лиевой нильпотентности степени n; $T^{(n)} = ([x_1, \dots, x_n])^T$ и $V^{(n)} = \{[x_1, \dots, x_n]\}^T$ – Т-идеал и Т-пространство соответственно, порожденные коммутатором степени n; $F^{(n)}$ – относительно свободная алгебра счетного ранга с тождеством $\mathrm{LN}\,(n)$; $h(x, y, z) = \left[[x, y]^2, z\right]$ – элемент Холла; $h'(x, y) = \left[[x, y]^2, y\right]$ – слабый элемент Холла; $Z\,(A) = \{z \in A \mid (\forall a \in A)\,[z, a] = 0\}$ – центр алгебры A; $Z^*\,(A) = \{z \in Z\,(A) \mid zA \subseteq Z\,(A)\}$ – ядро алгебры A; ядро A совпадает с наибольшим идеалом алгебры A, содержащимся в её центре.

Напомним, что многочлен называется собственным, если все его частные производные равны нулю. Коммутаторы от порождающих (лиевы одночлены) являются собственными многочленами. Собственные многочлены образуют подалгебру в алгебре F, которая порождается лиевыми одночленами степени ≥ 2.

Ещё в 60-е годы XX века В. Н. Латышев [1, 2] начал изучать алгебры $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$. В частности, им был построен аддитивный базис алгебры

$F^{(3)}$ и доказана шпехтовость многообразия ассоциативных алгебр с тождеством $\mathrm{LN}\,(4)$ над полем характеристики 0. Отметим также, что тождества алгебры Грассмана изучались в [3]. В 1978 году И. Б. Воличенко [4] построил аддитивный базис алгебры $F^{(4)}$ над полем характеристики 0. Используя работы [1] и [4], легко получить описание центров алгебр $F^{(3)}$ и $F^{(4)}$: $Z\left(F^{(3)}\right) = V^{(2)}, \quad Z\left(F^{(4)}\right) = T^{(3)} + \left(V^{(2)}\right)^2$.

Отметим также, что в [5] построена алгебра $E^{(m)}$, называемая расширенной алгеброй Грассмана кратности m и играющая важную роль при изучении алгебр $F^{(2m+1)}$.

В [6] изучались центральные многочлены от двух переменных алгебр $F^{(5)}$ и $F^{(6)}$. Кроме того, в [6] были высказаны гипотезы о центре и ядре алгебр $F^{(n)}$ при $n = 5, 6$:

$$Z\left(F^{(5)}\right) \subseteq T^{(4)}, Z^*\left(F^{(5)}\right) = T\left(E^{(2)}\right) = \left(\mathrm{LN}\,(5)\,, h'\right)^T, Z^*\left(F^{(6)}\right) = T^{(5)}.$$

Данная работа является непосредственным продолжением работы [6] и посвящена доказательству указанных гипотез в случае алгебр над полем характеристики 0. Во-первых, доказана гипотеза о строении ядра алгебры $F^{(5)}$: $Z^*\left(F^{(5)}\right) = T\left(E^{(2)}\right) = \left(\mathrm{LN}\,(5)\,, h'\right)^T$ (теорема 1), во-вторых, – гипотеза о центре: $Z\left(F^{(5)}\right) \subseteq T^{(4)}$. Попутно доказано, что всякий собственный центральный многочлен алгебры $F^{(5)}$ содержится в Т-пространстве $\{h, [x_1, \ldots, x_4]\}^T + (h')^T$ (теорема 2). Наконец, доказано, что $Z^*\left(F^{(6)}\right) = T^{(5)}$. Показано также, что всякий собственный центральный многочлен алгебры $F^{(6)}$ содержится в $V^{(4)}V^{(2)} + T^{(5)}$ (теорема 3). Отметим, что при доказательстве основных результатов существенно используются супералгебры, именно с рассмотрением кососимметрических элементов от произвольного числа переменных и связано ограничение на характеристику.

Библиографический список

1. *Латышев В. Н.* О выборе базы в одном Т-идеале // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4, № 5.

2. *Латышев В. Н.* О конечной порожденности Т-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6, № 6.

3. *Krakowski D., Regev V.* The polynomial identities of the Grassman algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 181.

4. *Воличенко И. Б.* Т-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Минск, 1978 (Препринт / Ин-т математики АН БССР).

5. *Гришин А. В., Цыбуля Л. М., Шокола А. А.* О Т-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах // Фунд. и прикл. матем. 2010. Т. 16, № 3.

6. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 11.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там (г. Белгород)
E-mail: doductam140189@gmail.com

Гипотеза Римана утверждает, что все эти нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$. Эта гипотеза ещё не доказана и не опровергнута.

Пусть $N_0(T)$ — число нулей функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих в интервале $0 < t \le T$. В 1942 г. А. Сельберг [1] доказал следующую оценку:

$$N_0(T+H) - N_0(T) \ge cH \ln T, \tag{1}$$

где $T \ge T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{0,5+\varepsilon}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

В 1984 г. А. А. Карацуба [2] доказал оценку (1) для отрезка критической прямой меньшей длины $[T, T+H], H = T^{27/82+\varepsilon}$. А. А. Карацуба в [3,4] рассматривал эту задачу "в срденем ". Он доказал, что почти все отрезки $[T, T+X^{\varepsilon}]$, где $X \le T \le 2X$, $X \ge X_0(\varepsilon) > 0$ содержат более $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon}\ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$.

В 1988 г. Л. В. Киселева [5] получила результат подобного рода, но для отрезка $(X, X+X^{11/12+\varepsilon})$. В настоящей работе автор уменьшил длину отрезка осреднения. Доказана следующая теорема:

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, $X > X_0(\varepsilon) > 0$, $X_1 \ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X \le T \le X + X_1$,

$$\exp\left(\exp\left(2a\sqrt{\log\log Y}\right)\right) \le H \le X^{1/3}.$$

Через E обозначим множество тех T из промежутка $[X, X+X_1]$, для которых интервал $[T, T+H]$ содержит меньше, чем

$$c_0 H \ln H \exp\left(-a\sqrt{\log\frac{\log X}{\log H}}\right)$$

число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, где $c_0 = c_0(\varepsilon) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от ε. Тогда для меры этого множества $\mu(E)$ справедлива оценка $\mu(E) \le X_1 H^{-0,4}$.

Библиографический список

1. *Selberg A.* On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. Vol. 10.

2. *Карацуба А. А.* О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 3.

3. *Карацуба А. А.* Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 6.

4. *Карацуба А. А.* О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 2.

5. *Киселева Л. В.* О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на "почти всех" коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52, вып. 3.

О ПОСТРОЕНИИ НОРМАЛИЗАТОРА КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННОЙ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ КОКСТЕРА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

И. В. Добрынина (г. Тула)
E-mail: dobrynirina@yandex.ru

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1,n}\rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$, $i \neq j$.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Γ такой, что вершинам графа Γ соответствуют образующие a_i, $i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой.

Группы Кокстера с древесной структурой введены В. Н. Безверхним [1] в 2003 году, алгоритмические проблемы в них рассматривались В. Н. Безверхним и О. В. Инченко.

Группу Кокстера с древесной структурой G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1\rangle$ и $G_{jk} = \langle a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1\rangle$, а

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-03222 р_центр_а).

всякому ребру $\bar{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} – циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 = 1\rangle$.

Под проблемой вхождения будем понимать проблему нахождения алгоритма, позволяющего для данной конечной системы элементов M группы G определить, принадлежит ли произвольно выбранный элемент группы G подгруппе, порожденной множеством M.

Теорема 1. [2] *Пусть группа* $G = \langle\prod_{s=1}^{n} *G_s; relG_1, \dots, relG_n, \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}\rangle$ *есть древесное произведение групп, объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij} < G_i$ *и* $U_{ji} < G_j$ *с помощью фиксированного набора изоморфизмов* $\{\varphi_{ij}\} : \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. *Тогда если подгруппы* U_{ij} *и* U_{ji} *обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы 1) проблема вхождения; 2) проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппой* $U_{ij} < G_i$; *3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы* $H < G_i$ *с подгруппой* $U_{ij} < G_i$, *то в группе* G *разрешима проблема вхождения.*

Следствие. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 2. [3] *Пересечение двух конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности конечно порожденных подгрупп, если для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, \dots, H_s$ группы G и любых слов $w_1, \dots, w_s \in G$ существует алгоритм, позволяющий установить, пусто или нет пересечение $w_1H_1 \cap \dots \cap w_sH_s$.

Теорема 3. [4] *В группах Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Теорема 4. *В группах Кокстера с древесной структурой нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден.*

Теорема 5. *Существует алгоритм, выписывающий образующие нормализатора конечно порожденной подгруппы группы Кокстера с древесной структурой.*

Библиографический список

1. *Безверхний В. Н.* О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и их приложения: тез. докл. V Междунар. конф. Тула, 2003.

2. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп : межвуз. сб. науч. тр. Тула, 1981.

3. *Безверхний В. Н., Инченко О. В.* Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. № 2.

4. *Инченко О. В.* Разрешимость проблемы пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой // Вестник ТулГУ. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2010. № 1.

ОБ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ В СЛОВАХ И ДЛИНАХ

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина (г. Ярославль)
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

Обозначим через Π_m свободную полугруппу с пустым словом в качестве нейтрального элемента ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m (вместо a_1 и a_2 будем, как обычно, писать a и b соответственно), а через $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ – алфавит неизвестных.

Г. С. Маканин [1] построил алгоритм, позволяющий для произвольной системы уравнений в словах

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i, \tag{1}$$

где w_i и u_i $(i = 1, \ldots, k)$ – слова в алфавите $\{a_1, \ldots a_m\} \cup X$, определить, имеет ли она решение в полугруппе Π_m.

В настоящее время остается открытым известный уже почти полвека вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|. \tag{2}$$

Системы вида (2) с дополнительными условиями рассматривались, например, в работах [2–4].

V. Diekert предложил изучать в свободных полугруппах системы неравенств вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) \leq u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m), \qquad (3)$$

где для слов w и u в алфавите образующих свободной полугруппы запись $w \leq u$ означает, что *последовательность букв w является подпоследовательностью букв u* , т.е. существуют такое число $n \leq |w|$ и такие слова w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_n, u_{n+1}, что

$$w = w_1 \ldots w_n, \quad u = u_1 w_1 u_2 \ldots u_n w_n u_{n+1},$$

рассматривая их как обобщение систем уравнений (1), так как $w = u$ тогда и только тогда, когда $w \leq u \,\&\, u \leq w$.

Отношение $w \leq u$ является отношением частичного порядка на полугруппе Π_m, то есть оно транзитивно и антисимметрично. Это еще один довод для обоснования естественности рассмотрения систем неравенств вида (3).

Вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем неравенств (3) в настоящее время открыт. Но если к отношению $w \leq u$ добавить предикат равенства длин, то получим алгоритмически неразрешимую задачу.

Теорема 1. *Невозможен алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \leq u_i \,\&\, \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j|$$

определить, имеет ли она решение.

Заметим, что $\exists$-теория отношения равенства $=$ на полугруппе Π_m алгоритмически разрешима. Это следует из фундаментальной теоремы Г. С. Маканина [1], так как отрицание равенства из формул можно удалить с помощью позитивной $\exists$-формулы.

В то же время $\exists$-теория отношения частичного порядка $\leq$ на полугруппе Π_2 алгоритмически неразрешима. Это доказывается по той же схеме, что и приведенная выше теорема.

Библиографический список

1. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Матем. сборник. 1977. Т. 103(145), № 2 (6).

2. *Дурнев В. Г.* Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 5.

3. *Косовский Н. К.* Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки науч. семинаров Ленинградского отделения Матем. института АН СССР. Л., 1972. Т. 32.

4. *Косовский Н. К.* О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов // Записки науч. семинаров Ленинградского отделения Матем. института АН СССР. Л., 1973. Т. 33.

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА НА МНОЖЕСТВАХ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА[1]

А. А. Жукова, А. В. Шутов (г. Владимир)
E-mail: georg967@mail.ru, a1981@mail.ru

Пусть L – некоторая решетка пространства R^d, v – иррациональный относительно решетки L вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над Z вместе с единицей, тогда отображение сдвига $S : x \to x + v \pmod L$ переводит тор $T^d = R^d/L$ в себя. Предположим, что X – некоторое подмножество T^d. Обозначим

$$r(v,a,n,X) = \sharp\{k : 0 \le i \le n-1, S^i(a) \in X\} - n\frac{|X|}{\det L}$$

– остаточный член многомерной проблемы распределения дробных долей линейной функции.

Если $r(v,a,n,X) = O(1)$, то множество X назовем множеством ограниченного остатка.

Рассмотрим разбиение многомерного тора

$$T^d = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{1}$$

на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d,$$

где $T_i = \iota(T_i)$.

Разбиение (1) будем называть перекладывающимся, если существуют векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$ такие, что отображение $S^* : x \to x + v_j$, где $x \in T_j$,

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00360-а).

переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S.

Справедлива следующая теорема [1, 2].

Теорема 1. *Множества T_j, где $j = 0, 1, \ldots, d$, являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига S.*

Назовем нормированной функцией распределения функцию

$$\overline{\rho}_j(a, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\left\{i : 0 \le i < n, \frac{r_j(a,i) - r_j^-(a)}{r_j^+(a) - r_j^-(a)} \in [0; x]\right\}}{n},$$

где $r_j(a, n) = r(v, a, n, T_j)$, $r_j^-(a) = \inf\limits_n r_j(a, n)$, $r_j^+(a) = \sup\limits_n r_j(a, n)$ и $x \in [0; 1]$.

Одним из свойств нормированной функции распределения остаточного члена является инвариантность этой функции относительно a, то есть

Теорема 2. *Нормированная функция распределения $\overline{\rho}_j(a, x)$ не зависит от a.*

При $d = 1$ имеем $\overline{\rho}_j(a, x) = x$. Для любого $d \ge 2$ нами построен эффективный алгоритм нахождения нормированных функции распределения $\overline{\rho}_j(a, x)$, где $j = 0, 1, \ldots, d$. С использованием этого алгоритма найден явный вид функций $\overline{\rho}_j(a, x)$, где $j = 0, 1, \ldots, d$, для семейства перекладывающихся разбиений двумерного тора, построенных Абросимовой в [3, 4]. Кроме того, нами показано, что в случаях $d = 2$ и $d = 3$ имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что множество T является полиэдром, тогда соответствующие нормированные функции распределения $\overline{\rho}_j(x)$, где $0 \le j \le d$, $d = 2$ или $d = 3$, представляют собой кусочные многочлены степени не выше d.*

Библиографический список

1. *Журавлев В. Г.* Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, вып. 1.

2. *Шутов А. В.* Многомерные обобщения сумм дробных долей и их теоретико-числовые приложения // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1 (45).

3. *Абросимова А. А.* BR-множества // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 2.

4. *Абросимова А. А.* Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4.

КОРОТКИЕ ДВОЙНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СУММЫ НА МАЛЫХ ДУГАХ

Б. М. Замонов (г. Душанбе)
E-mail: zamonov@mail.ru

И. М. Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\le x} \Lambda(n) e(\alpha n^k), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau$$

при $k = 1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2) \ll q \ll x^{1/3}, \qquad y > x^{2/3+\varepsilon},$$

основу которой наряду с «решетом Виноградова», при $k = 1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\le 2M} a(m) \sum_{\substack{U<n\le 2N \\ x-y<mn\le x}} b(n) e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N \le U < 2N$, $x > x_0$, y – вещественные числа.

Затем К. Б. Хейзелгроув [2], В. Статулявичус [3], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4], Zhan Tao [5] получили нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \ge x^{\theta}$, q — произвольное и доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \le H$, $H = N^{\theta}$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$ изучили Liu Jianya и Zhan Tao [6], получив нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ при $y \ge x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

В [7] была получена нетривиальная оценка сумм $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ на малых дугах, в которых имеется «длинная» сплошная сумма.

Доклад посвящен выводу нетривиальных оценок двойных сумм $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ на малых дугах, в которых суммы, составляющие двойную сумму, «близки» по порядку, то есть $xy^{-1} \le N \le y$. Доказательство нетривиальных оценок проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работ [8–10].

Теорема. *Пусть M, N — натуральные числа, $xy^{-1} \le N \le y$, $M \le N$, $a(m)$ и $b(n)$ — произвольные комплекснозначные функции натурального аргумента, $|a(m)| \le \tau(m)$, $|b(n)| \le \tau(n)$, α, $x > x_0$, y – вещественные числа, $\sqrt{x} < y < x(\ln xq)^{-1}$. Тогда существует абсолютная постоянная c, для которой справедлива оценка*

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \begin{cases} y\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{x}{yN} + \dfrac{N^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} (\ln xq)^c, & \text{если } 0{,}5q < \dfrac{y^4}{xN}; \\[2ex] y\left(\dfrac{x^2 q}{y^5} + \dfrac{x^2}{y^2N^2} + \dfrac{N^4}{y^4}\right)^{\frac{1}{32}} (\ln xq)^c, & \text{если } 0{,}5q \ge \dfrac{y^4}{xN}. \end{cases}$$

Следствие. *Пусть A – абсолютная постоянная, тогда при*

$$\begin{aligned} (\ln xq)^{32(A+c)} &\le q \le \frac{y^5}{x^2}(\ln xq)^{-32(A+c)}, \\ \frac{x}{y}(\ln xq)^{32(A+c)} &\le N \le y(\ln xq)^{-32(A+c)} \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$|W| \ll \frac{y}{(\ln xq)^A}.$$

Библиографический список

1. *Виноградов И. М., Карацуба А. А.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 168.

2. *Haselgrove C. B.* Some theorems in the analitic theory of number // J.London Math.Soc. 1951. Vol. 26.

3. *Статулявичус В.* О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Ученые тр. ун-та. Серия математика, физика и химические науки. Вильнюс, 1955. № 2.

4. *Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao.* On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. Vol. 2.

5. *Zhan T.* On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser. 1991. Vol. 7, № 3.

6. *Liu J., Zhan T.* Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte fur Mathematik. 1999. Vol. 127, iss. 1.

7. *Рахмонов З. Х., Замонов Б. М.* Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием // Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4 (157).

8. *Рахмонов Ф. З.* Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3.

9. *Rakhmonov Z. Kh., Rakhmonov F. Z.* Sum of Short Exponential Sums over Prime Numbers // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, № 3.

10. *Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З.* Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2013. Т. 56, № 11.

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ ТИТЧМАРША С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ ИЗ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКОВ

Н. А. Зинченко (г. Белгород)
E-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

Начиная с работы И. М. Виноградова [1] возник интерес к решению аддитивных задач с простыми числами из так называемых коротких или «виноградовских» промежутков. Это промежутки вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1, 2]$.

Аддитивные задачи с простыми числами из промежутков (1), являющиеся тернарными, или решающимися по схеме тернарной задачи, рассматривались, например, в работах С. А. Гриценко [2, 3] и А. Балога и Дж. Фридлендера [4].

В настоящее время некоторые классические бинарные аддитивные задачи, например, такие, как проблема делителей Титчмарша, проблема Харди-Литтлвуда и другие, в простых числах, удовлетворяющих неравенствам (1), не решены. Их решение представляется достаточно сложным и представляет, на наш взгляд, большой интерес.

В докладе будет представлено решение одной более простой бинарной аддитивной задачи с простыми числами из коротких промежутков. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть* $c > 1$ *— произвольное число,* $\varepsilon > 0$ *и*

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n} d^a.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p \le x, \{\frac{1}{2}p^{1/c}\} \le \frac{1}{2}} \sigma_{-\varepsilon}(p-1) = \frac{1}{2} c_0 \operatorname{Li} x + O_{\varepsilon,c}(x \ln^{-c} x),$$

где

$$c_0 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(q) q^{\varepsilon}},$$

где $\varphi(n)$ *— значение функции Эйлера.*

Заметим, что сумма $\sum_{p \le x} \sigma_{-\varepsilon}(p-1)$ при $\varepsilon > 0$ представляет собой аналог суммы

$$\sum_{p \le x} \sigma_0(p-1) = \sum_{p \le x} \tau(p-1),$$

получение асимптотики для которой составляет проблему Титчмарша (см. [5, 6]).

В нашем случае на простые числа наложены дополнительные условия — они должны удовлетворять неравенству $\{\frac{1}{2}p^{1/c}\} \le \frac{1}{2}$, то есть, принадлежать промежуткам вида (1).

Доказательство теоремы проводится методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. 1940. № 7.

2. *Гриценко С. А.* Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. 1988. Т. 43, вып. 4 (262).

3. *Гриценко С. А.* Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 6.

4. *Balog A., Friedlander K. J.* A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. 1992. № 156.

5. *Titchmarsh E. C.* A divisor problem // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1930. № 54.

6. *Линник Ю. В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л. : Изд-во ЛГУ, 1961.

О МНОЖЕСТВАХ КЛАССА БОРСУКА

А. Ю. Иванов (г. Донецк)
E-mail: ivanov.alexander.iurievich@gmail.com

В 1933г. польский математик К. Борсук выдвинул гипотезу, что всякое ограниченое выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$ можно разбить на $n+1$ подмножество меньшего диаметра. Сам Борсук подтвердил ее в том же 1933г. (цит. по: [1,2]), а в 1955г. она была подтверждена Г. Эгглстоном [3] в размерности $\mathbb{R}^3$. Тем не менее, в пространствах размерности выше третьей данная гипотеза не подтверждена до сих пор.

Совокупность ограниченных множеств из $\mathbb{R}^n$ каждое из которых можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра будем называть классом множеств Борсука. Описанием данного класса множеств занимались многие математики, среди которых Г. Хадвигер [4], В. Г. Болтянский [5,6], В. Л. Кли [7] и многие другие. Им удалось получить набор достаточных условий принадлежности множества классу множеств Борсука. Однако говорить о полном описании данного класса пока преждевременно. Из работ Г. Хадвигер [4], В. Г. Болтянского [5,6], В. Л. Кли и Р. Д. Андерсона [7], а также автора [8–11] следует, что класс множеств, удовлетворяющих гипотезе Борсука, достаточно широк и зависит только от структуры границы множеств. Так, в работе [4] показано, что классу множеств Борсука принадлежит всякое множество с гладкой границей; в работах [5,6] распространен данный результат на случай выпуклых множеств из $\mathbb{R}^n$ с не более чем $n+1$ точками нерегулярности на границе. В работах [7–10] наложены достаточно сложные условия на множество нерегулярности множества из при которых данное множество принадлежит классу множеств Борсука.

Приведем пару простых следствий из работ [8–11].

Теорема 1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины, $EP(G)$ — множество точек нерегулярности границы G. Тогда, если EP состоит только из изолированных точек, то множество G можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Теорема 2. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — множество постоянной ширины, $EP(G)$ — множество точек нерегулярности границы G, $\Theta = \{\theta | \varsigma(\theta) \in EP(G)\}$. Тогда, если существует подпространство U размерности $n-1$ такое, что $\Theta \bigcap U = \varnothing$, то множество G можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

В работе Андерсона и Кли также получено ограничение, аналогичное условию теоремы для случая $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, однако там не учитывалось взаиморасположение нерегулярных точек на границе рассматриваемого множества и в результате получено неравенство с существенно более сильным ограничением.

Следует отметить, что в 1993 г. Дж. Канном и Г. Калаи построен первый контрпример опровергающий данную гипотезу в размерностях выше 2014[12]. На данный момент в работе А. Бондаренко показано, что подобные контрпримеры существуют во всех размерностях выше 63.

В вопросе описания класса Борсука следует обратить внимание на возможное направление дальнейших исследований. Необходимо исследовать структуру множества ESP (см. [10]) для известных контрпримеров к гипотезе Борсука при помощи разработанной техники в работах автора [8-10], использующей аналог гауссового сферического отображения. Это, вероятно, позволит найти структурную особенность множеств, для которых гипотеза Борсука не верна, и тем самым не только окончательно завершить описания класса множеств Борсука, но и выяснить, начиная с какой размерности подобные контрпримеры могут существовать.

Библиографический список

1. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М. : Наука, 1971.

2. *Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц.* Разбиение фигур на меньшие части. London : Math.Soc., 1955.

3. *Eggleston H. G.* Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. M. : Наука, 1971. Т. 30, № 1.

4. *Hadwiger H.* Uberdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. 1945/46. Vol. 18.

5. *Болтянский В. Г.* Задача об освещении границы выпуклого тела // Изв. МФАН СССР. 1960. Т. 10, № 76.

6. *Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S.* Excursions into combinatorial geometry. Berlin : Springer, 1997.

7. *Anderson R. D., Klee V. L.* Convex functions and upper semicontinuous collections // Duke Math.J. 1952. Vol. 190, № 2.

8. *Иванов А. Ю.* Решение проблемы Борсука для некоторых множеств с нерегулярной границей // Тр. ИПММ. 2011. Т. 23.

9. *Иванов А. Ю.* Об $\mathbb{R}^n_p$-аналоге проблемы Борсука // Український матем. вісник. 2012. Т. 9, № 3.

10. *Иванов А. Ю.* Аналог проблемы Борсука на банаховых пространствах // Український матем. вісник. 2013. Т. 10, № 1.

11. *Иванов А. Ю.* Новые достаточные условия принадлежности множества классу Борсука // Тр. ИПММ. 2012. Т. 25.

12. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc.(New Ser.) 1993. Vol. 29, № 1.

ПРОБЛЕМА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ КЛАССОВ СМЕЖНОСТИ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ КОКСТЕРА С ДРЕВЕСНОЙ СТРУКТУРОЙ

О. В. Инченко (г. Тула)
E-mail: inchenko_ov@mail.ru

Класс конечно определенных групп Кокстера был введен в 1934 г. Х. С. М. Кокстером. В 2003 г. В. Н. Безверхним был выделен класс конечно порожденных групп Кокстера с древесной структурой [1].

Конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой имеет копредставление

$$G = \langle a_1, ...a_n; (a_i)^2, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j \in \overline{1, n}, i \neq j \rangle,$$

где m_{ij} – число, соответствующее симметрической матрице Кокстера, причем, при $i \neq j$, $m_{ij} = m_{ji}$, $m_{ij} \geq 2$. Если $m_{ij} = \infty$, то между a_i и a_j соотношения нет. Группе G соответствует конечный связный дерево-граф Г такой, что если вершинам некоторого ребра e графа Г соответствуют образующие a_i и a_j , то ребру e соответствует соотношение вида $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$.

С другой стороны группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} * G_s;\; rel\, G_1, .., rel\, G_s;\; \varphi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \right\rangle.$$

При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам некоторого ребра $\overline{e}$ графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ji} = \langle a_j, a_i; (a_j)^2, (a_i)^2, (a_j a_i)^{m_{ji}} \rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i, a_k; (a_i)^2, (a_k)^2, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, а ребру $\overline{e}$ – циклическую подгруппу $\langle a_i; (a_i)^2 \rangle$.

Проблема пересечения классов смежности состоит в том, что необходимо выяснить существует ли алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп $H_1, H_2, .., H_n$ группы G и любых слов $w_1, w_2, .., w_n \in G$ установить пусто или нет пересечение $w_1 H_1 \cap w_2 H_2 \cap .. \cap w_n H_n$.

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ двупорожденных групп Кокстера $G_{ji} = \left\langle a_j,\, a_i;\, a_j^2,\, a_i^2,\, (a_j a_i)^{m_{ji}} \right\rangle$ и $G_{ik} = \left\langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_i a_k)^{m_{ik}} \right\rangle$ объединенных по циклической подгруппе $\left\langle a_i;\, a_i^2 \right\rangle$: $\bar{G} = G_{ji} \underset{\langle a_i; a_i^2 \rangle}{*} G_{ik}$ [2–4].

Теорема 1. [5] *В группе $\bar{G}$ разрешима проблема пересечения классов смежности двух конечно порожденных подгрупп.*

Целью работы является обобщение полученного результата на конечное число конечно порожденных подгрупп группы $\bar{G}$, а затем доказательство разрешимости данной проблемы в группе Кокстера с древесной структурой G.

При доказательстве основного результата используем метод математической индукции по количеству сомножителей в свободном произведении с объединением.

Теорема 2. *В группе $\bar{G}$ разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: рассмотрим древесное произведение $s-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{s-1}, $T_{s-1} \subset T$. Группу, соответствующую графу T_{s-1} обозначим через G_{s-1}. Пусть s-ый сомножитель - подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева – графа T, которая связана с графом T_{s-1} ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $\left\langle a_x;\, a_x^2 \right\rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп - G_{s-1} и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\left\langle a_x;\, a_x^2 \right\rangle$, то есть $G = G_{s-1} \underset{\langle a_x; a_x^2 \rangle}{*} G_{xy}$.

Теорема 3. *В конечно порожденной группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

При доказательстве использован метод специального множества и метод типов, введенный В. Н. Безверхним и использованный им при исследовании разрешимости различных алгоритмических проблем в свободных конструкциях групп.

Библиографический список

1. *Безверхний В. Н.* О группах Артина, Кокстера с древесной структурой // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: тез. докладов V Международной конференции. Тула, 2003.

2. *Безверхний В. Н.* Решение проблемы вхождения в классе HNN - групп // Алгебраические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1981.

3. *Безверхний В. Н.* О пересечении подгрупп в HNN-группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, № 1.

4. *Безверхний В. Н., Инченко О. В.* Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 2.

5. *Инченко О. В.* Разрешимость проблемы пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой // Вестник ТулГУ. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2010. Вып. 1.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ПСЕВДОХАРАКТЕРОВ НА АНОМАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО ИНДИКАБЕЛЬНЫХ ГРУПП

Д. З. Каган (г. Москва)
E-mail: dmikagan@gmail.com

Пусть G — произвольная группа. Квазихарактером на группе G называется функция из группы G в пространство действительных чисел R, для которой выполняется неравенство $f(xy) - f(x) - f(y) \leq \varepsilon$ для любых $x, y \in G$ и некоторого положительного числа $\varepsilon > 0$. Псевдохарактером называется квазихарактер, для которого $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ для любых $x \in G, n \in R$. Псевдохарактер называется нетривиальным, если существуют элементы $a, b \in G$, такие, что $\varphi(ab) \neq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Понятие "псевдохарактер"было введено А. И. Штерном [1]. В. А. Файзиев [2] доказал существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях неединичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$. Р. И. Григорчуком [3] и В. Г. Бардаковым [4] установлены условия существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединенной подгруппой и на HNN-расширениях. В статьях [5, 6] доказаны определенные обобщения теорем Григорчука о нетривиальных псевдохарактерах, касающиеся аномальных произведений различных типов групп.

Нетривиальные псевдохарактеры связаны с такими важными характеристиками групп, как вторые группы когомологий или ширина собственных вербальных подгрупп. Например, можно показать, что из существования на группе нетривиальных псевдохарактеров следует бесконечность ширины вербальных коммутантных подгрупп, если они определяются собственными конечными множествами слов [7].

С. Д. Бродский [8] ввел понятие аномального произведения групп. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение некоторых групп A и B. Пусть также G является фактор-группой свободного произведния, $G = F/ < w^F >$. Тогда группа G называется аномальным произведением групп A и B и обозначается $A_w B$, само слово w называется аномалией. Группа называется локально индикабельной, если любая конечно порожденная подгруппа этой группы обладает гомоморфизмом на бесконечную циклическую группу.

Теорема 1. [5] *Пусть $G = A_w B$ - аномальное произведение двух локально индикабельных групп A и B, где A не является конечно порожденной, B не является циклической. Пусть также элемент w не лежит в группах A или B и не сопряжен с элементами из этих групп. Тогда на группе G существует нетривиальный псевдохарактер.*

При доказательстве этой теоремы используется, в частности, метод сведения рассматриваемых аномальных произведений к свободным произведениям с объеденением. При доказательстве выполнения условий существования нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях с объединением используются различные технические леммы, при этом, все условия теоремы оказываются существенными.

Библиографический список

1. *Штерн А. И.* Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25, № 2.

2. *Файзиев В. А.* Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 1.

3. *Григорчук Р. И.* Ограниченные когомологии групповых конструкций // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 4.

4. *Бардаков В. Г.* О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5.

5. *Каган Д. З.* Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундаментальная и прикладная матем. 2006. Т. 12, вып. 3.

6. *Каган Д. З.* Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная матем. 2012. Т. 17, № 2.

7. *Добрынина И. В., Каган Д. З.* О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 4.

8. *Бродский С. Д.* Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сибирский матем. журнал. 1984. Т. 25, № 2.

О ТОЖДЕСТВАХ И КВАЗИТОЖДЕСТВАХ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЯ $\mathcal{B}_{1,1}$

В. К. Карташов (г. Волгоград)
E-mail: kartashovvk@yandex.ru

Через $\mathcal{B}_{1,1}$ обозначается многообразие алгебр с двумя унарными операциями f и g, определяемое тождеством $fg(x) = x$.

Алгебры этого многообразия рассматривались в работах [1–4]. Очевидно, что многообразие $\mathcal{B}_{1,1}$ вклчает в себя многообразие $\mathcal{A}_{1,1}$ унарных алгебр с двумя операциями f и g, заданное тождествами

$$fg(x) = gf(x) = x.$$

К настоящему времени получено значительное количество результатов об алгебрах многообразия $\mathcal{A}_{1,1}$, имеющих окончательный характер ([1, 3, 4]).

В этой заметке установлено, что $\mathcal{B}_{1,1}$ *является покрытием для* $\mathcal{A}_{1,1}$ *в решетке всех многообразий алгебр с двумя унарными операциями.*

В дальнейшем $\mathbf{N}$ означает множество неотрицательных целых чисел и $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Очевидно, что на любой алгебре многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$ истинны следующие тождества

1) $f^k g^{m+k}(x) = g^m(x)$, $k, m \in \mathbf{N_0}$;
2) $f^{k+m} g^k(x) = f^m(x)$, $k, m \in \mathbf{N_0}$;
3) $g^s f^s g^s(x) = x$, $s \in \mathbf{N_0}$;
4) $(gf)^k(x) = gf(x)$, $k \in \mathbf{N}$.

Пусть $i, k \in \mathbf{N_0}$ и $i \leq k$. Обозначим через $Q_{i,k}$ квазитождество вида

$$(\forall x)(g^k u(x) = x \to g^i f^i(x) = x),$$

где $u(x)$ – произвольный терм сигнатуры $\{f, g\}$.

Теорема. *Любое квазитождество вида $Q_{i,k}$ истинно на каждой алгебре многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$.*

Нетрудно также проверить что квазитождество

$$(\forall x)(g^n(x) = x \to f^n(x) = x)(n \in \mathbf{N_0})$$

истинно на любой алгебре многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$.

Напомним [5], что *бициклической полугруппой* называется полугруппа $S(f, g)$ с двумя порождающими элементами f и g и определяющим соотношением $fg = e$, где e – единица полугруппы.

Очевидно, что любой полигон над бициклической полугруппой можно интерпретировать как алгебру многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$.

Следствие. *Квазитождества вида $Q_{i,k}$ истинны на любом полигоне над бициклической полугруппой и, в частности, – на самой полугруппе $S(f, g)$.*

В работе также найдены условия, при которых решетка $ConA$ конгруэнций произвольной алгебры A многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$ является цепью, модулярной либо дистрибутивной.

Библиографический список

1. *Бощенко А. П.* Решетки конгруэнций унарных алгебр с двумя операциями f и g, удовлетворяющими тождеству $g(f(x)) = x$. Деп. в ВИНИТИ 20.04.98. Волгоград, 1998. № 1220-В98.

2. *Акатаев А. А., Смирнов Д. М.* Решетки подмногообразий многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 1.

3. *Горбунов В. А.* Покрытия в решетке квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 5.

4. *Карташов В. К.* Характеризация решетки квазимногообразий алгебр $\mathcal{A}_{1,1}$ // Алгебраические системы : межвуз. сб. Волгоград, 1989.

5. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. М. : Мир, 1972. Т.1.

О РЕШЕТКАХ ТОПОЛОГИЙ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУГРУППАМИ ПРАВЫХ И ЛЕВЫХ НУЛЕЙ

А. В. Карташова (г. Волгоград)
E-mail: kartashovaan@yandex.ru

Левым полигоном над полугруппой S (или просто *полигоном*) называется множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. задано отображение $S \times X \to X$, $(s, x) \mapsto sx$, удовлетворяющее условию $(ts)x = t(sx)$ при $s, t \in S, x \in X$.

Полигоны над полугруппами образуют широкий класс алгебраических объектов, которые изучались многими авторами с различных точек зрения (см., например, [1–3]).

Полугруппой правых (левых) нулей называется полугруппа S, удовлетворяющая тождеству $st = t (st = s)$ для любых $s, t \in S$.

В [4] изучались решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей.

Пусть X – полигон над полугруппой S и σ – некоторая топология на множестве X. Будем говорить, что σ – топология данного полигона, если для любых $s \in S$ и $U \in \sigma$ множество $\{x | sx \in U\} \in \sigma$.

Нетрудно показать, что множество $\Im(X)$ всех топологий полигона X является решеткой по включению.

Теорема 1. *Пусть X – полигон над полугруппой S правых нулей и $sx \neq tx$ для некоторых $s, t \in S$ и $x \in X$. Тогда решетка $\Im(X)$ топологий этого полигона немодулярна и не является решеткой с дополнениями.*

Отсюда, в силу [5, теорема 9],получаем

Следствие. *Решетка $\Im(X)$ топологий полигона X над полугруппой S правых нулей является решеткой с дополнениями тогда и только тогда, когда $sx = tx$ для всех $s, t \in S$ и $x \in X$.*

Теорема 2. *Пусть S – полугруппа правых или левых нулей. Тогда решетка $\Im(X)$ топологий произвольного полигона X над полугруппой S модулярна в том и только том случае, когда $|X| \leq 2$.*

Теорема 3. *Для любого кардинального числа α существуют полигоны X_1 и X_2 мощности α над полугруппами правых и левых нулей соответственно, решетки топологий которых являются решетками с дополнениями.*

Библиографический список

1. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and categories Berlin, New York : W. de Gruyter, 2000.

2. *Скорняков Л. А.* Характеризация категории полигонов // Матем. сб. 1969. Т. 80(122), № 4(12).

3. *Кожухов И. Б.* Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4, вып. 4(12).

4. *Халиуллина А. Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей // Дальневост. матем. журн. 2015. Т. 15, № 1.

5. *Kartashova A. V.* On lattices of unary algebras // J. Math.Sci. 2003. Vol. 114, № 2.

ГРУППА УМНОЖЕНИЙ ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Е. И. Компанцева (г. Москва)
E-mail: kompantseva@yandex.ru

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм μ : $G \otimes G \to G$. Группа $MultG = Hom(G \otimes G, G)$ называется группой умножений группы G [1].

Настоящая работа посвящена изучению колец на почти вполне разложимых группах. Абелева группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разжимой (*ПВР*-группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса [2]. *ПВР*-группы изучаются давно, им посвящены исследования многих авторов.

Получено описание группы $MultG$ блочно-жестких *ПВР*-групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором (*ЦРФ*-групп). Пусть G – группа из указанного класса, A – ее регулятор, $G/A = \langle d + A \rangle$ – регуляторный фактор, n – регуляторный индекс.

Множество $T(G) = T(A)$ критических типов группы G определяется разложением регулятора $A = \bigoplus\limits_{\tau \in T(G)} A_\tau$, где A_τ – τ-однородная компонента группы A, ранг которой равен k_τ. Согласно теории *ПВР*-групп [2], существует разложение $G = G_1 \oplus C$, в котором G_1 – жесткая *ЦРФ*-группа с регулятором B и множеством критических типов $T(G_1) = T(B) \subset T(G)$, C – вполне разложимая группа. Это разложение называется главными. Существуют такие элементы $e_\tau \in A_\tau (\tau \in T(G))$, что группы B и C можно представить в виде $B = \bigoplus\limits_{\tau \in T(B)} R_\tau e_\tau$, $C = \bigoplus\limits_{\tau \in T(C)} R_\tau e_\tau$, где R_τ – подкольца с единицей кольца рациональных чисел. При этом $d \in B$ и выполняется

$$nd = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{n}{m_\tau} s_\tau e_\tau, \qquad (1)$$

где m_τ, s_τ – взаимно простые целые числа, причем $m_\tau (\tau \in T(G))$ являются инвариантами группы G. Равенство (1) называется стандартным представлением *ЦРФ*-группы G.

Для $\tau \in T(B)$ обозначим через s'_τ такое целое число, что $s_\tau s'_\tau + {} + m_\tau m'_\tau = 1$ при некотором $m'_\tau \in \mathbb{Z}$. Если же $\tau \in T(C) \setminus T(B)$, то $m_\tau = 1$, в этом случае положим $s_\tau = s'_\tau = 0$.

Для каждого $\tau \in T(B)$ и каждого $\alpha \in \mathbb{Z}$ определим множество $B_\tau(\alpha) = \alpha m_\tau s'_\tau + m_\tau^2 B_\tau \subset B_\tau$ (здесь B_τ рассматривается как подгруппа аддитивной группы рациональных чисел).

Теорема. *Пусть G – блочно-жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа со стандарными представлением (1). Тогда группа $MultG$ изоморфна аддитивной группе блочно-диагональных матриц $F(\alpha) = (F_\tau(\alpha))_{\tau \in T(G)}$, где* $F_\tau(\alpha) \in \begin{pmatrix} B_\tau(\alpha) + m_\tau^2 A_\tau & m_\tau A_\tau & \cdots & m_\tau A_\tau \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \cdots & A_\tau \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_\tau A_\tau & A_\tau & \cdots & A_\tau \end{pmatrix} \subset M_{k_\tau}(A_\tau)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Библиографический список

1. *Fuchs L.* Infinite abelian groups // Academic Press. New York ; London, 1973. Vol. 2.

2. *Mader A.* Almost completely decomposable abelian groups // Algebra, Logic and Applications. Amsterdam : Gordon and Breach, 2000. Vol. 3.

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ О ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧКАХ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

А. Е. Коротков (г. Саратов)
E-mail: korotkovae@info.sgu.ru

Суть аппроксимационного подхода в задаче о трансцендентности значений L-функций в алгебраических точках заключается в построении полиномов Дирихле с алгебраическими коэффициентами, приближающими L-функцию на числовой оси с показательной скоростью. Тогда задача о трансцендентности сводится к оценке скорости роста высот значений таких многочленов в алгебраических точках в зависимости от их степени.

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s,\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{1}$$

Как показано в [1, 2], можно построить полиномы Дирихле с коэффициентами, принадлежащими полю $K=Q(\sqrt[d]{1})$, где d — период характера χ L-функции Дирихле.

$$Q_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^s},$$

которые будут аппроксимировать L-функцию (1) Дирихле с показательной скоростью в полосе $\sigma\geq\sigma_0>0$, $|t|<T$.

Обозначим через H_{θ_n} высоты чисел $\theta_n=Q_n(\alpha)$, α – алгебраическое, положительное число. Имеет место утверждение.

Теорема. *Пусть α — такое алгебраическое, положительное, для которого последовательность высот H_{θ_n} удовлетворяет условию:*

$$H_{\theta_n}<<\rho^n, \qquad \textit{для любого } \rho>1 \ (\textit{при } n\to\infty).$$

Тогда значение L-функции: $L(\alpha,\chi)$ является трансцендентным числом.

Есть все основания полагать, что данный аппроксимационный подход позволит доказать трансцендентность значений L-функций Дирихле $L(\alpha,\chi)$ в алгебраических точках $1/2<\alpha<1$.

Библиографический список

1. *Водолазов А. М., Кузнецов В. Н.* Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2003. Вып. 2.

2. *Кузнецов В. Н., Кузнецова Т. А., Коротков А. Е., Ермоленко А. А.* Аппроксимационный подход в задаче о трансцендентности значений L-функций Дирихле в алгебраических точках на положительной полуоси // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та. 2009. Вып. 5.

К УТОЧНЕНИЮ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ L-ФУНКЦИЙ АРТИНА[1]

В. В. Кривобок (г. Саратов)
E-mail: unikross@mail.ru

Рассмотрим расширение Галуа $k \subset K$. Предположим, что группа Галуа этого расширения представима в виде

$$G = \bigcup_{i=1}^{m} H_i,$$

где H_i – циклические подгруппы группы G такие, что $H_i \cap H_j = \{e\}, i \neq j$. В этом случае для L-функции Артина получено следующее выражение:

$$L(s, \chi, K|k) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1}^{s_i} L^{r_{ij}}(s, \chi_{ij}, K|k_{ij})}{Z_K^{r_0}(s)}, \qquad (1)$$

где $r_0,\ r_{ij}$ – положительные рациональные числа, χ – характер группы G. Как следствие представления (1) доказана

Теорема 1. *Пусть $k \subset K$ – расширение Галуа, G – группа Галуа этого расширения, для которой $[G] = p_1 \cdot p_2$, $p_1 | p_2 - 1$; пусть, далее, H – подгруппа группы G, $[H] = p_2$ и H состоит из двух классов сопряженности, и пусть ψ – неодномерный простой характер группы G. Тогда L-функция Артина $L(s, \psi, K|k)$ является целой функцией.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).

В случае произвольного расширения Галуа $k \subset K$ сравнение норм простых идеалов расширения k_{ab}, где k_{ab} – максимальное абелево подрасширение расширения $k \subset K$, и норм соответствующих простых идеалов поля K позволило доказать следующее утверждение

Теорема 2. *L-функция Артина $L(s, \psi, K|k)$, где ψ – простой характер группы Галуа G расширения $k \subset K$, аналитически продолжима на комплексную плоскость с возможными особенностями – полюсами, лежащими на критической прямой, которые являются нулями некоторых L-функций Дирихле поля k.*

О ВЗАИМОСВЯЗИ ОСНОВНОЙ И РАСШИРЕННОЙ ГИПОТЕЗ РИМАНА ДЛЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ И L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ С ЧИСЛОВЫМИ ХАРАКТЕРАМИ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГИПОТЕЗ ДЛЯ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ[1]

В. В. Кривобок, В. А. Матвеев (г. Саратов)
E-mail: unikross@mail.ru, vladimir.matweev@gmail.com

Пусть $k \subset K$ – абелево расширение Галуа числовых полей, где поле K является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$ и χ – характер Дирихле поля k, отвечающий этому расширению. Тогда имеет место

Теорема. *Если выполнены гипотезы Римана для дзета-функции и L-функций $L(s, \chi)$, где χ – числовой характер Дирихле, то нули L-функции $L(s, \chi, k)$ лежат на критической прямой.*

К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[2]

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)
E-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

Рассмотрим ряд Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{1}^{n} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).

где $h(n)$ — конечнозначный нееединичный характер, имеющий ограниченную сумматорную функцию $S(x)$, т.е.

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n) = O(1).$$

Для рядов Дирихле такого вида доказаны следующие утверждения

Теорема 1. *Ряд Дирихле вида* (1) *определяет функцию, регулярную в полуплоскости* $\varsigma > 0$, *для которой все точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле.*

Теорема 2. *Линия* $\Gamma(t) = f(it)$ *является простой жордановой линией.*

Последнее утверждение позволяет к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1), применить известный принцип симметрии аналитического продолжения Римана-Шварца (см. [1]) и продолжить $f(s)$ регулярным образом на комплексную плоскость. Этот результат имеет важное значение для решение известной проблемы обобщенных характеров (см. [2, 3]).

Библиографический список

1. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М. : Наука, 1968. Т. 2.

2. *Чудаков Н. Г., Линник Ю. В.* Об одном классе вполне мультипликативных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2.

3. *Чудаков Н. Г., Родосский К. А.* Об обобщенном характере // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 4.

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ОГРАНИЧЕННОЙ СУММАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ[1]

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)
E-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{1}^{\mathrm{inf}} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$S(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n = O(1).$$

Пусть соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n x^n$$

удовлетворяет условиям:

1. существует конечный предел вида $\lim\limits_{x\to 1-0} g(x) = \alpha_0$

2. для любого натурального k имеет место оценка

$$|g(x) - \alpha_0| < \frac{C}{\left|\ln^k(1-x)\right|}, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

где константа C не зависит от k.

При этих предположениях имеет место

Теорема 1. *Ряд Дирихле вида* (1) *определяет функцию, аналитическую в полуплоскости* $\sigma > 0$. *При этом все точки мнимой оси являются точками непрерывности в широком смысле*

Замечание *Условие* (2) *будет иметь место, если производная функции* $f(x)$ *будет ограничена на отрезке [0; 1).*

В докладе обсуждаются условия, при которых линия $\Gamma(t)$: $\Gamma(t) = f(it)$, будет простой жордановой линией. Последнее представляет интерес в связи с задачей аналитического продолжения ряда Дирихле (1) в левую полуплоскость комплексной плоскости.

К ЗАДАЧЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (г. Саратов)
E-mail: kuznetsovvn@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

Рассмотри ряд Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).

где $h(n)$ — конечнозначная мультипликативная функция натурального аргумента с ограниченной сумматорной функцией, т.е.

$$S(x) = \sum_{n \leqslant k} h(k) = O(1).$$

Функция $f(s)$ вида (1) является аналитической функцией в полуплоскости $\sigma > 0$. В докладе обсуждаются вопросы аналитического продолжения функции $f(s)$ на всю комплексную плоскость исходя из принципа симметрии Римана-Шварца. В основе такого подхода лежит идея аппроксимации функции $f(s)$ в критической полосе полиномами Дирихле.

ОБ ОЦЕНКЕ ОДНОГО КЛАССА СУММАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

Т. А. Кузнецова, О. А. Матвеева (г. Саратов)
E-mail: kuznetsovata@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

Пусть $h(n)$ — неглавный обобщённый характер, т.е. конечнозначная мультипликативная функция натурального аргумента, отличная от нуля почти для всех простых, имеющая ограниченную сумматорную функцию. Для таких характеров доказана

Теорема 1. *Для любого $t \in [-T, T]$ имеет место оценка вида*

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} h(n) n^{it} = O(1), \tag{1}$$

где константа в символе «O» зависит только от величины T.

Отметим, что в случае, когда $h(n)$ является характером Дирихле, в работе [1] получена оценка вида (1). В работе [2] эта оценка получена для характеров Дирихле методом, отличным от метода работы [1].

В докладе высказывается предположение, что для характеров с ограниченной сумматорной функцией оценка вида (1) равносильна тому, что $h(n)$ — неглавный характер Дирихле.

Библиографический список

1. *Чудаков Н. Г., Бредихин Б. М.* Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМН. 1956. Т. 8.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00399).

2. *Матвеев В. А., Матвеева О. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффицентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 2.

К ЗАДАЧЕ О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ДИРИХЛЕ

Т. А. Кузнецова, В. А. Матвеев (г. Саратов)
E-mail: kuznetsovata@info.sgu.ru, vladimir.matweev@gmail.com

В докладе рассматривается задача разложения функций $f(x)$, аналитических и ограниченных в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$, которые в этой полуплоскости представляются в виде разложения в ряды вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Данная задача рассматривается в монографии Е. К. Тичмарша [1]. Если имеет место (1), то $f_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ является почти периодической функцией.

На основании свойств почти периодических функций [2] в направлении решения этой задачи получены следующие результаты.

Пусть X — множество функций $f(s)$, для которых спектральная функция

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

существует при любых λ и отлична от нуля лишь для значений аргумента λ вида $\lambda_n = \ln n$.

Те значения λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$, представляют собой конечную или счётную последовательность чисел $\lambda_1, \lambda_n, \ldots$. Для таких λ_n числа $a(\lambda_n) = A_n$ будем называть коэффициентами Фурье, а ряд

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\lambda_n t} \tag{2}$$

будем называть рядом Фурье функции $f(t)$.

При данных обозначениях имеет место

Теорема 1. *Функция $f_{\sigma_0}(t) = f(\sigma_0 + t)$ тогда и только тогда разложима при $\sigma \geqslant \sigma_0$ в ряд Дирихле* (1)*, кога ряд Фурье функции $f_{\sigma_0}(t)$ вида* (2) *равномерно сходится на действительной оси $-\infty < t < \infty$.*

В докладе обсуждается следующее предположение: пусть существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k^s}$, равномерно сходящаяся в любом прямоугольнике $D_T: \ \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1,'; |t| \leqslant T$ к функции $f(s)$, для которой $f_{\sigma_0}(t) \in X$. Тогда $f(s)$ разложима в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ в ряд Дирихле вида (1)

Библиографический список

1. *Титчмарш Е. К.* Теория функций. М. : Наука, 1980.

2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М. : Изд-во МГУ, 1998.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ БИНАРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

Л. Н. Куртова (г. Белгород)
E-mail: kurtova@bsu.edu.ru

Рассматривается задача получения асимптотических формул для числа решений уравнений с квадратичными формами, родственная проблеме делителей Ингама.

Пусть d – отрицательное бесквадратное число, $F = Q(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, δ_F – дискриминант поля F, $Q_1(\overline{m})$ и $Q_2(\overline{k})$ – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами A_1 и A_2, $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$. Пусть ε — произвольно малое положительное число, a, b, h — натуральные числа, $a \leq n^{\varepsilon}$, $b \leq n^{\varepsilon}$, $h \leq n^{\varepsilon}$. Тогда при $n \to \infty$ для суммы

$$I(n,a,b,h) = \sum_{aQ_1(\overline{m}) - bQ_2(\overline{k}) = h} e^{-\frac{Q_1(\overline{m}) + Q_2(\overline{k})}{n}}$$

справедлива асимптотическая формула:

$$I(n,a,b,h) = \frac{4\pi^2 n}{|\delta_F|(a+b)} e^{-\frac{h}{an}} \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-4} \sum_{l=1,(l,q)=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q, al, \overline{0}) G_2(q, -bl, \overline{0}) +$$

$$+ O(n^{3/4+\varepsilon}),$$

где $G_i(q,l,\overline{0}) = \sum_{\overline{m} \pmod q} \exp(2\pi i l Q_i(\overline{m})/q)$ — двойные суммы Гаусса ($i = 1, 2$). Константа в знаке O зависит от a, b, h.

Для суммы особого ряда асимптотической формулы получены точные представления в виде произведений по простым числам, и показана ее положительность.

Доказательство проводится круговым методом с использованием оценки А. Вейля [1] для суммы Клоостермана.

Данная задача является обобщением задач получения асимптотических формул для сумм $I(n, 1, 1, 1)$ и $I(n, 1, 1, h)$, рассмотренных в [2, 3].

Библиографический список

1. *Estermann T.* On Klostermann's sum // Mathematika. 1961. Vol. 8.

2. *Куртова Л. Н.* Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вест. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. Математика. 2007. № 7 (57).

3. *Куртова Л. Н.* Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей с квадратичными формами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 2.

О КОНГРУЭНЦ–КОГЕРЕНТНЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ УНАРАХ С МАЛЬЦЕВСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

А. Н. Лата (г. Волгоград)
E-mail: alex.lata@yandex.ru

Класс конгруэнции θ, порожденный элементом x, будем обозначать через $[x]\theta$.

Универсальная алгебра A называется конгруэнц–когерентной [1], если любая подалгебра B алгебры A, содержащая некоторый класс конгруэнции θ алгебры A, является объединением некоторых классов конгруэнции θ.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется слабо когерентной [2], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A условие $[0]\theta \subseteq B$ влечет $[x]\theta \subseteq B$ для любого $x \in B$.

Универсальная алгебра A, имеющая нульарную операцию 0, называется локально когерентной [3], если для любой подалгебры B алгебры A и любой конгруэнции θ алгебры A из того, что $[x]\theta \subseteq B$ для некоторого $x \in B$ следует $[0]\theta \subseteq B$.

Основные определения и обозначения, связанные с унарами, приведены в [4].

Унаром с мальцевской операцией [5] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества $d(x,y,y)=d(y,y,x)=x$ и $f(d(x,y,z))=d(f(x),f(y),f(z))$.

В [5] показано, что на любом унаре $\langle A,f\rangle$ можно так задать тернарную операцию p, что алгебра $\langle A,p,f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Эта операция определяется следующим образом.

Пусть $\langle A,f\rangle$ — произвольный унар и $x,y\in A$. Для любого элемента x унара $\langle A,f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначим результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x)=x$. Положим $M_{x,y}=\{n\in N\cup\{0\}\mid f^n(x)=f^n(y)\}$, а также $k(x,y)=\min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y}\neq\emptyset$, и $k(x,y)=\infty$, если $M_{x,y}=\emptyset$. Положим далее

$$p(x,y,z)\stackrel{def}{=}\begin{cases} z, & \text{если } k(x,y)\leqslant k(y,z)\\ x, & \text{если } k(x,y)>k(y,z).\end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть $\langle A,p,f,0\rangle$ — алгебра с унарной операцией f, мальцевской операцией $p(x,y,z)$ и нульарной операцией 0, для которой $f(0)=0$. Алгебра $\langle A,p,f,0\rangle$ является слабо когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A,f\rangle$ является одним из следующих: 1) произвольный унар с инъективной операцией; 2) связный унар, который не содержит узловых элементов, за исключением, может быть, элемента 0; 3) сумма унара $C_1^t, t\in N\cup\{\infty\}$ и произвольного унара с инъективной операцией.*

Теорема 2. *Пусть $\langle A,p,f,0\rangle$ — алгебра с унарной операцией f, мальцевской операцией $p(x,y,z)$ и нульарной операцией 0, для которой $f(0)=0$. Алгебра $\langle A,p,f,0\rangle$ является локально когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A,f\rangle$ является одним из следующих: 1) произвольный унар с инъективной операцией; 2) унар, в котором для всех $x\in A$ выполняется $f(x)=0$, где $|A|\geqslant 3$; 3) унар $C_1^t, t\in N\cup\{\infty\}$; 4) связный унар конечной глубины $t(A)$, в котором существует единственный узловой элемент $a\neq 0$, глубина которого равна $t(A)-1$, и других узловых элементов нет.*

Предложение 1. *Пусть $\langle A,p,f,0\rangle$ — алгебра с унарной операцией f, мальцевской операцией $p(x,y,z)$ и нульарной операцией 0, для которой $f(0)=0$. Алгебра $\langle A,p,f,0\rangle$ является когерентной тогда и только тогда, когда унар $\langle A,f\rangle$ является одним из следующих: 1) произвольный унар с инъективной операцией; 2) унар, в котором для всех $x\in A$ выполняется $f(x)=0$, где $|A|\geqslant 3$; 3) унар $C_1^t, t\in N\cup\{\infty\}$.*

Библиографический список

1. *Geiger D.* Coherent algebras // Notices Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 21.
2. *Chajda I.* Weak coherence of congruences // Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41, №. 1.
3. *Chajda I.* Locally coherent algebras // Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math. 1999. Vol. 38, №. 1.
4. *Усольцев В. Л.* Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14, вып. 7.
5. *Карташов В. К.* Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения : тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград : Перемена, 1999.

ВЕЙВЛЕТЫ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ[1]

С. Ф. Лукомский (г. Саратов)
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

Введение

Локальное поле положительной характеристики $K = F^{(s)}$ состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей [1]

$$a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots),\ \mathbf{a}_j \in GF(p^s),$$

в которых только конечное число компонент с отрицательными номерами отлично от нуля. Пусть $g_n = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, (1, 0, .., 0)_n, \mathbf{0}_{n+1}, \dots)$, базисные элементы в поле K, K_n-шары радиуса $q^{-n} = p^{-sn}$, образующие базу топологии,

$$H_0 = \{\mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{+}\mathbf{a}_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbf{a}_{-\nu}g_{-\nu} : \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s), \nu \in \mathbb{N}$$

множество сдвигов в поле K. Пусть далее $\mathcal{A} : a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_n g_n \longmapsto \sum_n \mathbf{a}_n g_{n-1}$ оператор растяжения . Характеры в поле K можно записать в виде
$\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}$ где $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \cdot \dots \cdot r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$ функци Радемахера, $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, ..., a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Положим по определению

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}_k} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k},\ \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in GF(p^s).$$

Подробнее об этом см. в [2].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Базисные вейвлеты в локальном поле

Определение 1. [3] *Пусть* $\Psi = \{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(L)}\}$ *– семейство функций из* $L_2(K)$*. Определим функции*

$$\psi_{n,h}^{(l)}(x) = p^{\frac{sn}{2}} \psi^{(l)}(\mathcal{A}^n x \dot{-} h), \quad h \in H_0, n \in \mathbb{Z}, \quad l = \overline{1, L}.$$

Если система $(\psi_{n,h}^{(l)})$ *образует ортонормированный базис в* $L_2(K)$*, то систему* (Ψ) *называют системой базисных вейвлетов или, короче, базисным вейвлетом.*

Теорема 1. [3] *Ортонормированная аффинная система* $(\psi_{n,h}^{(l)})$ *будет ОНБ в* $L_2(K)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{l=1}^{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^{(l)}(\chi \mathcal{A}^n)|^2 = 1$$

для п.в. $\chi \in X$*.*

Определение 1.2. *Пусть* $(\psi_{n,h}^{(l)})$ *– аффинная ортонормированная система. Определим пространства*

$$W_n = \overline{span\,(\psi_{n,h}^{(l)})}, \quad V_n = \oplus W_m.$$

Если (V_n) *образуют КМА, то систему* $\Psi = \{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(L)}\}$ *называют ассоциированной с КМА или, короче, КМА-вейвлетом.*

Вопрос. Как можно построить базисный вейвлет и КМА-вейвлет?

Простейший ответ дает

Теорема 2. *Пусть* $(K_0^+)^\perp \chi_l \subset (K_1^+)^\perp \setminus (K_0^+)^\perp$ $(l = 1, 2, \ldots, p^s - 1)$ *– смежные классы по подгруппе* $(K_0^+)^\perp$*. Тогда функции*

$$\psi^{(l)}(x) = (\mathbf{1}_{(K_0^+)^\perp \chi_l}(x))\check{}$$

образуют вейвлет в $L_2(\mathbb{R})$*. В этом случае* $(\psi_{n,h}^{(l)})$ *есть система Хаара в* $L_2(K)$*.*

Можно указать значительно более широкие классы вейвлетов Ψ и указать способы их построения.

Теорема 3. *Пусть* $T = T(V)$ *–* N*-валидное дерево [4] высоты* H *с множеством вершин* $V \subset F^{(s)}$*. Для каждого пути*

$$(\overline{\alpha}_v \to \overline{\alpha}_{v-1} \to \cdots \to \overline{\alpha}_{v-N+1} \to \overline{\alpha}_{v-N} \to \overline{\alpha}_{v-N-1} \to \cdots \to \overline{\alpha}_{-N+1} \to \overline{\alpha}_{-N})$$

в котором $\overline{\alpha}_v = \overline{\alpha}_{v-1} = \dots = \overline{\alpha}_{v-N+1} = 0$. *Строим смежные классы*

$$K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\overline{\alpha}_{-N+1}}\dots\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_0}, K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{-N+1}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\overline{\alpha}_{-N+2}}\dots\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_1}, \dots, K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{v-N}}\mathbf{r}_{-N+1}^{\overline{\alpha}_{v-N+1}}\dots\mathbf{r}_0^{\overline{\alpha}_v},$$

$$K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{v-N+1}}\dots\mathbf{r}_{-1}^{\overline{\alpha}_v}, K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_{v-N+2}}\dots\mathbf{r}_{-2}^{\overline{\alpha}_v}, \dots, K^{\perp}_{-N}\mathbf{r}_{-N}^{\overline{\alpha}_v}.$$

Пусть $\tilde{E}$ *объединение всех таких смежных классов, и* E_X *периодическое продолжение множества* $\tilde{E}$ *за пределы шара* K_1. *Обозначим* $E = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_X\mathcal{A}^n$ *и определим при каждом* $\mathbf{l} \in GF(p^s)$, $\mathbf{l} \neq 0$ *функции* $\widehat{\psi}^{(l)} = \mathbf{1}_{\mathbf{r}^{\mathbf{l}}E_X \cap E\mathcal{A}^{-1}}$. *Тогда* $\Psi = \{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(q-1)}\}$ *есть КМА-вейвлет.*

Задача построения вейвлетов, которые не будут КМА-вейвлетами, остается открытой.

Библиографический список

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М. : Наука, 1966.
2. *Lukomskii S. F., Vodolazov A. M.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433.
3. *Behera B., Jahan Q.* Characterization of wavelets and MRA wavelets on local fields of positive characteristic // Collect. Math. 2015. Vol. 61.
4. *Lukomskii S. F., Berdnikov G. S.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. Vol. 13, №. 5. World Scientific Publishing Company, Published online: 17 September 2015, DOI: 10.1142/S021969131550037X

ТЕОРЕМА ПОСТА–ГЛУСКИНА–ХОССУ ДЛЯ n-КВАЗИГРУПП

Ф. М. Малышев (г. Москва)
E-mail: malyshevfm@mi.ras.ru

Отображение $A : X^n \to X$, $n \geqslant 3$, $A(x_1, \dots, x_n) = [x_1 x_2 \dots x_n]$, задаёт n-квазигруппу на множестве X, если оно биективно по каждому из n аргументов при любой фиксации остальных $n-1$ аргументов (см. [1, гл. I]). В случае ассоциативных n-квазигрупп, когда выражение $[x_1 \dots x_i [x_{i+1} \dots x_{i+n}] x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}]$ не зависит от $i = 1, \dots, n-1$, имеет место теорема Поста–Глускина–Хоссу (см. [2–5]).

Теорема. *Для ассоциативной* n*-квазигруппы* X *имеется групповая операция на множестве* X*, при которой* $[x_1 x_2 \dots x_n] =$

$= x_1\theta(x_2)\theta^2(x_3)\ldots\theta^{n-2}(x_{n-1})c\,x_n$, *где*

$$\theta \in \mathrm{Aut}\,X,\ c \in X,\ \theta(c) = c,\ \theta^{n-1}(x) = cxc^{-1},\ x \in X. \qquad (1)$$

Л. М. Глускин обратился к этой тематике под влиянием В. В. Вагнера [6].

В данной теореме можно отказаться от ассоциативности, заменить следуемым из неё более слабым условием, связанным с так называемой слабой обратимостью n-квазигрупп. В результате условия (1) в формулировке теоремы не потребуются.

Определение 1. *Называем n-квазигруппу i-слабо обратимой справа, $i = 1, \ldots, n-2$, если из равенства $[\overline{a}\overline{b}_1] = [\overline{a}\overline{b}_2]$ для каких-либо $\overline{a} \in X^i$, $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2 \in X^{n-i}$ следуют равенства $[\overline{b}_1\overline{x}] = [\overline{b}_2\overline{x}]$ для всех $\overline{x} \in X^i$.*

Аналогично определяется *i-слабая обратимость слева.* Для $i = 1$ это условие рассматривалось В. Д. Аносовым для произвольных отображений A. Ясно, что из 1-слабой обратимости справа (слева) следует i-слабая обратимость справа (слева) для всех $i = 2, \ldots, n-2$. С ростом i требования слабой обратимости становятся менее жёсткими. Также просто проверяется, что из ассоциативности следует 1-слабая обратимость справа и слева.

Примеры n-квазигрупп, i-слабо обратимых справа и слева, $i \leqslant n/2$, предоставляют решения следующего функционального уравнения из работы [7]

$$f(\overline{x}, h(\overline{y}, \overline{z})) = g(h(\overline{x}, \overline{y}), \overline{z}), \qquad (2)$$

в котором неизвестными являются $(i+1)$-квазигруппы f, g и $(n-i)$-квазигруппа h. В уравнении (2) через $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$ обозначены независимые переменные со значениями в X^i, X^{n-2i} и X^i соответственно.

В случае конечного множества X в работе [8] непосредственно доказывается и обратное: любая 1-слабо обратимая справа (как и слева) n-квазигруппа представляется в виде (2), в частности, 1-слабые обратимости справа и слева равносильны. Для бесконечных X это тоже верно, но только как следствие следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеется n-квазигруппа X со свойством 1-слабой обратимости справа (или слева). Тогда для некоторых: подстановки $\sigma \in S_X$, структуры группы на X и автоморфизма $\theta \in Aut\,X$ справедливо тождество $\sigma([x_1 \ldots x_n]) = x_1\theta(x_2)\theta^2(x_3)\ldots\theta^{n-2}(x_{n-1})\theta^{n-1}(x_n)$, $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$.*

Для конечных X эта теорема была доказана в работе [8]. Классическая теорема Поста–Глускина–Хоссу получается как следствие теремы 1.

Идея доказательства теоремы 1 связана со следующей геометрической интерпретацией условия 1-слабой обратимости справа. Латинский гиперкуб X^n, определяемый n-квазигруппой, задаёт семейство функций $f_k : X^{n-1} \to X$, $k \in X$, определяемых условием: $f_k(x_1, \dots, x_{n-1}) = y \Leftrightarrow [x_1 \dots x_{n-1}\, y] = k$. Если Γ_k – график функции f_k, то $X^n = \coprod_{k\in X} \Gamma_k$. Сечение гиперкуба X^n фиксацией первых $n-2$ координат как $\overline{a} \in X^{n-2}$ будет латинским квадратом X^2, который разбивается на диагонали, являющиеся пересечениями данного сечения со всеми графиками Γ_k, $k \in X$. В условиях теоремы 1 получающиеся разбиения не зависят от конкретного сечения, от $\overline{a} \in X^{n-2}$, причём пересечения каждого сечения с каждым графиком Γ_i, $i \in X$, после применения к ним "сдвига влево": $\iota : X^n \to X^{n-1}$, $\iota(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$, будут "линиями уровня" для всех функций f_k, $k \in X$.

Благодаря выше сформулированным свойствам, разбиение X^2 на диагонали задаёт так называемое самоинвариантное 2-параметрическое семейство подстановок $\pi : X^2 \to S_X$ в соответствии с условием: $\pi_{ij}(u) = v \Leftrightarrow [\overline{a}iu] = [\overline{a}jv]$, $i, j, u, v \in X$, которое от $\overline{a} \in X^{n-2}$ не зависит. Группа $\langle \pi_{ij} | i, j \in X\rangle$, при этом, транзитивна на X.

Определение 2. *Семейство подстановок* $\pi : X^2 \to S_X$, $(i, j) \mapsto \pi_{ij}$, *называем самоинвариантным, если: 1)* $\pi_{jk}\pi_{ij} = \pi_{ik}$, $i, j, k \in X$, *2)* $\pi_{\pi_{ij}(u),\pi_{ij}(v)} = \pi_{uv}$, $i, j, u, v \in X$.

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть на множестве* X *задано самоинвариантное 2-параметрическое семейство подстановок* $\pi_{ij} \in S_X$, $i, j \in X$, *причём группа* $G = \langle \pi_{ij} | i, j \in X\rangle$ *транзитивна на* X. *Тогда для некоторых эпиморфизма* $\varphi : G \to G$ *и отождествления* X *с множеством смежных классов* G/H, $H < G$, *имеем:* $H \subseteq \ker\varphi$; $\pi_{g_1H,g_2H}(g_3H) = \varphi(g_2^{-1}g_1)g_3H$, $g_1, g_2, g_3 \in G$.

Библиографический список

1. *Белоусов В. Д.* n-арные квазигрупы. Кишинёв : Штиинца, 1972.

2. *Post E. L.* Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, № 2.

3. *Hosszú M.* On the explicit form on n-group operations // Publ. Math. 1963. Vol. 10, № 1 – 4.

4. *Глускин Л. М.* Позиционные оперативы // Матем. сб. 1965. Т. 68(110), № 3.

5. *Гальмак А. М., Воробьёв Г. Н.* О теореме Поста – Глускина – Хоссу // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14).

6. *Глускин Л. М.* Исследования по общей алгебре в Саратове // Изв. вузов. Матем. 1970. № 4(95).

7. *Hosszú M.* Algebrai rendszereken értelmezett függvényegyenletek. // Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl. 1962. № 12.

8. *Малышев Ф. М.* Теорема Поста–Глускина–Хоссу для конечных n-квазигрупп и самоинвариантные семейства подстановок // Матем сб. 2016. Т. 207, № 2.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ В АДДИТИВНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СЧИТАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ ПРОСТЫХ ОБРАЗУЮЩИХ[1]

Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский, В. Л. Чернышев
(г. Москва)
E-mail: minenkov.ds@gmail.com, nazaikinskii@yandex.ru, vchernyshev@hse.ru

Рассматривается обратная задача о распределении абстрактных простых чисел из абстрактной аналитической теории чисел. Представленная теорема имеет приложение, в частности, к задаче о числе локализованных гауссовых пакетов, возникающей при изучении динамических систем на геометрических и декорированных графах.

Пусть (G, ∂) – *арифметическая полугруппа* (записанная аддитивно), то есть $G = \bigoplus_{p\in P} Z_+$ – прямая сумма счетного числа экземпляров полугруппы Z_+ целых неотрицательных чисел, занумерованных элементами счетного множества P, а $\partial\colon G \to R_+$ – ее гомоморфизм в аддитивную полугруппу неотрицательных вещественных чисел, такой, что при каждом $x \in R_+$ число элементов $a \in G$, для которых $\partial(a) \leqslant x$, конечно. Будем считать P подмножеством в G, отождествляя каждый элемент $p \in P$ с образующей в соответствующем экземпляре полугруппы Z_+. Таким образом P – множество образующих полугруппы G. Рассмотрим считающую функцию *абстрактных простых чисел* $\pi_G^{\#}(x)$ и считаю-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ ОНГ (проект № 14-11-00432).

щую функцию *абстрактных целых чисел* $N_G^{\#}(x)$:

$$N_G^{\#}(x) = \#\{a \in G\colon \partial(a) \le x\},$$

$$\pi_G^{\#}(x) = \#\{p \in P\colon \partial(p) \le x\},$$

где $\#A$ – мощность множества A. Обе они конечны при всех x. Рассмотрим ζ-функцию полугруппы (G, ∂) (см. например [1, с. 36]):

$$\zeta_G(s) = \sum_{a \in G} e^{-\partial(a)s}, \qquad s = \sigma + it.$$

Основным представляемым результатом является следующая теорема:

Теорема. *Пусть справедлива асимптотика при* $x \to \infty$

$$\pi_G^{\#}(x) = b_0 x^{\gamma} e^{x}(1 + O(x^{-\delta})),$$

с некоторыми постоянными $b_0 > 0$, $\gamma > -1$ *и* $\delta \in (0, 1]$.

Тогда асимптотика $N_G^{\#}(x)$ *при* $x \to \infty$ *имеет вид*

$$N_G^{\#}(x) = \left.\frac{e^{xs}\zeta_G(s)}{\sqrt{2\pi(\ln \zeta_G(x))''}}\right|_{s=\beta(x)} (1 + O(x^{-\kappa})),$$

где $s = \beta(x) > 1$ *– единственное вещественное решение уравнения*

$$x + (\ln \zeta_G(s))' = 0,$$

а $\kappa > 0$ *– произвольное число, такое, что* $\kappa < \frac{\delta}{2+\gamma}$, $\kappa \le \frac{1+\gamma}{2+\gamma}$.

Подобные асимптотики вычислялись в разных ситуациях разными методами, в частности в работах следующих авторов: G. Meinardus (1954), Б. М. Бредихин (1960), А. М. Вершик (1996), B. L. Granovsky и D. Stark (2006), В. П. Маслов и В. Е. Назайкинский (2008), Ю. В. Якубович (2012) (см. также [1–2]). Во многих работах рассматривается случай целочисленных $\partial(p)$ с заданными кратностями (мультипликативной мерой).

Отметим, что хотя обратной задаче для случая экспоненциального роста функции $\pi_G^{\#}(x)$ посвящено довольно много работ, но условия вида $\pi_G^{\#}(x) \sim b_0 x^{\gamma} e^{x}$, по-видимому, не рассматривались. Аппроксимировать задачу с такими условиями задачей, в которой функция $\partial(a)$ принимала бы только целые значения (или значения, равные целому кратному некоторого числа) невозможно. Поэтому несмотря на то, что формулы из работы [3], относящейся к целочисленному случаю, близки по форме к нашим, они описывают ситуацию, весьма отличающуюся от рассматриваемой.

Библиографический список

1. *Knopfmacher J.* Abstract analytic number theory. Amsterdam. : North-Holland, 1975.

2. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М. : Наука, 1971.

3. *Granovsky B. L.* Asymptotic enumeration and logical limit laws for expansive multisets and selections // J. London Math. Soc. 2006. Vol. 73, № 1.

О ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АНТИКОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. П. Мищенко, О. В. Шулежко (г. Ульяновск)
E-mail: mishchenkosp@mail.ru, ol.shulezhko@gmail.com

Характеристика основного поля предполагается равной нулю.

Почти нильпотентным называется ненильпотентное многообразие, если любое его собственное подмногообразие является нильпотентным. Сведения о почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр можно найти в обзоре [1]. В случае неассоциативных алгебр в работе [2] построено почти нильпотентное многообразие экспоненты 2. В работе авторов [3] доказано существование дискретной серии почти нильпотентных многообразий различных целых экспонент. В статье [4] получен аналогичный результат в случае коммутативных метабелевых алгебр.

Данная работа продолжает исследование почти нильпотентных многообразий в различных классах алгебр. Обозначим B_m, $m \geq 2$, алгебру, порожденную образующими $\{z_1, z_2, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям:

$$z_1 z_2 = -z_2 z_1;$$

$$a_i a_j = -a_i z_s = -z_s a_i = 0,\ 1 \leq i, j \leq m,\ s = 1, 2;$$
$$(z_1 z_2 w(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(z_1 z_2 w'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0,$$

для $s = 1, 2$ и всех, включая пустых, слов w, w' от операторов правого умножения R_{a_i},

$$z_1 z_2 (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \ldots a_{i_t} = -z_1 z_2 (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \ldots a_{i_t}$$

для всех $k \geq 0$ и $1 \leq s < t \leq m$, $1 \leq i_1, \ldots, i_t \leq m$. Кроме того, для $s = 1, 2$ и для любого элемента $u \in B_m$ степени по образующим не менее двух $uz_s = z_s u = 0$, $ua_k = -a_k u$, $1 \leq k \leq m$.

Несложно доказать, что алгебра B_m удовлетворяет тождествам антикоммутативности и метабелевости

$$xy \equiv -yx, \ \ (x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Получены следующие результаты:

Теорема. *Пусть* $\mathbf{V_m}$ *– многообразие, порожденное алгеброй* B_m, $m = 2, 3, \ldots$. *Тогда экспонента как самого многообразия* $\mathbf{V_m}$, *так и любого его ненильпотентного подмногообразия, равна* m.

Учитывая, что во всяком ненильпотентном многообразии существует почти нильпотентное подмногообразие, получаем

Следствие. *В случае нулевой характеристики основного поля для любого целого* m, $m \geq 2$, *существует почти нильпотентное антикоммутативное метабелево многообразие, экспонента которого равна* m.

Библиографический список

1. *Шулежко О. В.* О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1.

2. *Mishchenko S., Valenti A.* An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics. 2014. Vol. 199, № 1.

3. *Мищенко С. П., Шулежко О. В.* Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вест. Московского ун-та. Серия 1. Математика и механика. 2015. № 2.

4. *Мищенко С. П., Шулежко О. В.* О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр // Вест. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2015. № 3 (125).

ОПЕРАТОР КМС ТИПА $B(1.1)$ И СУПЕРАЛГЕБРА ЛИ $osp(3.2)$

Г. С. Мовсисян, А. Н. Сергеев (г. Саратов)
E-mail: movsisyangs@gmail.com, sergeevan@info.sgu.ru

В докладе будет рассказано о связи дифференциального оператора Калоджеро–Мозера–Сазерленда (КМС) типа $B(1.1)$ с теорией представления супералгебры ли $osp(3.2)$.

Рассмотрим оператор Калоджеро–Мозера–Сазерленда соответствующий системе корней типа $B(1.1)$ [1]

$$L_2 = (\partial_u)^2 + k(\partial_v)^2 - \frac{u+v}{u-v}(\partial_u - k\partial_v) - (1+p)(\partial_u + \partial_v) -$$

$$-(1+2p)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial}{\partial u}\partial_u + 2k\frac{\partial}{\partial v}\partial_v - \frac{4}{u-v}(\partial_u - k\partial_v), \qquad (1)$$

Естественной областью действия оператора (1) является следующая алгебра деформированных симметрических полиномов

$$A_{1,1} = \{f \in C[u,v] \mid (\partial_u - k\partial_v)f \in (u-v)\},$$

Известно [2], что базисом этой алгебры являются суперполиномы Джека, которые в этом случае имеют вид

$$P_\Lambda = v^\lambda u^\mu - \frac{\lambda - k^{-1}\mu}{\lambda - 1 - k^{-1}(\mu+1)} v^{\lambda-1}u^{\mu+1} = v^\lambda u^\mu - \frac{\mu - k\lambda}{\mu + 1 - k(\lambda - 1)} v^{\lambda-1}u^{\mu+1},$$

где $\Lambda = (\lambda, \mu)$ - диаграмма Юнга - крюк.

Определим для каждой диаграммы Λ многочлен F_Λ по следующей формуле

$$F_\Lambda = \sum_{M \subseteq \Lambda} c(M,\Lambda)P_M, \quad \text{где} \quad c(M,\Lambda) = \frac{Q_M(\Lambda)}{Q_M(M)}\frac{f_\Lambda}{f_M} \ [1] \qquad (2)$$

Теорема 1. Многочлены (2) являются собственными функциями оператора (1).

Следующая Теорема является основным результатом работы и показывает, что при определенной специализации параметров k, p собственные функции совпадают с характерами неприводимых конечномерных представлений супералгебры Ли $osp(3,2)$.

Теорема 2. 1) Если $\mu \neq \lambda - 1$, то $\exists \lim\limits_{k,p\to -1} 2^{|\Lambda|-1} F_\Lambda = SchV^\Lambda$.
2) Если $\mu = \lambda - 1, \mu \neq 0$ то при $p+1 = \lambda(k+1)$ $\exists \lim\limits_{k\to -1} -2^{|\Lambda|-1} F_\Lambda = SchV^\Lambda$.
3) Если $\mu = 0, \lambda = 1$ то при $p+1 = 2(k+1)$ $\exists \lim\limits_{k\to -1} 2F_\Lambda = SchV^\Lambda$, где $|\Lambda| = = \lambda + \mu$, $V^\Lambda-$ неприводимое представление суперменее алгебры Ли $osp(3.2)$, [3].

Библиографический список

1.*Sergeev A. N.* BC_∞ Calodgero-Moser operator and super Jacobi polynomials // Advances in Mathematics, 2009. Vol. 222, № 5.

2.*Sergeev A. N.* Generalised discriminant, deformed quantum Calogero-Moser-Sutherland problem and super - Jack polynomials // Advances in Mathematics. 2005. Vol. 192, № 2.

3. *Frappat L.* Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras. Great Britain : Academic Press, 2000.

ОБ АБСТРАКТНОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФИЧЕСКИХ АВТОМАТОВ ПОЛУГРУППАМИ ИХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В. А. Молчанов, Е. В. Хворостухина (г. Саратов)
E-mail: v.molchanov@inbox.ru, katyanew2007@rambler.ru

В настоящей работе рассматриваются так называемые гиперграфические автоматы, т.е. автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой гиперграфа. Это достаточно широкий и весьма важный класс автоматов, так как многообразие таких алгебраических систем охватывает, в частности, автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов являются плоскостями (например, проективными или аффинными), а также автоматы, у которых множества состояний и выходных сигналов разбиваются на классы некоторой эквивалентности.

В работе под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат [1] $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, у которого множества состояний X и выходных сигналов Y наделены такими структурами гиперграфов [2] $H_X = (X, L_X)$ и $H_Y = (Y, L_Y)$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s : X \longrightarrow X$ – это эндоморфизм гиперграфа H_X и отображение $\lambda_s : X \longrightarrow Y$ – это гомоморфизм гиперграфа H_X в гиперграф H_Y. Например, для любых гиперграфов H_X, H_Y алгебраическая система $\mathrm{Atm}(H_X, H_Y) = (H_X, S(H_X, H_Y), H_Y, \delta', \lambda')$ с функциями $\delta'(x,(\varphi,\psi)) = \varphi(x)$, $\lambda'(x,(\varphi,\psi)) = \psi(x)$ (где $x \in X$, $(\varphi,\psi) \in S(H_X,H_Y)$) является гиперграфическим автоматом, который называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y.

Изоморфизмом гиперграфического автомата $A = (H_X, S, H_Y, \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_{X_1}, S_1, H_{Y_1}, \delta_1, \lambda_1)$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f : X \longrightarrow X_1, \pi : S \longrightarrow S_1$ и $g : Y \longrightarrow Y_1$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. f является изоморфизмом гиперграфа H_X в гиперграф H_{X_1}, π – изоморфизмом полугруппы S в полугруппу S_1, g – изоморфизмом гиперграфа H_Y в гиперграф H_{Y_1} и для любых значений $x \in X, s \in S$ выполняются условия $f(\delta(x,s)) = \delta_1(f(x),\pi(s))$, $g(\lambda(x,s)) = \lambda_1(f(x),\pi(s))$.

Гиперграф $H = (X, L)$ называется эффективным, если любая его вершина принадлежит некоторому ребру этого гиперграфа. Пусть p – некоторое натуральное число. Гиперграф H будем называть гиперграфом с p-определимыми ребрами, если в каждом ребре этого гиперграфа найдется по крайней мере $p+1$ вершина и, с другой стороны, любые p вершин этого гиперграфа содержатся не более, чем в одном ребре. Например, эффективный гиперграф с 1-определимыми ребрами - это гиперграф, ребра которого образуют нетривиальное разбиение множества вершин без одноэлементных классов. Кроме того, если рассмотреть плоскость как гиперграф, вершинами которого являются точки этих плоскостей, а ребрами - соответствующие прямые, то проективная плоскость и аффинная плоскость с числом точек более четырех являются эффективными гиперграфами с 2-определимыми ребрами.

В работе решена задача об абстрактной определяемости универсальных гиперграфических автоматов над эффективными гиперграфами с $p-$определимыми ребрами своими полугруппами входных сигналов.

Теорема. *Пусть* $\mathrm{Atm}(H_X,H_Y), \mathrm{Atm}(H_{X_1},H_{Y_1})$ *– универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с $p-$ определимыми ребрами H_X, H_Y и H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) гиперграфы H_X, H_Y изоморфны гиперграфам H_{X_1}, H_{Y_1} соответственно;

2) полугруппы входных сигналов $S(H_X,H_Y), S(H_{X_1},H_{Y_1})$ автоматов $\mathrm{Atm}(H_X,H_Y), \mathrm{Atm}(H_{X_1},H_{Y_1})$ *изоморфны;*

3) автоматы $\mathrm{Atm}(H_X,H_Y), \mathrm{Atm}(H_{X_1},H_{Y_1})$ *изоморфны.*

Таким образом, полученный результат показывает, что универсальные гиперграфические автоматы над эффективными гиперграфами с p—определимыми ребрами определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных сигналов.

Библиографический список

1. *Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высшая школа, 1994.
2. *Зыков А. А.* Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29, № 6.

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА ДЛЯ ПЯТЫХ СТЕПЕНЕЙ С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Н. Н. Назрублоев (г. Душанбе)

E-mail: nasrullo_86@bk.ru

В работах [1–4] были изучены поведения коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha,x,y)=\sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n),\qquad \sqrt{x}\le y<\frac{x}{\ln x}$$

в множестве точек первого класса при $n=2,3,4$ и приложены при выводе асимптотических формул с почти равными слагаемыми в проблеме Варинга (для кубов и четвёртых степеней) в [5,6] и кубической задаче Эстермана в [4]. Поведения $T(\alpha,x,y)$ в множестве точек первого класса при произвольном фиксированном n были изучены в работах [7–9].

Доклад посвящен асимптотической формуле в проблеме Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми, при выводе которой используется вышеупомянутый результат, а также оценка $T(\alpha,x,y)$ в множестве точек второго класса [10] и теорема о правильном порядке интеграла от тридцать второй степени модуля $T(\alpha,x,y)$ [11].

Теорема. *Пусть $N>N_0$ — натуральное число, ε — произвольное положительное число, не превосходящее 10^{-8}, $\mathcal{L}=\ln N$, тогда для числа $J(N,H)$ представлений N суммою 33 пятых степеней чисел x_i, $i=1,2,\dots,33$ с условиями*

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right|\le H,\qquad H\ge N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon},$$

справедлива асимптотическая формула:

$$J(N,H)=\frac{B\mathfrak{S}(N)H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}}+O\left(\frac{H^{32}}{\sqrt[5]{N^4}\mathcal{L}}\right),$$

$$B=\frac{\sqrt[5]{33^4}}{5\cdot 32!}\sum_{k=0}^{16}(-1)^k C_{33}^k(33-2k)^{32},$$

где $\mathfrak{S}(N)$ *– особый ряд, сумма которого превосходит некоторое положительное постоянное.*

Следствие. *Существует такое* N_0*, что каждое натуральное число* $N>N_0$ *представимо в виде суммы* 33 *пятых степеней почти равных чисел* x_i*:*

$$\left|x_i-\left(\frac{N}{33}\right)^{\frac{1}{5}}\right|\le N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon},\qquad i=1,2,\ldots,33.$$

Библиографический список

1. *Рахмонов З. Х., Шокамолова Дж. А.* Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат, хим., геол. и техн. н. 2009. № 2(135).

2. *2. Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И.* Об оценках коротких кубических сумм Г. Вейля // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2008. Т. 51, № 1.

3. *Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Мирзоабдугафуров К. И.* Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвертой степени // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2010. Т. 53, № 10.

4. *Rakhmonov Z. Kh.* The Estermann cubic problem with almost equal summand // Mathematical Notes. 2014. Vol. 95, iss. 3 – 4.

5. *Рахмонов З. Х., Мирзоабдугафуров К. И.* Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2008. Т. 51, № 2.

6. *Рахмонов З. Х., Азамов А. З.* Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2011. Т. 54, № 3.

7. *Рахмонов З. Х., Озодбекова Н. Б.* Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2011. Т. 54, № 4.

8. *Rakhmonov Z. Kh.* Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля // Учен. записки Орлов. ун-та. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6, ч. 2.

9. *Назрублоев Н. Н., Рахимов А. О.* Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2014. Т. 57, № 8.

10. *Назрублоев Н. Н.* Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени в множестве точек второго класса // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2014. Т. 57, № 9.

11. *Назрублоев Н. Н.* О средней значение коротких тригонометрических сумм Г. Вейля пятой степени // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2014. Т. 57, № 7.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ BR-МНОЖЕСТВА[1]

А. А. Осипова (г. Владимир)
E-mail: albina.a.osipova@yandex.ru

С момента открытия Э. Гекке в 1921 г. одномерных множеств ограниченного остатка (*bounded remainder set, BR-set*), в этой области было получено довольно много результатов. Впервые найти пример двумерных BR-множеств удалось Р. Сюзу в 1954 г., а первые оценки остаточных членов в двумерном случае были получены только спустя 50 лет В. Г. Журавлевым для множеств, построенных на основе разбиения фрактальной развертки Рози. Под руководством В. Г. Журавлева в 2011 г. автор впервые нашел двумерные BR-множества, построенные на основе разбиений гексагональных разверток тора и доказал для них точные оценки остаточных членов. В дальнейшем автором был получен целый ряд результатов [1]. Здесь рассматривается подход к построению параметрических двумерных и трехмерных BR-множеств, разработанный автором на основе метода Журавлева.

Пусть задано пространство параметров $C^D = \{c = (c_1, \ldots, c_D) \in \mathbb{R}^D; c_i \geq 0, \sigma(c) \leq 1\}$, где $\sigma(c) = \sum_1^D (c_i)$, $D = 2, 3$ — размерность. Любому элементу $c \in C^D$ ставиться в соответствие выпуклый многогранник $T^D(c)$ с попарно параллельными и равными противоположными сторонами, имеющий $2^{D+1}-2$ вершин и трансляционно заполняющий все пространство $\mathcal{T} = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^D} T^D(c)[l]$, где l — векторы квадратной решетки $\mathbb{Z}^D, D = 2, 3$. Благодаря этому свойству многогранник $T^D(c)$ можно

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00055-мол_а).

рассматривать в качестве развертки тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$, $D = 2, 3$. В двухмерном случае, получаем выпуклый шестиугольник, для его построения от каждой вершины единичного квадрата, кроме $(0, 0)$, откладываем вектор $-c$ [2]. В трехмерном случае — ромбододекаэдр, для его построения от каждой вершины, имеющей в координатах одну единицу, откладываем вектор $-c$, две единицы — векторы $-c$ и $-2c$, три единицы — вектор $-2c$ [3].

В работе [4] показано, что множества ограниченного остатка могут быть построены на основе развертки тора, если она разбита на $D + 1$ областей, перекладывание которых вновь дает исходную развертку.

Для построения $D + 1$ множеств ограниченного остатка на основе описанных выше разверткок тора $T^D(c), D = 2, 3$, введем параметр $t : 0 < t \leq 1$. Сдвигая разбиение пространства $\mathcal{T}$ на вектор $-\alpha = tc$, при этом сама развертка $T^D(c)$ остается неподвижной, получим интересующие нас множества $T^D_k, k = 0, 1, \dots D$. Для каждого из множеств введем остаточные челены $\delta_k(i)$ равномерного распределения, для которых справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть развертка $T^D(c)$ D-мерного тора, $D = 2, 3$, задана параметром $c \in C^D$, ее разбиение на области T^D_k, $k = 0, 1, \dots, D$ определяется параметром t, и вектор α — иррационален. Тогда множества T^D_k являются множествами ограниченного остатка и для остаточных членов $\delta_k(i)$ выполняются следующие точные неравенства:*
1. При $D = 2$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq \delta_0(i) \leq & 2 - \sigma(c); \\ -1 & \leq \delta_1(i) \leq & c_1; \\ -1 & \leq \delta_2(i) \leq & c_2. \end{array}$$

2. При $D = 3$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq \delta_0(i) \leq & 3 - 2\sigma(c); \\ -1 & \leq \delta_1(i) \leq & 2c_1; \\ -1 & \leq \delta_2(i) \leq & 2c_2; \\ -1 & \leq \delta_3(i) \leq & 2c_3; \end{array}$$

где $\sigma(c) = \sum_1^D (c_i)$, $D = 2, 3$.

Точные оценки остаточных членов необходимы при решении прикладных задач, в частности, для решения задач о вложении решеток в квазирешетки и построения сбалансированных последовательностей на основе множеств ограниеченного остатка.

Библиографический список

1. *Осипова А. А.* Распределение точек на многомерных цветных торах: монография. Владимир : ООО «Аркаим», 2016.

2. *Абросимова А. А.* Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4(40).

3. *Осипова А. А.* Выпуклые ромбододекаэдры и параметрические BR-множества // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1(57).

4. *Журавлев В. Г.* Перекладывающиеся торические развертки и множества огранниченного остатка // Записки науч. семинаров ПОМИ. 2011. № 392.

АЛГЕБРЫ ХОПФА В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

А. Н. Панов (г. Самара)
E-mail: apanov@list.ru

Основной задачей теории представлений конечных групп является задача описания ее комплексных неприводимых представлений. Некоторые конечные группы являются членами семейства групп $\{G_n\}$, поэтому изучать их представления естественно все вместе.

Пусть R_n группа Гротендика группы G_n (то есть свободная абелева группа натянутая на множество неприводимых комплексных характеров (представлений) группы G_n. Рассмотрим абелеву группу $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$. В ряде важных примеров эта абелева группа имеет естественную структуру алгебры Хопфа. Два классических примера (см. [1, 2]):
1) Семейство групп подстановок $S = \{S_n\}$. Алгебра Хопфа $R(S)$ изоморфна алгебре Хопфа симметрических функций Λ. Это утверждение позволяет решать задачи теории представлений группы S_n в терминах симметрических функций.
2) Семейство $GL = \{\mathrm{GL}(n, F_q)\}$. Алгебра Хопфа $R(GL)$ изоморфна тензорному произведению $\otimes_\rho \Lambda(\rho)$, где ρ пробегает множество каспидальных характеров, и $\Lambda(\rho)$ – алгебра Хопфа, изоморфная Λ.

Для унитреугольной группы $U_n = \mathrm{UT}(n, F_q)\}$ задача классификации всех неприводимых представлений является чрезвычайно трудной задачей. Однако можно определить алгебру Хопфа $SR(U) = \oplus_n SR(U_n)$, которая строится по системе суперхарактеров аналогично тому, как алгебры Хопфа $R(S)$ и $R(GL)$ строились по системам неприводимых характеров. В работе [3] доказано, что алгебра Хопфа $SR(U)$ для $q = 2$

изоморфна алгебре Хопфа NCSymm симметрических функций от некоммутирующих переменных. Для произвольного q алгебра Хопфа $SR(U)$ изоморфна алгебре раскрашенных NCSymm.

Теория суперхарактеров для треугольной группы $B_n = \mathrm{T}(n, F_q)$ была построена в работе [4]. Алгебра Хопфа $SR(B)$ допускает следующее описание.

Теорема. *Для любого q алгебра Хопфа $SR(B)$ изоморфна алгебре Хопфа* NCParSymm *частично симметрических функций от некоммутирующих переменных.*

Библиографический список

1. *Zelevinsky A. V.* Representations of finite classical groups. A Hopf algebra aproach // Lecture Notes in Math. 1981. № 869.

2. *Grinberg D., Reiner V.* Hopf algebras in combinatorics. Preprint ArXiv : 1409.8356.

3. *Aguiar M., Andrè, C., Benedetti, C. and others* Supercharacters, symmetric functions in noncommuting variables, and related Hopf algebras // Advances in Mathematics. 2012. Vol. 229, № 4.

4. *Панов А. Н.* Теория суперхарактеров для группы обратимых элементов приведенной алгебры // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 6.

О МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ АНТИКОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

Н. П. Панов (г. Ульяновск)
E-mail: nppanov@yandex.ru

Характеристика основного поля предполагается равной нулю. Все не объясняемые далее понятия можно найти в монографии [1]. Пусть $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие алгебр, $F(X, \mathbf{V})$ – относительно свободная алгебра многообразия $\mathbf{V}$ от счетного множества образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, а $P_n(\mathbf{V})$ – подпространство $F(X, \mathbf{V})$, образованное полилинейными элементами степени n от $x_1, \dots, x_n$. Пусть также $c_n(\mathbf{V})$ – размерность пространства $P_n(\mathbf{V})$, $c_n(\mathbf{V}) = dim P_n(\mathbf{V})$.

Рассмотрим многообразие **AM** всех алгебр над полем нулевой характеристики, удовлетворяющих тождествам антикоммутативности (1) и метабелевости (2):

$$xy + yx \equiv 0, \qquad (1)$$

$$(xy)(zt) \equiv 0. \tag{2}$$

Теорема. *Базис пространства* $P_n(\mathbf{AM})$, $n \geq 2$, *образуют элементы вида*

$$(((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3}) \cdots x_{i_n}),\ i_1 < i_2, \tag{3}$$

и выполняется равенство $c_n(\mathbf{AM}) = \frac{n!}{2}$.

Понятно, что $c_1(\mathbf{AM}) = 1$. Также заметим, что любой ненулевой элемент пространства $P_n(\mathbf{AM})$ может быть представлен линейной комбинацией элементов вида (3) в силу тождеств (1) и (2). При этом с помощью простого подсчета можно убедиться в том, что выписанных мономов ровно $\frac{n!}{2}$. Доказательство линейной независимости элементов вида (3) проводится посредством введения совокупности антикоммутативных метабелевых алгебр A_m, $m = 1, 2, \ldots$. Для каждого m алгебру A_m зададим $2m^2$ образующими e_{ij}, z_{ij}, $1 \leq i, j \leq m$, и следующими определяющими соотношениями. Для любых i, j, k, l, $1 \leq i, j, k, l \leq m$, выполняются равенства:

$e_{ij}e_{kl} = 0;\ z_{ij}z_{kl} = 0;\ z_{ij}e_{kl} = -e_{kl}z_{ij} = \delta_{jk}z_{il}$, где δ_{jk}– символ Кронекера.

Известно, что пространство $P_n(\mathbf{AM})$ является вполне приводимым модулем симметрической группы S_n, поэтому его характер $\chi(P_n(\mathbf{AM}))$ может быть представлен в виде целочисленной комбинации неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где λ – разбиение числа n, $\lambda \vdash n$. Понятно, что также имеет место равенство

$$c_n(\mathbf{AM}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda, \tag{4}$$

где d_λ – соответствующая λ размерность неприводимого модуля. Так как $P_n(\mathbf{AM})$ является фактор-модулем регулярного, то легко показать, что $m_{(1^n)} = 1$, $m_{(n)} = 0$. Кроме того, при $n = 2$ имеем $\chi(P_2(\mathbf{AM})) = \chi_{(1,1)}$.

Представим алгоритм вычисления кратностей m_λ многообразия $\mathbf{AM}$ для произвольного $n > 2$.

Алгоритм. *Зафиксируем диаграмму Юнга* $\lambda \vdash n$, $n > 2$, *состоящую из двух или более столбцов. Из двух разных строк диаграммы* λ *удалим по одной клетке так, чтобы в результате удаления получилась диаграмма* μ *разбиения числа* $n-2$, $\mu \vdash n-2$. *Для всех таких диаграмм* μ *по формуле крюков найдем соответствующие значения размерностей* d_μ. *Тогда кратность* m_λ *определяется как сумма всех значений* d_μ.

В качестве примера для $n = 5$ вычислим d_λ и m_λ: $d_{(5)} = 1$, $m_{(5)} = 0$; $d_{(4,1)} = 4$, $m_{(4,1)} = d_{(3)} = 1$; $d_{(3,2)} = 5$, $m_{(3,2)} = d_{(2,1)} = 2$; $d_{(3,1,1)} = 6$, $m_{(3,1,1)} = d_{(3)} + d_{(2,1)} = 3$; $d_{(2,2,1)} = 5$, $m_{(2,2,1)} = d_{(1,1,1)} + d_{(2,1)} = 3$; $d_{(2,1,1,1)} = 4$, $m_{(2,1,1,1)} = d_{(1,1,1)} + d_{(2,1)} = 3$; $d_{(1,1,1,1,1)} = 1$, $m_{(1,1,1,1,1)} = 1$.

Подставляя эти значения в формулу (4), получаем в соответствии с утверждением теоремы равенство $c_5(\mathbf{AM}) = 60$.

В заключение отметим, что аналогичные результаты для коммутативных метабелевых алгебр представлены в [2].

Библиографический список

1. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence, RI : American Mathematical Society, 2005.

2. *Мищенко С. П., Панов Н. П.* О многообразии всех коммутативных алгебр с тождеством метабелевости // Материалы XIII Междунар. конф. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова (г.Тула, 25-30 мая 2015). Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015.

О НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЯХ

В. Н. Поляков (г. Саратов)
E-mail: polyakovvn@info.sgu.ru

В нашем сообщении речь пойдет об уравнениях вида

$$x^{2k} \pm my^2 = z^2,$$

где $k > 2$.

Из уравнений указанного вида лишь уравнение

$$x^4 + y^2 = z^2$$

известно, причем оно известно с X века нашей эры; именно тогда оно привлекло внимание известного математика той поры Абу Джафара ибн ал-Хусайна, предложившего свое решение этого уравнения [1].

Однако наиболее глубокие результаты об этом уравнении получены лишь в наше время и пренадлежат они С.Ш. Кожегельдинову [2].

Мы предлагаем обощение уравнения в виде

$$x^4 + my^2 = z^2 \tag{1}$$

и даем три коиплекта формул для компонент решений этого уравнения. Кроме того, мы вводим в рассмотрение уравнение, аналогичное уравнению (1), а именно

$$x^4 - my^2 = z^2 \tag{2}$$

а также предлагаем формулы для отыскания его решений.

Далее мы переходим к рассмотрению уравнений

$$x^6 + my^2 = z^2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x^6 - my^2 &= z^2, \\ x^8 + my^2 &= z^2, \\ x^8 - my^2 &= z^2. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом число комплектов формул для компонент решений этих уравнений возрастает до 4 или 5 соответственно.

Приведем некоторые из них для уравнений (3) и (4).

Теорема 1. *Для компонент x, y, z решений уравнений (3) справедливы, в частности, формулы:*

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 6u^5v + 20mu^3v^3 + 6m^2uv^5, \\ z = u^6 + 15mu^4v^2 + 15m^2u^2v^4 + m^3v^6. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для компонент x, y, z решений уравнений (4) справедливы, в частности, формулы:*

$$\begin{cases} x = u^2 - mv^2, \\ y = 8u^7v + 56mu^5v^3 + 56m^2u^3v^5 + 8m^3uv^7, \\ z = u^8 + 28mu^6v^2 + 70m^2u^4v^4 + 28m^3u^2v^6 + m^4v^8. \end{cases}$$

Например, для уравнения (3) при $m = 1$, $u = 3$, $v = 2$ мы получаем в качестве решения вектор (5, 7812, 7813), а для уравнения (4) при $m = 2$, $u = 3$, $v = 2$ имеем в качестве решения вектор (1, 470832, 665857).

Библиографический список

1. *Башмакова И. Г., Славутин Е. И.* История диафантова анализа. М. : Наука, 1984.

2. *Кошегельдинов С. Ш.* Аль-Хусайново уравнение $x^4 + y^2 = z^2$ // Матем. заметки. 2011. Т. 89, вып. 3.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВТОРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТНЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В. Б. Поплавский (г. Саратов)
E-mail: poplavskivb@maill.ru

Пусть $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ - множество матриц всевозможных конечных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры $\mathbf{B}$, на котором операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, дополнения $'$ и частичный порядок $\subseteq$ определяются для матриц одинаковых размеров поэлементно. Назовём *конъюнктным произведением* матриц A и B, согласованных размеров $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, матрицу $C = A \sqcap B$ размера $m \times k$ с элементами $C^i_j = \bigcup_{t=1}^{n}(A^i_t \cap B^t_j)$. *Дизъюнктное произведение* $A \sqcup B$ определяется дуальным образом: $A \sqcup B = (A' \sqcap B')'$.

Пары $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ образуют частичные полугруппы относительно частичных, то есть определенных не для каждых пар матриц, бинарных операций.

Дополнение булевых матриц , в силу равенств $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ и $(A \sqcup B)' = A' \sqcap B'$, является изоморфизмом частичных полугрупп $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$. Обозначим результат транспонирования матрицы A через A^T. Очевидно, что $(A \sqcap B)^T = B^T \sqcap A^T$ и $(A \sqcup B)^T = B^T \sqcup A^T$. Положем также, что $A'^T = (A^T)' = (A')^T$.

Символом E будем далее обозначать квадратные матрицы с единицами 1 на главной диагонали и нулями 0 на остальных местах, где 0 и 1 – нуль и единица булевой алгебры $\mathbf{B}$. При этом соответствующий контексту размер матрицы E указывать не будем.

Определение 1. *Матрица A называется* первичным $\sqcap-$ идемпотентом, *если $E \nsubseteq A = A \sqcap A$, и* вторичным $\sqcap-$ идемпотентом *частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если $E \subseteq A = A \sqcap A$.*

Для частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ первичные и вторичные $\sqcup-$ идемпотенты определяются дуальным образом, то есть матрица $A = A \sqcup A$ называется первичным $\sqcup-$идемпотентом, если $A \nsubseteq E'$, и вторичным $\sqcup-$идемпотентом, если $A \subseteq E'$.

Любой булевой матрице произвольного размера соответствуют *вторичные идемпотенты правого типа*: $A^{\mathcal{R}} = A \sqcup A'^T$, $A_{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})'^T = A \sqcap A'^T$ и *левого типа*: $A^{\mathcal{L}} = A'^T \sqcup A$, $A_{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})'^T = A'^T \sqcap A$. Причём матрицы $A^{\mathcal{R}}$ и $A^{\mathcal{L}}$ являются вторичными $\sqcap-$ идемпотентами, а $A_{\mathcal{R}}$ и $A_{\mathcal{L}}$являются вторичными $\sqcup-$идемпотентами.

Доказательство следующего утверждения можно найти в [1] и [2].

Теорема 1. *Пусть A – идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Матрица A является первичным $\sqcap-$идемпотентом тогда и только тогда, когда $A \underset{\neq}{\subsetneq} A^{\mathcal{R}}$ и $A \underset{\neq}{\subsetneq} A^{\mathcal{L}}$, и является вторичным $\sqcap-$идемпотентом тогда и только тогда $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.*

Аналогично, если A – идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, то A является первичным $\sqcup-$идемпотентом тогда и только тогда, когда $A_{\mathcal{R}} \underset{\neq}{\subsetneq} A$ и $A_{\mathcal{L}} \underset{\neq}{\subsetneq} A$, и является вторичным $\sqcup-$идемпотентом тогда и только тогда $A = A_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{L}}$.

Следующие равенства проверяются непосредственно и указывают свойства вторичных идемпотентов.

Теорема 2. *Для любой булевой матрицы выполняются равенства:*

$$A^{\mathcal{L}} = (A_{\mathcal{L}})'^{T} = (A'^{T})^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}} \sqcup A_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}} \sqcup A^{\mathcal{L}} =$$

$$= (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A^{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}} = (A_{\mathcal{L}})^{\mathcal{L}} = (A_{\mathcal{L}})^{\mathcal{R}},$$

$$A^{\mathcal{R}} = (A_{\mathcal{R}})'^{T} = (A'^{T})^{\mathcal{L}}) = A^{\mathcal{R}} \sqcup A_{\mathcal{R}} = A_{\mathcal{R}} \sqcup A^{\mathcal{R}} =$$

$$= (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A^{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}} = (A_{\mathcal{R}})^{\mathcal{R}} = (A_{\mathcal{R}})^{\mathcal{L}}.$$

Свойства $A_{\mathcal{L}}$ и $A_{\mathcal{R}}$ записываются аналогично двойственным образом.

Известно, что вторичные идемпотенты играют главную роль в вопросах разрешимости простейших матричных уравнений, делимости, регулярности матриц, порождаемости односторонних идеалов, поиска транзитивно-рефлексивных замыканий и пр.[1, 2]. Вторичные идемпотенты изучались также в [3, 4].

В следующих утверждениях обсуждается взаимное расположение матриц C, C'^{T} и им соответствующих вторичных $\sqcap-$ и $\sqcup-$ идемпотентов в двусторонних главных идеалах ($\mathbf{D}-$ классах) частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Теорема 3. *Пусть A – вторичный $\sqcap-$идемпотент, а B – вторичный $\sqcup-$идемпотент, соответствующие одной и той же матрице C. Если A и B порождают один и тот же двусторонний главный идеал частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, то матрицы C и C'^{T} порождают тот же двусторонний главный идеал.*

Если $C^{\mathcal{L}} = A$ и $C_{\mathcal{L}} = B$ порождают один и тот же левый главный идеал частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, то матрица C порождает тот же левый идеал, а, если $C^{\mathcal{L}} = A$ и $C_{\mathcal{L}} = B$ порождают один *и тот же правый главный идеал частичной полугруппы* $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, *то матрица* C'^T *порождает тот же правый идеал.*

Соответственно, если $C^{\mathcal{R}} = A$ *и* $C_{\mathcal{R}} = B$ *порождают один и тот же левый главный идеал частичной полугруппы* $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, *то матрица* C'^T *порождает тот же левый идеал, а, если* $C^{\mathcal{R}} = A$ *и* $C_{\mathcal{R}} = B$ *порождают один и тот же правый главный идеал частичной полугруппы* $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, *то матрица* C *порождает тот же правый идеал.*

Примером таких главных идеалов частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ в случае тривиальной булевой алгебры $\mathbf{B} = \{0, 1\}$ может служить двусторонний главный идеал, порождённый матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которые являются вторичными $\sqcap-$идемпотентом и $\sqcup-$идемпотентом соответственно.

Библиографический список

1. *Поплавский В. Б.* О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17, вып. 4. (Translation: Poplavski V. B. On applications of associativity of dual compositions in the algebra of Boolean matrix // Journal of Mathematical Sciences. Springer, New York, 2013. Vol. 191, № 5.)

2. *Поплавский В. Б.* Об идемпотентах алгебры булевых матриц // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2.

3. *Кумаров В. Б.* Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, вып.4.

4. *Щекатурова О. О., Ярошевич В. А.* О свойствах булевых матриц // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2.

МНОГООБРАЗИЯ РАЗРЕШИМЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР И АЛГЕБР ЛИ

А. В. Попов (г. Ульяновск)
E-mail: klever176@rambler.ru

Пусть $F\{X\}$ – свободная неассоциативная алгебра от счетного множества порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ над полем нулевой характеристики F. Тождествами неассоциативной F - алгебры A называются элементы $F\{X\}$, лежащие в идеале $I(A) = \bigcap\limits_{\varphi} \ker \varphi$, где пересечение берется по всевозможным гомоморфизмам φ из $F\{X\}$ в A. Многообразием алгебр V называется класс всех алгебр, удовлетворяющих заданному набору тождеств. Тождества, которым удовлетворяет любая алгебра из V, образуют идеал тождеств $I(V)$.

В случае поля нулевой характеристики всякое тождество эквивалентно некоторому набору однородных полилинейных тождеств. Поэтому для изучения структуры идеала тождеств $I(V)$ достаточно изучать пространства $P_n(V) = P_n \cap I(V)$ где P_n – пространство всех полилинейных неассоциативных многочленов степени n от свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$.

Пространства $P_n(V)$ имеют структуру S_n-модулей, в которых группа S_n действует на индексах образующих $x_1, \ldots, x_n$. Изучение структуры модулей $P_n(V)$ позволяет получить много важной информации о многообразии.

Обозначим через L многообразие алгебры Ли. Рассмотрим пространства $PL_{n_1,n_2} = P_{n_1+n_2}(L)$, определенные на образующих $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}$. Эти пространства имеют структуру $S_{n_1} \times S_{n_2}$ - модулей и могут быть разложены в сумму неприводимых подмодулей [1]:

$$PL_{n_1,n_2} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n_1 \\ \mu \vdash n_2}} (M_\lambda \otimes M_\mu)^{d_{\lambda\mu}}, \tag{1}$$

где λ и μ диаграммы Юнга, а M_λ и M_μ – соотвествующие неприводимые S_{n_1}- и S_{n_2}-модули.

Обозначим через J_{sc} многообразие йордановых алгебр с дополнительными тождествами $x^2yx \equiv 0$ и $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$ [2]. Следующая теорема дает описание S_n-структуры модулей $P_n(J_{sc})$ многообразия J_{sc}.

Теорема 1. *Для S_n-модуля $P_n(J_{sc})$ справедливо разложение:*

$$P_n(J_{sc}) = \bigoplus_{i=0}^{k} P_n^i(J_{sc}),$$

где $k = \left[\frac{n+2}{3}\right]$, *а* S_n-*модули* $P_n^i\left(J_{sc}\right)$ *имеют следующий вид:*

$$P_n^i\left(J_{sc}\right) \cong \underset{\lambda\neg m,\mu\neg i}{\oplus} ind_{S_m\times S_{n-m}}^{S_n}\left(M_{\overline{\lambda}}\otimes M_{\overline{(n-m-i,\mu)}}\right)^{d_{\lambda\mu}},$$

где $m = \left[\frac{n-3i}{2}\right]+1$, $d_{\lambda\mu}$ – *кратности из разложения 1.*

Опираясь на теорему 1 удалось получить следующий результат, показывающий связь между подмногообразиями многообразий J_{sc} и L.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{L}$ – *решетка подмногообразий многообразия алгебр Ли* L, *а* $\mathfrak{J}$ – *решетка подмногообразий многообразия* J_{sc}. *Существует решеточный мономорфизм* $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{J}$.

При этом легко строятся примеры подмногообразий $W \subset J_{sc}$, для которых нет прообразов в $\mathfrak{L}$. Таким образом, многообразие J_{sc} обладает даже более богатой структурой подмногообразий, чем многообразие L.

Библиографический список

1.*Hong J., Kwon J-H.* Decompose of Free Lie Algebras into Irreducible Components // Journal of Algebra. 1997. Vol. 197.

2. *Скосырский В. Г.* Разрешимость и сильная разрешимость йордановых алгебр // Сибирский матем. журнал. 1989. № 2.

ПРОСТЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ УНИТАЛЬНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ С АССОЦИАТИВНО-КОММУТАТИВНОЙ ЧЁТНОЙ ЧАСТЬЮ

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков (г. Москва)
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Супералгебра $B = A \oplus M$ называется *супералгеброй абелева типа*, если A ассоциативна и коммутативна, а M – ассоциативный A-бимодуль [1].

Примерами супералгебр абелева типа являются супералгебры чётного векторного типа $J\left(\Gamma,\delta\right)$ и $B\left(\Gamma,D,\gamma\right)$. Первая из них была введена К. МакКриммоном [2] и является йордановой, вторая – правоальтернативной и введена И. П. Шестаковым [3]. Известно, что грассмановы оболочки первичных йордановых супералгебр векторного типа $J\left(\Gamma,\delta\right)$ над полем характеристики 0 имеют одни и те же идеалы тождеств; аналогичный результат верен и для чётных скрученных супералгебр $B\left(\Gamma, D, \gamma\right)$.

С другой стороны, в [4] были введены и классифицированы простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа над полем характеристики нуль. Недавно мы доказали, что всякая простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра с полупростой сильно ассоциативной чётной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$ изоморфна одной из следующих супералгебр:

$$M_n\left[\sqrt{1}\right], \quad M_{m|n}, \quad B_{1|2}\left(p=3\right), \quad B_{2|2}\left(\nu\right), \quad B_{n|n}.$$

Отметим, что классификация простых конечномерных ассоциативных супералгебр над алгебраически замкнутым полем приведена в [4].

В [5] построен пример 5-мерной простой правоальтернативной неунитальной супералгебры $B_{2|3}$, чётная часть которой – двумерная алгебра с нулевым умножением, а нечетная часть является неприводимым бимодулем над чётной частью. Нами доказано, что не существует простых правоальтернативных супералгебр с унитарной четной частью (алгебра называется *унитарной*, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре).

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $B = A \oplus M$ – простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра и A – ассоциативно-коммутативная алгебра. Если алгебра A полупроста, то супералгебра B либо ассоциативна, либо является супералгеброй абелева типа. Если характеристика основного поля нуль, то алгебра A полупроста.*

По теореме Веддерберна четная часть представима в виде прямой суммы полупростой части и радикала $A = \Phi e_1 \oplus \ldots \oplus \Phi e_n \oplus \mathrm{Nil}\left(A\right)$ (основное поле Φ можно считать алгебраически замкнутым). Метод доказательства основан на изучении йордановых пирсовых компонент $M_{ij} = \{x_{ij} := \left(e_i x\right) e_j + \left(e_j x\right) e_i \mid x \in M\}$ в правоальтернативной супералгебре, возникающих по полной ортогональной системе единиц $e_1, \ldots, e_n$ простых слагаемых в полупростой части. Решающее значение играет представление идемпотента в виде произведения нечетных элементов. Мы вводим понятие ростка йордановой компоненты: идемпотент e_i назовем *ростком компоненты* M_{jk}, если $e_i \in M_{jk}^2$, и доказываем две предварительные леммы о строении компонент, имеющих один или два роста соответственно (всякая компонента имеет 1 или 2 ростка).

Затем описываются структуры 1-ростковой и 2-ростковой компонент, на основании которых и завершается доказательство приведенной теоремы.

Библиографический список

1. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 3.

2. *McCrimmon K.* Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. Vol. 149, № 2.

3. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6.

4. *Wall C. T. C.* Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. 1964. Vol. 213.

5. *Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P.* On right alternative syperalgebras // Comm. in Algebra. 2016. Vol. 44, № 1.

ПРОСТЫЕ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ АБЕЛЕВА ТИПА ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ, ЧЁТНАЯ ЧАСТЬ КОТОРЫХ ПОЛЕ

С. В. Пчелинцев, О. В. Шашков (г. Москва)
E-mail: pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Следуя [1], супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ называется *супералгеброй абелева типа*, если её чётная часть Γ ассоциативна и коммутативна, а нечётная часть M является ассоциативным Γ-бимодулем.

Примерами супералгебр абелева типа являются супералгебра $B_{1|2}$, скрученная супералгебра $B\,(\Gamma, D, \gamma)$ и скалярный ω-дубль $B\,(\Gamma,^*, R_\omega)$. Супералгебры $B\,(\Gamma, D, \gamma)$ были введены И. П. Шестаковым [1, 2] при классификации простых альтернативных супералгебр и простых $(-1, 1)$-супералгебр.

Дубли $B\,(\Gamma,^*, R_\omega)$ возникли в [3] при классификации простых конечномерных правоальтернативных супералгебр абелева типа над полем характеристики 0.

Напомним также, что $B_{1|2}$ – коммутативная супералгебра с базисом $1, x, y$ (x, y – нечетны) и умножением $xy = -yx = 1$, $x^2 = y^2 = 0$.

Отметим также, что в 2004 г. простые специальные йордановы супералгебры абелева типа изучались В. Н. Желябиным и И. П. Шестаковым [4]. Ими было доказано, что при некоторых ограничениях такая супералгебра является центральным порядком в йордановой супералгебре векторного типа $J(\Gamma, \delta)$, где δ – ненулевое дифференцирование унитальной ассоциативно-коммутативной δ-простой алгебры Γ. Некоторые применения супералгебр векторного типа $B(\Gamma, D, \gamma)$ и $J(\Gamma, \delta)$ к структурной теории указаны в [5].

Вектор $x \in M$ называется *изотропным*, если $x^2 = 0$. Супералгебру $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа назовем *исключительным дублем*, если $M = \Gamma x$ и $[x, \Gamma] \neq 0$, $[x, M] \neq 0$ для некоторого неизотропного вектора $x \in M$.

Мы изучаем простые правоальтернативные супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа произвольной размерности при условии, что чётная часть Γ является полем (основное поле Φ предполагается алгебраически замкнутым характеристики $\neq 2$). Сначала доказывается, что нечётная часть M некоммутативной супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ содержит неизотропный вектор (теорема 1).

Затем доказана теорема 2: *скалярная супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ является ω-дублем или изоморфна супералгебре $B_{1|2}$*. Кроме того, там же доказано предложение 1: супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ является либо супералгеброй $B_{1|2}$, либо супералгеброй Шестакова, либо ω-дублем, либо исключительным дублем.

Наконец, доказывается, что всякий исключительных дубль $B = \Gamma \oplus \Gamma x$ изоморфен гипотетической супералгебре $B(\Gamma,^*, D, \psi)$. Оказывается, что такая супералгебра не может быть правоальтернативна. Тем самым, справедлива

Основная теорема. *Простая правоальтернативная супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа, в которой чётная часть Γ является полем характеристики $\neq 2$ (основное поле Φ предполагается алгебраически замкнутым), изоморфна либо коммутативной альтернативной супералгебре $B_{1|2}$ или $B(\Gamma, D, 0)$ $(\mathrm{char}(\Phi) = 3)$, либо скрученной $(-1, 1)$-супералгебре Шестакова $B(\Gamma, D, \gamma)$, либо скалярному ω-дублю $B(\Gamma,^*, R_\omega)$.*

Библиографический список

1. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 3.

2. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6.

3. *Шестаков И. П.* Простые $(-1,1)$-супералгебры // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6.

4. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 5.

5. *Pchelintsev S. V., Shestakov I. P.* Prime $(-1,1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type // J. Algebra. 2015. Vol. 453.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ РЕШЕТКИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ

А. Л. Расстригин (г. Волгоград)
E-mail: rasal@fizmat.vspu.ru

Класс алгебраических систем называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формации получили широкое распространение в теории конечных групп [1, 2]. Также разными авторами изучались формации и некоторых других типов алгебраических систем. Общие моменты, касающиеся формаций произвольных алгебраических систем описаны в [3].

Совокупность формаций, которой вместе с любыми двумя ее формациями принадлежит их пересечение и наименьшая формация, содержащая две данные, образует решетку относительно включения классов. Например, множество всех формаций конечных алгебраических систем некоторого типа или класс всех формаций, являющихся подформациями данной формации, относительно включения образуют решетки. Свойства и строение различных решеток формаций можно найти в [2–4].

Напомним, что алгебру с одной единственной унарной операцией называют *унаром*. В работах [5, 6] описана решетка формаций конечных унаров, в [7] сформулированы свойства решеток формаций не более чем счетных унаров.

В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы решетка подформаций произвольной формации унаров являлась цепью.

Библиографический список

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978.

2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск : Беларуская навука, 1997.

3. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М. : Наука, 1989.

4. *Lihová J., Pócs J.* On formations of lattices // Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics. 2009. № 15.

5. *Расстригин А. Л.* Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2 (38).

6. *Jakubíková-Studenovská D., Pócs Jozef* Formations of finite monounary algebras // Algebra universalis. 2012. Vol. 68, № 3-4.

7. *Rasstrigin A. L.* On lattices of formations of monounary algebras with finitely many cycles // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, № 4.

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЧТИ РАВНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

А. О. Рахимов, Ф. З. Рахмонов (г. Душанбе)
E-mail: alisher.1987@rambler.ru, fira.rahmonov@gmail.com

Т. Эстерман [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число.

В работе [2] эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1) с условиями

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H;\ i = 1, 2, \quad \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H;\ H \ge N^{\frac{3}{4}} \ln^3 N.$$

Далее, в работе [3] асимптотическая формула выведена для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на его куб при $H \ge N^{\frac{5}{6}}\mathcal{L}^{10}$.

Основным результатом этой работы является вывод асимптотической формулы для ещё более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, то есть когда в уравнении (1) квадрат натурального m заменяется на четвёртую степень.

Теорема. *Пусть N — достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ — число представлений N суммою двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|m^4 - \frac{N}{3}\right| \le H,$$

$\rho(N,p)$ — число решений сравнения $x^4 \equiv N(\bmod p)$. Тогда при $H \geq \geq N^{\frac{11}{12}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$ справедлива асимптотическая формула:

$$I(N,H) = \frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)\,H}{4\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N,p)}{(p-1)^2}\right).$$

Следствие. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммы двух простых чисел p_1, p_2 и четвёртой степени натурального m с условиями*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq N^{\frac{11}{12}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}, \quad i = 1,2,$$
$$\left|m - \sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right| \leq \frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}} + \frac{27N^{\frac{1}{12}}\mathcal{L}^{\frac{80}{3}}}{32\sqrt[4]{3}} + \frac{189\mathcal{L}^{40}}{128\sqrt[4]{3}} + 0,9.$$

Доказательство теоремы проводится круговым методом и её основу составляют:

- теорема [4] о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля

  $$T(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda,\ q \leq \tau, \quad (a,q) = 1,\ |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$

  для α, принадлежащих длинным дугам;
- теорема [5] об оценке короткой тригонометрической суммы Г. Вейля $T(\alpha;x,y)$ четвёртой степени для α, принадлежащих малым дугам;
- теорема [6] о поведении коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами

  $$S(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n)$$

  для α, принадлежащих длинным дугам.

Библиографический список

1. *Estermann T.* Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. 1937. Vol. 11.

2. *Рахмонов З. Х.* Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Матем. заметки. 2003. Т. 74, вып. 4.

3. *Рахмонов З. Х.* Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 3.

4. *Рахмонов З. Х., Нарзублоев Н. Н., Рахимов А. О.* Короткие суммы Г. Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, №1 (53).

5. *Рахимов А. О.* Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля четвёртого порядка в малых дугах // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2015. Т. 58, № 8.

6. *Рахмонов З. Х.* Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2000. Т. 43, № 3.

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ МЕТОД В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ПОИВС «ТМК»[1]

И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский, (г. Тула)
E-mail: i_rebrova@mail.ru, dobrovol@tspu.tula.ru

Основные проблемы теоретико-числового метода приближенного анализа непосредственно связаны с рядом фундаментальных задач теории чисел. Теоретико-числовые подходы продемонстрировали свою эффективность для построения алгоритмов вычисления оптимальных многомерных квадратурных и интерполяционных формул на основе теоретико-числовых свойств используемых сеток для конкретных классов функций.

Разработка ПОИВС (проблемно-ориентированной информационно вычислительной системы) «ТМК» (Теоретико-числовой метод Коробова) актуальна для эффективного внедрения результатов фундаментальных исследований по теоретико-числовому методу в приближенном анализе.

Основными объектами исследования являются: пространство рeшток; гиперболическая дзета-функция решеток; дзета-функция сеток с весами; отклонение сеток; квадратичное отклонение сеток и q-ое отклонение сеток, граничные функции на классах функций.

Основные задачи данного проекта состоят в:

- изучении гиперболической дзета-функции произвольных решеток и алгоритмов её вычисления;
- разработке алгоритмов вычисления основных характеристик обобщенных параллелепипедальных сеток;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-03262).

- приложении полученных результатов к разработке ПОИВС «ТМК», включающей теоретические результаты, программную реализацию алгоритмов на многомерных сетках и решетках, а также результаты практических расчетов.

Проект направлен на решение фундаментальной проблемы теории решеток и обобщенных параллелепипедальных сеток, связанной с построением алгоритмов вычисления основных характеристик этих объектов исследования, имеющих важное значение для построения эффективных теоретико-числовых многомерных квадратурных и интерполяционных формул, и приложение этой теории к вопросам численного решения линейных интегральных уравнений.

Предполагается использовать методы алгебраической теории чисел и диофантова анализа, геометрии чисел, аналитической теории чисел, теории рядов Дирихле. Совокупность этих методов применительно к теоретико-числовому методу в приближенном анализе успешно применяется в тульской школе теории чисел и является оригинальным подходом к рассматриваемым проблемам.

Прежде всего планируется:

1. Исследование приведенных алгебраических иррациональностей.

2. Совершенствование алгоритмов численного вычисления кратных интегралов с помощью алгебраических сеток.

3. Создание информационных ресурсов по теоретико-числовому методу в рамках разработки ПОИВС «ТМК».

Результаты исследований будут представлены в серии статей и в электронных ресурсах ПОИВС «ТМК».

В настоящее время не имеется ПОИВС, в которых в полной мере отражены достижения по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. Одна из целей проекта систематизировать достижения Тульской школы теории чисел за 65 лет её существования, что будет способствовать дальнейшему развитию и росту научного потенциала Тульского региона.

Коллектив, участвующий в разработке данного проекта и составляющий современное ядро тульской школы теории чисел, получил следующие основные результаты:

— построено метрическое пространство сдвинутых решеток и изучены его локальные свойства;

— определен класс декартовых решеток и найдено их каноническое представление как сдвига решетки подобной простой целочисленной решетки;

— найдена асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решетки с растущим детерминантом;

— построено аналитическое продолжение обобщенной гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решетки;

— найдены выражения через полиномы Бернулли значения во всех целых точках гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решетки;

— установлена аналитическая связь между решеткой решений линейных сравнений и соответствующей решеткой решений системы линейных сравнений;

— доказано обобщение теоремы Рота о квадратичном отклонении на случай произвольной сетки с весами с использованием комбинации общего метода Колмогорова и частного метода Рота;

— построены две группы преобразований s-мерного куба: группа арифметических сдвигов и группа поразрядных сдвигов и доказано равенство средних арифметических q-ых отклонений для произвольных сеток по орбитам этих двух групп преобразований;

— построены быстрые алгоритмы вычисления оптимальных коэффициентов для концентрической последовательности параллелепипедальных сеток, заданных допустимой последовательностью простых чисел;

— получены оценки логарифмической и основной мер качества для таких наборов оптимальных коэффициентов;

— найдены правила остановки для концентрических алгоритмов приближенного интегрирования;

— выполнены численные эксперименты по расчету кратных интегралов высокой кратности.

Решение указанных задач было достигнуто за счет развития теоретико-числового метода в приближенном анализе с привлечением методов геометрии чисел, тригонометрических сумм, теории рядов Дирихле, и алгебраических методов. Такое сочетание различных методов, которое содержится в основных работах коллектива авторов является оригинальным и доказало свою эффективность полученными результатами. Более подробную информацию о работе Тульской школы теории чисел можно найти в работе [1].

Библиографический список

1. *Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В.* Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910–11.10.1968) и 65-летию тульской школы теории чисел) // Материалы XIII Междунар. конф. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения (г.Тула, 25–30 мая 2015). Дополнительный том. Тула : Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015.

АЛГЕБРЫ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ

А. Н. Сергеев (г. Саратов, г. Москва)
E-mail: SergeevAN@info.sgu.ru

Симметрических полиномы играют важную роль во многих областях математики (1), в частности в комбинаторике, алгебраической геометрии, теории представлений и теории интегрируемых систем. Настоящая работа была мотивирована теорией интегрируемых систем и ее связями с теорией представлений. Кольцо симметрических полиномов Лорана $\Lambda_m = \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_m^{\pm}]^{S_m}$ можно интерпретировать как кольцо Гротендика категории конечномерных представлений полной линейной группы $GL(n)$. Эта интерпретация позволяет выделить в кольце Λ_n важный базис состоящий из функций Шура s_λ. Алгебра $\mathbb{C} \otimes \Lambda_m$ также изоморфна алгебре интегралов соответствующей квантовой задаче Калоджеро–Мозера–Сазерленда.

Оказывается, что естественным аналогом кольца симметрических полиномов, для супергруппы $GL(n,m)$ является кольцо суперсимметричных полиномов Лорана

$$\Lambda_{m,n} = \{f \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_m^{\pm}, y_1^{\pm}, \dots, y_n^{\pm}]^{S_m \times S_n} \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_j} \in (x_i - y_j)\}$$

где $(x_i - y_j)$ обозначает идеал порожденный $(x_i - x_j)$. Оно является кольцом конечномерных представлений супергруппы $GL(n,m)$ (2) и предельным случаем алгебры интегралов деформированной задачи Калоджеро–Мозера–Сазерленда. построенной по системе корней супергруппы $GL(n,m)$.

Основным результатом работы, является описание кольца $\Lambda_{m,n}$ в терминах образующих и соотношений. Так как теория представлений супергруппы $GL(n,m)$ не является полупростой, поэтому не существует простой явной формулы для характеров неприводимых представлений. Оказывается вместо этого естественно использовать характеры Эйлера, (3) которые позволяют построить естественный базис в кольце $\Lambda_{m,n}$ и описать его в терминах образующих и соотношений.

Определим функции h_k, h_k^* равенствами

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-y_j t)}{\prod_{i=1}^{m}(1-x_i t)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k, \quad h_k^* = h_k(x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}, y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1})$$

Мы также считаем, что $h_k^* = h_k = 0$, если $k < 0$.

Для $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$H_k = h_k^{(0)} - h_k^{(\infty)} = h_k - (-1)^{n-m} \frac{y_1 \cdots y_n}{x_1 \dots x_m} h_{n-m-k}^*$$

В действительности, H_k является характером Эйлера для некоторой параболической подгруппы группы $GL(n, m)$. Несложно проверить, что h_k, h_k^* и $\Delta = \frac{y_1 \cdots y_n}{x_1 \dots x_m}$ принадлежат кольцу $\Lambda_{m,n}$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ последовательность целых чисел, а ν, τ - разбиения такие, и $l(\nu) = k$, $l(\tau) = l$.

Пусть σ последовательность определяемая по следующему правилу

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{l+p+k}) = (\tau_1, \dots, \tau_l, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \nu_1, \dots, \nu_k)$$

Определим элемент алгебры $\Lambda_{m,n}$ по формуле $K_{\lambda,\tau,\nu} = \det(a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} h^*_{\sigma_i+i-j}, \ 1 \le i \le l \\ H_{\sigma_i-i+j}, \ l < i \le l+p \\ h_{\sigma_i-i+j}, \ l+p < i \le l+p+k \end{cases}, \quad 1 \le j \le l+p+k$$

Теорема 1. *Пусть числа p, q удовлетворяют условиям $0 \le p \le m$, $0 \le q \le n$, $p - q = m - n$ и соответствующя последовательность λ является невозрастающей и имеет длину p и $\nu_1 + \tau_1 \le q$. Тогда множество всех $K_{\lambda,\nu,\tau}$, является линейным базисом алгебры $\Lambda^{\pm}_{m,n}$.*

Теорема 2. *Алгебра $\Lambda_{m,n}$ порождена образующими h_k, h_k^*, Δ, Δ^{-1}*

$$\begin{vmatrix} H_{i_1} & H_{i_1+1} & \dots & H_{i_1+m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{i_{m+1}} & H_{i_m+1} & \dots & H_{i_{m+1}+m} \end{vmatrix} = 0$$

где $i_1, \dots, i_{m+1}$ - пробегает множество всех последовательностей целых чисел.

Библиографический список

1. *Macdonald I.* Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd ed. New York : Oxford Univ. Press, 1995.

2. *Veselov A. P., Sergeev A. N.* Grothendieck rings of the basic classical Lie superalgebras // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 173.

3. *Serganova V., Gruson S.* Cohomology of generalized super grassmannians and character formula for basic classical Lie superalgebras // Proc. London Math. Soc. 2010. Vol. 101.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ НЕКОТОРЫХ HNN-РАСШИРЕНИЙ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ СВЯЗАННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Е. В. Соколов (г. Иваново)
E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Пусть $G^* = \langle G, t;\ t^{-1}Ht = K,\ \varphi\rangle$ — HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными посредством изоморфизма $\varphi\colon H \to K$, и пусть подгруппы H и K лежат в центре группы G. В настоящей работе с помощью предложенного в [1] метода спуска и подъёма совместимых подгрупп получен ряд результатов об аппроксимируемости HNN-расширений указанного вида корневыми классами групп (по поводу корневых классов см. тезисы доклада Е. А. Тумановой в этом же сборнике).

Пусть $H_1 = H$, $K_1 = K$ и, если подгруппы H_i и K_i уже определены, то $H_{i+1} = H_i \cap K_i$, $K_{i+1} = H_{i+1}\varphi$. Если для некоторого $n \geqslant 1$ имеет место равенство $H_n = K_n$, то, как легко видеть, подгруппа E группы G^*, порожденная подгруппой H_n и элементом t, оказывается расщепляемым расширением подгруппы H_n при помощи бесконечной циклической группы с порождающим t. Приводимые ниже утверждения позволяют свести вопрос об аппроксимируемости HNN-расширения G^* к решению, вообще говоря, более простой задачи об аппроксимируемости расщепляемого расширения E. Всюду далее будем предполагать, что $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу и замкнутый относительно взятия фактор-групп, G — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, H и K — собственные центральные подгруппы группы G.

Теорема. *Пусть класс $\mathcal{C}$ состоит только из периодических групп и для некоторого n имеет место равенство $H_n = H_{n+1}$. Пусть также существует нормальная подгруппа Q группы G, удовлетворяющая соотношению $G/Q \in \mathcal{C}$ и хотя бы одному из следующих двух условий:*

(1) *подгруппа* Q *содержится в* $H \cap K$ *и является* φ*-инвариантной,*

(2) $H \cap Q = 1 = K \cap Q$.

HNN-расширение G^* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда* $H_n = K_n$ *и подгруппа* $E = (H_n, t)$ $\mathcal{C}$*-аппроксимируема.*

Отметим, что если подгруппа Q имеет конечный индекс в G (а это верно, например, если класс $\mathcal{C}$ состоит только из конечных групп), то каждое из условий 1—2 влечет равенство $H_n = H_{n+1}$ для некоторого n.

Следствие 1. *Пусть класс* $\mathcal{C}$ *состоит только из периодических групп, подгруппы* H *и* K *конечны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Для некоторого* n *имеет место равенство* $H_n = K_n$ *и потому ограничение* φ' *изоморфизма* φ *на подгруппу* H_n *является ее автоморфизмом конечного порядка.*

2. *HNN-расширение* G^* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемо в том и только том случае, когда все простые делители порядка автоморфизма* φ' *содержатся во множестве* $\pi(\mathcal{C})$ *всех простых делителей порядков элементов всевозможных* $\mathcal{C}$*-групп.*

Следствие 2. *Пусть класс* $\mathcal{C}$ *состоит только из периодических групп, подгруппы* H *и* K *имеют конечные индексы в группе* G *и для некоторого* n *справедливо равенство* $H_n = H_{n+1}$*. HNN-расширение* G^* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1) $G/H \in \mathcal{C}$ *и* $G/K \in \mathcal{C}$*;*

(2) $H_n = K_n$*;*

(3) *подгруппа* $E = (H_n, t)$ $\mathcal{C}$*-аппроксимируема.*

Из приведенной выше теоремы и утверждения, анонсированного в [2], получается также следующее обобщение основного результата статьи [3].

Следствие 3. *Пусть* $H \cap K = 1$*. Если существует нормальная подгруппа* Q *группы* G*, удовлетворяющая условиям* $H \cap Q = 1 = K \cap Q$ *и* $G/Q \in \mathcal{C}$*, то HNN-расширение* G^* $\mathcal{C}$*-аппроксимируемо.*

Библиографический список

1. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Иван. гос. ун-та. Сер. : Биология, Химия, Физика, Математика. 2002. Вып. 3.

2. *Соколов Е. В.* К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами // Мальцевские чтения 2015 : тез. докл. междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию Ю. Л. Ершова (г.Новосибирск, 3–7 мая 2015). Новосибирск : Изд-во НГУ, 2015.

3. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 5.

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ УНАРОВ

С. В. Сыроватская (г. Волгоград)
E-mail: svs_kagi@mail.ru

Через N_0 будем обозначать множество целых неотрицательных чисел.

Унаром называется алгебра $\mathcal{A} = \langle A, f \rangle$ с одной унарной операцией f. Элементы a и b унара $\mathcal{A}$ называют связными, если $af^m = bf^k$ для некоторых $m, k \in N_0$. Унар *связный*, если любые два его элемента являются связными. *Петлей* называется элемент a унара $\mathcal{A}$ такой, что $af = a$. Через C_1^∞ обозначается унар $\langle N_0, g \rangle$, где для любого $m \in N_0$, $mg = m - 1$, если $m > 0$, и $mg = 0$, если $m = 0$. Элемент a унара $\mathcal{A}$ называется *минимальным* [*узловым*], если a не имеет прообраза при отображении f [если найдутся $x, y \in A$ такие, что $x \neq y$ и $xf = a = yf$]. Другие необходимые термины, применяемые в теории унаров, можно найти в [1].

Пусть $\mathcal{R} = \langle R, * \rangle$, $\mathcal{S} = \langle S, * \rangle$ — полугруппы. *Сплетением* $\mathcal{R}\,\mathrm{wr}^Y \mathcal{S}$ *полугрупп* $\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{S}$ *посредством правого* $\mathcal{S}$*-полигона* Y (см. [2]) называется полугруппа $\left\langle R^Y \times S, * \right\rangle$, где R^Y — множество всех отображений множества Y во множество R и для произвольных $\tau_1, \tau_2 \in R^Y$, $s_1, s_2 \in S$, $(\tau_1, s_1) * (\tau_2, s_2) = (\tau_3, s_1 * s_2)$, где $y\tau_3 = (y\tau_1) * ((ys_1)\tau_2)$ для любого $y \in Y$. *Делитель* полугруппы $\mathcal{S}$ — это гомоморфный образ подполугруппы полугруппы $\mathcal{S}$.

В данной работе мы будем рассматривать класс $\mathcal{K}$ всех связных унаров с петлей, не имеющих подунаров, изоморфных C_1^∞. Отметим, что $\mathcal{K}$ содержит всякое нерегулярное многообразие унаров (о многообразиях унаров см. в [3]).

Теорема 1. *Полугруппа эндоморфизмов любого унара из класса* $\mathcal{K}$ *является делителем полугруппы эндоморфизмов некоторого унара из* $\mathcal{K}$*, не имеющего нециклических узловых элементов.*

Подполугруппу $\{f^m \mid m \in N_0\}$ полугруппы $\mathrm{End}\,\mathcal{A}$ будем обозначать через $\chi_{\mathcal{A}}$.
Далее $\mathcal{A}$ — неодноэлементный унар класса $\mathcal{K}$, не имеющий нециклических узловых элементов.
$\{a_i \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных элементов $\mathcal{A}$.
Обозначим через $M = \{d(a_i) \mid i \in I\}$. Под $\langle 0, n-1\rangle_{\mathrm{O}}$ ($n \in N_0 \setminus \{0\}$) будем подразумевать полугруппу $\langle \{0, 1, \ldots, n-1\} \bigcup \{\mathbf{O}\}, \oplus\rangle$, где для любых $x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \bigcup \{\mathbf{O}\}$

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{если } \; x, y \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \; \text{ и } \; x + y \leqslant n-1, \\ \mathbf{O}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 1. *Если множество M не имеет наибольшего элемента, то $\chi_{\mathcal{A}} \cong \langle N_0, +\rangle$. Если m' — наибольший элемент множества M, тогда $\chi_{\mathcal{A}} \cong \langle 0, m'-1\rangle_{\mathrm{O}}$.*

Если $\mathcal{A}$ моногенный (т. е. однопорожденный), то $\mathrm{End}\,\mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}$ [4].

Определим два семейства идеалов полугруппы $\chi_{\mathcal{A}}$:
для любого $i \in I$, $J_i = \left\{f^k \mid N_0 \ni k \geqslant d(a_i)\right\}$; для произвольных $i, j \in I$,

$$K_{i,j} = \begin{cases} \chi_{\mathcal{A}}, & \text{если } \; d(a_i) \leqslant d(a_j), \\ \left\{f^l \mid N_0 \ni l \geqslant d(a_i) - d(a_j)\right\}, & \text{если } \; d(a_i) > d(a_j). \end{cases}$$

$\mathcal{T}(X) = \langle T(X), \cdot\rangle$ — правая симметрическая полугруппа X.
Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{A}$ не является моногенным, тогда* $\mathrm{End}\,\mathcal{A} \cong K/\theta$, *где $K = \left\{(\tau, t) \in \chi_{\mathcal{A}}^X \times T(X) \mid (\forall i \in I)(x_i t = x_j \Rightarrow x_i\tau \in K_{i,j})\right\}$ есть подполугруппа сплетения $\chi_{\mathcal{A}}\,\mathrm{wr}^X \mathcal{T}(X)$ (X — естественный полигон над $\mathcal{T}(X)$), конгруэнция θ определена по правилу: для любых $(\tau_1, t_1), (\tau_2, t_2) \in K$*

$$(\tau_1, t_1)\theta(\tau_2, t_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall i \in I)\left[(x_i\tau_1\, \theta_{J_i}\, x_i\tau_2) \& (x_i\tau_1 \notin J_i \Rightarrow x_i t_1 = x_i t_2)\right],$$

(θ_{J_i} — конгруэнция Риса полугруппы $\chi_{\mathcal{A}}$ по идеалу J_i).

Библиографический список

1. *Карташов В. К.* Квазимногообразия унаров // Матем. заметки. 1980. Т. 27, № 1.

2. *Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г.* Общая алгебра : в 2 т. М. : Наука, 1991. Т. 2.

3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970.

4. *Varlet J. C.* Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A, \Gamma \rangle$ // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1970. Vol. 39.

ПОЛНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ КОВЭЮ–МАКФЕРСОНА ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ЛЕХМЕРА С МАКСИМАЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ

Ж. Н. Темиргалиева (Университет Южной Калифорнии,США),
Н. Темиргалиев (г. Астана, Казахстан)
E-mail: zhanerke@gmail.com, ntmath@mail.ru

Доклад посвящен предельно точным расчетным формулам для построения линейных конгруэнтных последовательностей с максимальным периодом, приводящим к новым выводам по теме «Спектральный тест» из монографии «Искусство программирования» [1, 2], где в [1] дано подробное введение в тему, в последнем издании [2] – дальнейшее развитие (разумеется на период написания).

Генератор случайных чисел Лехмера или же линейная конгруэнтная последовательность есть, по определению, рекуррентная последовательность$\langle X_n \rangle$ целых неотрицательных чисел

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \, modN, n \geq 0, \tag{1}$$

где $N-$ модуль $(0 < N)$, $a-$ множитель $(0 \leq a < N)$, $c-$ приращение $(0 \leq c < N)$, X_0- начальное значение $(0 \leq X_0 < N)$.

Всюду ниже будем считать, что последовательность (1) имеет максимальный период длины N (см. [2, стр. 36]).

Тогда, целые числа $a > 1$ и $N > a$ определяют целые числа $\tau(a, N) \geq$ ≥ 2, $1 \leq \lambda(a, N) < (a-1)^{\tau(a,N)-1}$ такие, что(см. [1, стр. 36-39; 2, стр. 43-45])

$$(a-1)^{\tau(a,N)} = N\lambda(a, N), \, (a-1)^{\tau(a,N)-1} \not\equiv 0 \, (modN) \, . \tag{2}$$

В «Спектральном тестировании»-**ST** в качестве меры *«случайности»* последовательностей (1) принимается величина (см. [1,стр. 107-108])

$$\nu_s \left(a, N\right) = \min \sqrt{m_1^2 + \ldots + m_s^2},$$

где минимум берется по всем $m \neq 0, m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s$, являющихся решениями сравнения $m_1 + am_2 + \cdots + a^{s-1}m_s \equiv 0\,(modN)$, или, что то же самое (см. [1, стр. 113; 2, стр. 120])

$$\nu_s^2(a,N) = \inf\Big\{\big(Nu_1 - au_2 - \ldots - a^{s-1}u_s\big)^2 + \\ +u_2^2 + ... + u_s^2 : \ (u_1, ..., u_s) \neq (0, ..., 0)\Big\}.$$

Сама же задача заключается в нахождении в условиях (2) чисел a, N и s с как можно большим значением величины $\nu_s\,(a,N)$.

Отметим, что при всех a,Nиs справедливы неравенства (см. [1, стр. 108; 2, стр. 133])

$$\nu_s\,(a,N) \leq \gamma\,(s)\,N^{\frac{1}{s}}. \tag{3}$$

Как и всякая оценка сверху, неравенство (3) может быть сильно завышенным, поэтому задачи не решает(см. также [1, стр. 111]).

Исследуемая задача относительно s распадается на следующие попарно непересекающиеся случаи

1^0. $s = \tau\,(a,N) = 2, \quad 1 \leq \lambda\,(a,N)\,,$

2^0. $s = \tau\,(a,N) \geq 3, \quad 1 \leq \lambda\,(a,N)\,,$

3^0. $2 \leq s < \tau\,(a,N)\,, \quad 1 \leq \lambda\,(a,N)\,,$

4^0. $2 \leq \tau\,(a,N) < s, \quad 1 \leq \lambda\,(a,N)\,.$

В следующих соотношениях получен полный ответ на истинный порядок $\nu_s\left(a,N;(a-1)^{\tau(a,N)} = N\lambda(a,N)\right)$ (эта проблема поставлена в [1], в последующем, спустя 30 лет, издании [2] ответа на тот же естественный вопрос также не находим):

ST-2: $\nu_2^2\left(a,N;(a-1)^2 = N\right) = (a-1)^2\left(1 - 2\frac{a-2}{(a-1)^2}\right) =$
$= N\left(1 - 2\frac{\sqrt{N}-1}{N}\right),$

ST $(2 \leq s = \tau) : N^{\frac{2}{s}}\left(1 - (b_s - 1)\,N^{-\frac{1}{s}}\right)^2 = (a - b_s)^2 \leq$
$\leq \nu_s^2\,(a,N;(a-1)^s = N) \leq a^2 + 1 = N^{\frac{2}{s}}\left(1 + 2N^{-\frac{1}{s}} + 2N^{-\frac{2}{s}}\right).$

ST $(2 \leq s < \tau)$:
$(N\lambda)^{\frac{2}{\tau}}\left(1 - (b_s - 1)\,(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}}\right)^2 = (a - b_\tau)^2 \leq \nu_s^2\,(a,N;(a-1)^\tau =$
$= N\lambda, 1 \leq \lambda \leq (a-1)^{\tau-s}\big) \leq a^2 + 1 = (N\lambda)^{\frac{2}{\tau}}\left(1 + 2\,(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}} + 2\,(N\lambda)^{-\frac{2}{\tau}}\right),$

ST $(s > \tau \geq 2)$: $\nu_s^2\,(a,N;(a-1)^\tau = N\lambda, \lambda \geq 1) \leq \sum_{k=0}^{\tau}\left(\begin{pmatrix}\tau\\k\end{pmatrix}\right)^2.$

Библиографический список

1. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования для ЭВМ. Получисленные алгоритмы : в 3 т. М. : Мир, 1977. Т.2.

2. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Получисленные алгоритмы : в 2 т. М. : Вильямс, 2007. Т.2.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Е. А. Туманова (г. Иваново)
E-mail: helenfog@bk.ru

Следуя К. Грюнбергу [1], содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ будем называть *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей и удовлетворяет следующему условию: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что X/Y, $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Как установлено в [2], класс групп $\mathcal{K}$ является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, а также вместе с любыми двумя группами X, $Y \in \mathcal{K}$ содержит декартово произведение $\prod_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$. Отсюда легко следует, что корневыми оказываются многие активно изучаемые классы групп: класс всех конечных групп; периодических π-групп, где π — непустое множество простых чисел; разрешимых групп; всех групп без кручения; и что пересечение корневых классов — снова корневой класс.

Напомним далее, что группа X называется *аппроксимируемой классом групп* $\mathcal{K}$, если для каждого элемента $x \in X \setminus 1$ существует гомоморфизм σ этой группы на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $x\sigma \neq 1$. В настоящей работе изучается вопрос об аппроксимируемости корневыми классами обобщенного свободного произведения $G = (A * B;\ U)$ групп A и B с объединенной подгруппой U в предположении, что данная подгруппа является нормальной в свободных множителях. В этом случае подгруппа U оказывается нормальной в G и потому ограничение любого внутреннего автоморфизма группы G на эту подгруппу представляет собой автоморфизм последней. Множество всех таких автоморфизмов образует подгруппу в $\operatorname{Aut} U$, которая далее будет обозначаться через $\operatorname{Aut}_G(U)$. Легко видеть, что группа $\operatorname{Aut}_G(U)$ порождается своими подгруппами $\operatorname{Aut}_A(U)$ и $\operatorname{Aut}_B(U)$, составленными из ограничений на U всевозможных внутренних автоморфизмов групп A и B соответственно. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $A \neq U \neq B$, группа $\operatorname{Aut}_G(U)$ является абелевой или совпадает с одной из подгрупп $\operatorname{Aut}_A(U)$ и $\operatorname{Aut}_B(U)$. Пусть также Ω обозначает семейство всех пар (R, S) таких, что R — нормальная подгруппа группы A, S — нормальная подгруппа группы B, $A/R \in \mathcal{K}$, $B/S \in \mathcal{K}$ и $R \cap U = S \cap U$. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда*

1) $\bigcap_{(R,S)\in\Omega} R = 1 = \bigcap_{(R,S)\in\Omega} S$,

2) подгруппа U $\mathcal{K}$-отделима в группах A и B.

Напомним, что подмножество M группы X называется $\mathcal{K}$-отделимым в этой группе, если для каждого элемента $x \in X \backslash M$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{K}$ такой, что $x\sigma \notin M\sigma$. Понятно, что если, скажем, $U = B$, то $G = A$ и из аппроксимируемости группы G классом $\mathcal{K}$ вовсе не следует $\mathcal{K}$-отделимость в ней подгруппы U. Поэтому условие $A \neq U \neq B$ в формулировке приведенной теоремы существенно.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, $B/U \in \mathcal{K}$, $A \neq U \neq B$. И пусть подгруппа U является циклической или $\operatorname{Aut}_G(U) = \operatorname{Aut}_A(U)$. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда подгруппа U $\mathcal{K}$-отделима в группе A.*

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, $A \neq U \neq B$. И пусть подгруппа U является циклической или $\operatorname{Aut}_G(U) = \operatorname{Aut}_A(U)$. Группа G аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда подгруппа U $\mathcal{K}$-отделима в группах A и B.*

Сформулированные утверждения обобщают и дополняют некоторые результаты, полученные автором в [3].

Библиографический список

1. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7.

2. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43.

3. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Матем. 2015. № 10.

СИМВОЛ ТИПА И СИМВОЛ ЧЕТНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТОГО ПОЛЯ

С. А. Тюрин (г. Нижний Новгород)
E-mail: saturin@list.ru

Вычисления в алгебре срезанных многочленов над конечным полем возникают при классификации орбит некоторых объектов в конечномерных простых алгебрах Ли над полями положительной характеристики. В частности, при изучении свойств модулярных тригонометрических функций [1] появляются вычисления факториалов элементов в поле классов вычетов по простому модулю.

Приведем используемые ниже определения, некоторые из которых введены в работах [2, 3].

1. Класс вычетов по модулю p будем называть классом 1-го типа, если абсолютно наименьшие вычеты этого класса и обратного по модулю p имеют одинаковые знаки, и, соответственно, классом 2-го типа, если эти знаки разные. Типом целого числа будем называть тип его класса вычетов.

2. Символом типа числа i, взаимно простого с модулем p, называется (-1), если число i первого типа, и $(+1)$, если число i второго типа.

3. Подмножество $Fr(a,p) = \{a, -a, a^{-1}, -a^{-1}\}$ группы $\mathbf{Z}_p^*$ ненулевых элементов простого поля называется четверкой, порожденной элементом $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

4. Пусть наименьшим положительным вычетом класса a по модулю p является число i, а наименьшим положительным вычетом обратного класса по модулю p является число j. Символом четности класса a по модулю p называется число $(-1)^{(i+j)}$.

5. Четверка $Fr(a,p)$ называется четной, если числа i и j имеют одинаковую четность, и нечетной, если числа i и j имеют разную четность.

Все элементы четверки $Fr(a,p)$ имеют одинаковый символ типа и одинаковую четность.

Теорема 1. *Пусть m – количество нечетных четверок.*

Если $p \equiv 3 (\bmod 4)$, то $\prod_{i=1}^{p-1}(i!) \equiv (-1)^{m+1} (\bmod p)$.

Если $p \equiv 1 (\bmod 4)$, то $\prod_{i=1}^{p-1}(i!) \equiv (-1)^{m+1+z} \cdot z (\bmod p)$, где z – наименьшее положительное число, удовлетворяющее сравнению $z^2 \equiv -1 (\bmod p)$.

Теорема 2. *При $p \equiv 3 (\bmod 4)$ количество нечетных четверок имеет такую же четность, что и количество четверок первого типа. При $p \equiv 1 (\bmod 4)$ количество нечетных четверок имеет такую же четность, что и сумма количества четверок первого типа и числа z.*

Теорема 3. *Пусть $p = 4 \cdot n + 1$ – простое число и S – количество четверок, для которых символ типа совпадает с символом четности. Тогда число $n + z + S$ нечетное.*

Если $p = 4 \cdot n + 1$ – простое число, то любой первообразный корень g порождает четверку $Fr(g, p)$, все элементы которой также являются первообразными корнями.

Теорема 4. *Пусть $\{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ – множество всех первообразных корней и l – количество нечетных четверок первообразных корней. Тогда $\prod_{i=1}^{r}(g_i!) \equiv (-1)^l (\bmod p)$.*

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия: 1) p – нечетное простое число, 2) числа a и b такие, что $1 \leqslant a < b \leqslant (p-1)$ и $a \cdot b \equiv 1 (\bmod p)$, 3) $c = a + b$, 4) $S(a, p)$ – сумма элементов цепной дроби, соответствующей обыкновенной дроби $\frac{p}{a}$. Тогда 1) число $c + S(a, p)$ нечетное, 2) число $(c^2 - 4)$ является квадратичным вычетом, 3) количество классов вычетов чисел c, для которых $(c^2 - 4)$ является квадратичным вычетом, равно $\frac{(p-3)}{2}$, 4) если класс вычетов числа c такой, что $(c^2 - 4)$ является квадратичным вычетом, то существует единственная пара чисел $\{a, b\}$, удовлетворяющая условиям $1 \leqslant a < b \leqslant (p-1)$, $a + b \equiv c (\bmod p)$ и $a \cdot b \equiv 1 (\bmod p)$.*

Библиографический список

1. *Тюрин С. А.* Модулярная тригонометрия // Нелинейный мир. 2008. № 6(11—12).

2. *Тюрин С. А.* Символ типа и теорема Вильсона // Изв. вузов. Матем. 2012. № 9.

3. *Тюрин С. А.* Свойства символа типа элементов простого поля // Изв. вузов. Матем. 2015. № 10.

АЛГЕБРЫ РИСА В ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБР С ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев (г. Волгоград)
E-mail: usl2004@mail.ru

Понятие конгруэнции Риса было введено для полугрупп Д. Рисом. В работе [1] оно обобщается на произвольные универсальные алгебры. Определения возникающих при этом понятий, приведенные ниже, даны в формулировках работы [2].

Любая конгруэнция алгебры A, представляющаяся как объединение B^2 и отношения равенства на A для некоторой подалгебры B алгебры A, называется конгруэнцией Риса. Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Риса, если объединение множества B^2 и отношения равенства на A есть конгруэнция алгебры A. Алгебра A называется алгеброй Риса, если любая ее подалгебра является подалгеброй Риса.

Универсальная алгебра называется рисовски простой [3], если любая ее конгруэнция Риса является тривиальной. Естественный интерес вызывает противоположная к рисовской простоте ситуация, когда любая конгруэнция алгебры A является конгруэнцией Риса на A. Назовем алгебры с таким свойством конгруэнц-алгебрами Риса.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам $\varphi(x,\ldots,x,y) = \varphi(x,\ldots,x,y,x) = \ldots = \varphi(y,x,\ldots,x) = x$ $(n \geqslant 3)$. В тернарном случае φ называют операцией большинства. В [4] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так определить операцию большинства $m(x,y,z)$, что алгебра $\langle A, m, f\rangle$ становится алгеброй с оператором f.

В [5] показано, что используя произвольную операцию большинства на множестве A, для всех $n \geqslant 3$ на A можно определить семейство n-арных операций почти единогласия. Там же, с использованием операции $m(x,y,z)$, на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ для $n \geqslant 3$ определено семейство n-арных операций почти единогласия $g^{(n)}$ по правилам: $g^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = m(x_1,x_2,x_3)$ и $g^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = m(g^{(n-1)}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}),x_{n-1},x_n)$ для $n > 3$, и показано, что $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является алгеброй с оператором f.

Через C_h^t, где $h > 0$, $t \geqslant 0$, обозначается унар $\langle A, f\rangle$ с порождающим элементом a, заданный определяющим соотношением $f^t(a) = f^{h+t}(a)$. Через C_n^∞ обозначается объединение возрастающей последовательности унаров $C_n^{t_1} \subseteq C_n^{t_2} \subseteq \ldots (t_i \geqslant 0)$, $t_1 < t_2 < \ldots$. Объединение непересекающихся унаров называется их суммой. Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geqslant 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара $\langle A, f\rangle$ называется неподвижным, если $f(a) = a$.

Теорема 1. *Алгебра $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ с оператором f является алгеброй Риса тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров: 1) C_n^0, где $n \in N$; 2) C_1^t, где $t \in N \cup \{\infty\}$; 3) $C_1^0 + C_1^0$.*

Теорема 2. *Любая конгруэнция алгебры $\langle A, g^{(n)}, f\rangle$ является конгруэнцией Риса тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующи условий: 1) операция f инъективна; 2) унар $\langle A, f\rangle$ является связным унаром с неподвижным элементом a, и $\langle A, f\rangle$ не содержит таких элементов $x \neq a$, что $f(b) = x = f(c)$ для некоторых $b, c \in A$, где $|\{x, b, c\}| = 3$; 3) унар $\langle A, f\rangle$ является суммой компоненты связности, удовлетворяющей условиям пункта 2), и произвольного подунара, на котором операция f инъективна.*

Библиографический список

1. *Tichy R. F.* The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. Vol. 29.

2. *Chajda I.* Rees ideal algebras // Math. Bohem. 1997. Vol. 122, № 2.

3. *Усольцев В. Л.* Гамильтоново простые алгебры одного класса мальцевских алгебр с оператором // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения : материалы XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рожд. проф. С. С. Рышкова. (г.Тула, 25–30 мая 2015). Тула, 2015.

4. *Усольцев В. Л.* О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4.

5. *Усольцев В. Л.* О решетках конгруэнций алгебр с одним оператором и основной операцией почти единогласия // Науч.-техн. вестник Поволжья. 2016. Вып. 2.

О НУЛЯХ ПРОИЗВОДНОЙ j–ГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ХАРДИ

Ш. А. Хайруллоев (Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан)
E-mail: shamsullo@rambler.ru

Получена новая оценка длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка производных конечного порядка функции Харди; эта оценка улучшает известную оценку А. А. Карацубы.

Функция Харди $Z(t)$, которая задается равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значения при вещественных значениях t и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Первым результатом о нулях дзета – функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г. Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geq T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geq T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А. А. Карацуба [4] доказал теорему Харди–Литллвуда уже при $H \geq T^{5/32}\ln^2 T$.

В работе [5] найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции и выражена она через константу Ранкина. Полученный результат в рамках данного метода является окончательным.

А. А. Карацуба наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассмотрел более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$. Он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается и доказал: *пусть j–натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, $H \geq cT^{1/(6j+6)}\ln^{2/(j+1)} T$, $c = c(j) > 0$. Тогда промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.*

В работе [6] эту задачу сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть доказана:

Теорема 1. *Пусть* (k, l)– *произвольная экспоненциальная пара,* j– *целое неотрицательное число,* $c = c_0(j) > 0$–*постоянное число,* $T \geqslant \geqslant T_0(j) > 0$,

$$\delta_j(k; l) = \frac{l + j}{0,5 - k + j}, \qquad \theta_j(k; l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(k; l)}\right).$$

Тогда при $H \geqslant cT^{\theta_j(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$ *промежуток* $(T, T + H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z^{(j)}(t)$.

Заметим, что теорема А. А. Карацубы является следствием теоремы 1, при

$$(k, l) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = AB(0, 1), \quad \delta_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3j + 1}, \quad \theta_j\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j + 6}.$$

В работе [7] найдено нижняя грань длины промежутка критической прямой, в которой содержится нуль нечетного порядка производной первого порядка функции Харди.

В докладе найдена новая теорема о нулях производной j–го порядка функции Харди.

Теорема 2. *Пусть* $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant cT^{\text{æ}_j} \ln T$,

$$\text{æ}_j = \frac{35}{220 + 212j}, \quad c = c_0 > 0, \quad j \in N.$$

Тогда промежуток $(T, T + H)$ *содержит нуль нечетного порядка функции* $Z^{(j)}(t)$.

Полученный результат

$$\text{æ}_j = \frac{35}{220 + 212j} = \frac{1}{6 + 6j} - \frac{5 + j}{12(1 + j)(55 + 53j)}$$

является уточнением теоремы А. А. Карацуба при любом $j \in N$.

Библиографический список

1. *Hardy G. H.* Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. 1914. Vol. 158.

2. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math. Z. 1921. Bd. 10.

3. *Мозер Я.* Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. 1976. Vol. 31.

4. *Карацуба А. А.* О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Т. 157.

5. *Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А.* Расстояние между соседними нулями дзета – функции Римана, лежащими на критической прямой // Докл. АН Респ. Таждикистан. 2006. Т. 49, № 5.

6. *Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А.* Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Докл. АН Респ. Таждикистан. 2009. Т. 52, № 5.

7. *Хайруллоев Ш. А.* Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geq 1$ // Докл. АН Респ. Таждикистан 2006. Т. 49, № 9.

О drl-ПОЛУПОЛЯХ[1]

В. В. Чермных, О. В. Чермных (г. Киров)
E-mail: vv146@mail.ru

Алгебра $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются условия: (1) $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо; (2) $(S, \vee, \wedge)$ — решетка (с порядком $\leq$); (3) сложение $+$ дистрибутивно относительно $\vee$ и $\wedge$; (4) для любых $a, b \in S$ $a - b$ — наименьший элемент $z \in S$ такой, что $b + z \geq a$; (5) $(a - b) \vee 0 + b \leq a \vee b$ для любых $a, b \in S$; (6) $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in S$; (7) $ab \geqslant 0$ для любых $a, b \geqslant 0$ из S.

Коммутативное drl-полукольцо с делением назовем *drl-полуполем*. Известно [1], что каждое drl-полукольцо раскладывается в прямую сумму решеточно упорядоченного кольца и положительно упорядоченного drl-полукольца с наименьшим элементом. По этой причине понятно, что для drl-полуполя указанное разложение будет тривиальным — одно из прямых слагаемых будет нулевым идеалом. Авторами высказывается следующая

Гипотеза. *Любое положительно упорядоченное drl-полуполе линейно упорядочено.*

Основным приближением к ее решению является

Предложение. *Пусть S – drl-полуполе, тогда S линейно упорядочено в каждом из случаев:*

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1375.2014/K).

(1) *мультипликативная группа* $S \setminus \{0\}$ *архимедово упорядочена;*

(2) S *архимедово упорядочена как аддитивная* drl*-полугруппа.*

Библиографический список

1. *Миклин А. В.* О drl-полукольцах // Матем. вест. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. 2014. Вып. 16.

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ГРУППАМИ ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1

А. А. Шлепкин (г. Красноярск)
E-mail: shlyopkin@mail.ru

Говорят, что группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. Группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Первоначально такая группа называлась сопряженно биримитивно конечной группой [2]. Класс групп Шункова очень обширен и включает в себя, в частности, все группы без кручения и некоторые смешанные группы. Поэтому для каждой данной группы Шункова G актуален следующий вопрос: обладает ли группа G периодической частью, т.е. состаляют ли периодические элементы в G подгруппу? Нетривиальность ответа на этот вопрос подчеркивается примерами разрешимых групп Шункова, не обладающих периодической частью (см. например [3]).

Получен следующий результат:

Теорема. *Группа Шункова, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально-конечным полем.*

Библиографический список

1. *Шлепкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тезисов 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993.

2. *Шунков В. П.* Об одном классе p – групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, вып. 4.

3. *Череп А. А.* О элементах конечного порядка в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, вып. 4.

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ ПРОБЛЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ[1]

А. В. Шутов (г. Владимир)
E-mail: a1981@mail.ru

Хорошо известно, что для любого иррационального α последовательность дробных долей $\{k\alpha\}$ равномерно распределена по модулю 1. Для количественной оценки равномерности распределения введем функцию

$$r(\alpha, n, I) = |\sharp\{k : 0 \leqslant k < n, \{k\alpha\} \in I\} - n|I||,$$

измеряющуюю отклонения числа точек $\{k\alpha\}$, попавших в некоторый интервал I от ожидаемого значения. Функцию $r(\alpha, n, I)$ называют остаточным членом проблемы распределения дробных долей линейной функции или локальным отклонением. В отличие от глобального отклонения

$$\Delta(\alpha, n) = \sup_I r(\alpha, n, I),$$

для которого получены практически точные оценки в терминах разложения α в цепную дробь, остаточные члены $r(\alpha, n, I)$ остаются крайне мало изученными. Фактически, известные результаты сводятся к следующему.

1) Оценка $r(\alpha, n, I)$ имеет место для всех n тогда и только тогда, когда $|I| \in Z + \alpha Z$ (Гекке, Кестен). При этом для константы $C(I)$ можно получить точные оценки и даже явные формулы (Журавлев, Мануйлов, Красильщиков, Шутов).

2) При фиксированном α для почти всех интервалов I имеет место оценка $\limsup_{n\to\infty} \frac{r(\alpha,n,I)}{\ln n} > 0$ (Вера Т. Шош).

3) Оценки $r(\alpha, n, I)$ в случае квадратичной иррациональности α и рациональной длины интервала I (Адамчевский, Бек, Рокадас, Шойсингер).

Нами доказаны следующие два результата.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00433).

Теорема 1. *Пусть α – иррационально, $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая функция, причем $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда существует несчетное множество $\beta \in (0;1)$ таких, что*

$$\limsup_{n\to\infty} r(\alpha, n, [0;\beta)) = \infty,$$

но

$$r(\alpha, n, [0;\beta)) = o(\varphi(n)).$$

Теорема 2. *Существует постоянная $C \leqslant 7$ такая, что для любого иррационального α и для любого интервала I выполняется неравенство*

$$\liminf_{n\to\infty} r(\alpha, n, I) \leqslant C.$$

Отметим, что ранее аналог теоремы 1 был доказан автором в случае, когда неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены.

СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ В КЛАССЕ ПОЛУАБЕЛЕВЫХ n-АРНЫХ ГРУПП

Н. А. Щучкин (г. Волгоград)
E-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru

На циклической группе (a) задаем абелеву полуциклическую n-арную группу $der_l(a)$ с n-арной операцией

$$f(s_1a, \ldots, s_na) = (s_1 + \ldots + s_n + l)a,$$

где l - любое фиксированное целое число, если $|(a)| = \infty$, и $0 \leqslant l \leqslant k$ для $|(a)| = k$ [1, 2]. На множестве C всех циклических групп определяем класс абелевых полуциклических n-арных групп C_t при фиксированном целом t, $0 \leqslant t \leqslant [\frac{n-1}{2}]$, по правилу: конечная n-арная группа $der_l(a)$ порядка k лежит в C_t тогда и только тогда, когда НОД$(l, n-1, k) = t$; бесконечная n-арная группа $der_l(a)$ лежит в C_t тогда и только тогда, когда $l \equiv t \pmod{n-1}$ или $l \equiv -t \pmod{n-1}$. Бесконечные n-арные группы $der_t(a)$ являются свободными в C_t [3]. Среди классов C_t выделим C_1 — класс циклических n-арных групп, в котором свободными являются бесконечные циклические n-арные группы.

Теорема 1. *В классе C_t любая n-арная подгруппа свободной n-арной группы изоморфна бесконечной n-арной группе $der_l(a)$, где $0 \leqslant l \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l, n-1)$ делит t. n-Арная подгруппа, для которой $l = t$, является свободной в C_t.*

Следствие 1. *Всякая n-арная подгруппа свободной циклической n-арной группы является свободной или изоморфна бесконечной n-арной группе $der_l(a)$, где $2 \leqslant l \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l, n-1) = 1$ [4].*

Рассмотрим теперь класс абелевых n-арных групп. Известно [5, 6], что бесконечная циклическая n-арная группа и прямые произведения бесконечной циклической n-арной группы с производной n-арной группой от свободной абелевой группы являются свободными в классе абелевых n-арных групп. Кроме того, всякая n-арная подгруппа свободной абелевой n-арной группы является свободной или изоморфна бесконечной абелевой полуциклической n-арной группе $der_l(a)$, где $2 \leqslant l \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ и НОД$(l, n-1) = 1$ [6].

Рассмотрим процесс нахождения свободных n-арных групп в классе полуабелевых n-арных групп, описанный в работе [7].

Пусть дано множество $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Для каждого элемента x_α определим прямую сумму $A_\alpha = \sum_{j=1}^{n-1}(x_{\alpha j})$ бесконечных циклических групп $(x_{\alpha j})$. Рассмотрим прямую сумму $F = (a) + \sum_{\alpha \in I} A_\alpha$, где (a) — бесконечная циклическая группа. На каждой группе A_α выбираем автоморфизм φ_α, действующий по правилу

$$\varphi_\alpha(t_1 x_{\alpha 1} + t_2 x_{\alpha 2} + \ldots + t_{n-1} x_{\alpha n-1}) = t_{n-1} x_{\alpha 1} + t_1 x_{\alpha 2} + \ldots + t_{n-2} x_{\alpha n-1}.$$

На группе F имеем автоморфизм $\varphi(sa + \sum_{i=1}^{k} z_{\alpha_i}) = sa + \sum_{i=1}^{k} \varphi_{\alpha_i}(z_{\alpha_i})$ и на F определяем полуабелеву n-арную группу $der_{\varphi,a}F$ с n-арной операцией

$$f(b_1, \ldots, b_n) = b_1 + \varphi(b_1) + \ldots + \varphi^{n-2}(b_{n-1}) + b_n + a.$$

Теорема 2 (Теорема 5, [7])**.** *n-Арная группа $der_{\varphi,a}F$ является свободной в классе полуабелевых n-арных групп с порождающим множеством*

$$X = \{-a + x_{\alpha 1} \mid \alpha \in I\} \cup \{0\}.$$

Далее изучаются n-арные подгруппы свободной полуабелевой n-арной группы.

Библиографический список

1. *Glazek K., Michalski J., Sierocki I.* On evaluation of some polyadic groups // Contributions to General Algebra. 1985. Vol. 3.

2. *Щучкин Н. А.* Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. Т. 3(54).

3. *Кусов В. М. Щучкин Н. А.* Свободные абелевы полуциклические n-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, вып. 2(38).

4. *Артамонов В. А.* Свободные n-группы // Матем. заметки. 1970. Т. 8, № 4.

5. *Щучкин Н. А.* Взаимосвязь $n-$групп и групп // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, вып. 1(5).

6. *Щучкин Н. А.* Подгруппы свободной абелевой n-арной группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2013. Т. 6(81).

7. *Shchuchkin N. A.* Free semiabelian n-ary groups // Quasigroups and Related Systems. 2015. Vol. 23.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

К. М. Эминян (г. Владимир)
E-mail: eminyan@mail.ru

Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел, двоичные разложения которых имеют четное число единиц, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. В работе получены асимптотические формулы для количества простых чисел p, не превосходящих X и таких,что $p \in \mathbb{N}_i$, $p+1 \in \mathbb{N}_j$, где i и j независимо друг от друга принимают значения 0, 1.

Пусть $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$ – представление натурального числа n в двоичной системе счисления, $\varepsilon_k = 0, 1$.

Разобьем множество натуральных чисел на два непересекающихся класса следующим образом:

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 2) \right\} \quad \text{и}$$

$$\mathbb{N}_1 = \left\{ n : n \in \mathbb{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 1 \,(\mathrm{mod} 2) \right\}.$$

В 1967 году А. О. Гельфонд в работе [1] получил в частности теорему: *для числа целых n, $n \leqslant X$, удовлетворяющих условиям $n \equiv l \,(\mathrm{mod} m)$, $n \in \mathbb{N}_0$, справедлива асимптотическая формула*

$$T_0\left(X\right) = \frac{X}{2m} + O\left(X^{\lambda}\right),$$

где l и m – произвольные взаимно простые натуральные числа, $\lambda = \log_4 3 = 0,792\ldots$.

В статье [2] автор получил асимптотическую формулу со степенным понижением в проблеме делителей для случая, когда суммирование распространяется на множество $\mathbb{N}_0$.

В статье [3] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $F_{i,j}(X)$ — число решений уравнения $n - m = 1$ в натуральных числах n, m таких, что $m \leqslant X$, $n \in \mathbb{N}_i$, $m \in \mathbb{N}_j$ ($i, j = 0, 1$).*

Тогда справедливы асимптотические формулы

$$F_{0,0}(X) = \frac{X}{6} + O(\ln X), \quad F_{1,1}(X) = \frac{X}{6} + O(\ln X),$$

$$F_{0,1}(X) = \frac{X}{3} + O(\ln X), \quad F_{1,0}(X) = \frac{X}{3} + O(\ln X).$$

В 2010 К. Маудюит и Дж. Риват [4] доказали, что плотности множеств простых чисел из классов $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}_1$ совпадают. Другое доказательство этого факта дал Б. Грин [5]. Указанные работы основаны на оценках специального вида тригонометрических сумм, которые как по своей силе, так и по доказательствам, представляют собой варианты принадлежащей автору оценки интеграла от модуля тригонометрической суммы специального вида из работы автора [2].

В работах [4, 5] получена асимптотическая формула для суммы

$$\sum_{p \leqslant X,\ p \in \mathbb{N}_i} 1, \qquad i = 0, 1. \tag{1}$$

В [6] автор решил тернарную проблему Гольбаха в простых числах из класса $\mathbb{N}_0$.

В настоящей статье выводится асимптотическая формула для суммы

$$G_{i,j}(X) = \sum_{p \leqslant X,\ p \in \mathbb{N}_i,\ p+1 \in \mathbb{N}_j} 1, \quad i = 0, 1;\ j = 0, 1. \tag{2}$$

Сумма (2) отличается от (1) тем, что в ней суммирование ведется по простым числам p не только принадлежащим классу $\mathbb{N}_i$, но и таким, что $p + 1$ принадлежит классу $\mathbb{N}_j$.

Основным результатом статьи, продолжающей работы автора [2, 3, 6–12] является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть i, j независимо друг от друга принимают значения* 0, 1.

Тогда для любого фиксированного $A > 0$ справедливы асимптотические формулы

$$G_{0,0}(X) = \frac{\operatorname{Li} X}{3} + O(X \ln^{-A} X), \quad G_{1,1}(X) = \frac{\operatorname{Li} X}{3} + O(X \ln^{-A} X),$$

$$G_{0,1}(X) = \frac{\operatorname{Li} X}{6} + O(X \ln^{-A} X), \quad G_{1,0}(X) = \frac{\operatorname{Li} X}{6} + O(X \ln^{-A} X),$$

где $\operatorname{Li} X = \int_2^X \frac{dx}{\ln x}$.

Заметим, что, как и в теореме 1, главные члены формул из теоремы 2 зависят от того, каким именно классам принадлежат p и $p+1$.

Библиографический список

1. *Gelfond A. O.* Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Arith. 1968. Vol. XII.

2. *Эминян К. М.* О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55, вып. 3.

3. *Эминян К. М.* Об одной бинарной задаче // Матем. заметки. 1996. Т. 60, вып. 4.

4. *Mauduit C., Rivat J.* Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. Second Series. 2010. Vol. 171, № 3.

5. *Green B.* Three topics in additive prime number theory // Current Developments in Mathematics. 2009. Vol. 207.

6. *Эминян К. М.* Проблема Гольдбаха в простых числах с двоичными разложениями специального вида // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, вып. 1.

7. *Эминян К. М.* О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов // Тр. Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова. 1994. Т. 207.

8. *Эминян К. М.* L_1-норма одной тригонометрической суммы // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 1.

9. *Эминян К. М.* Оценка дробного момента одной тригонометрической суммы // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 2.

10. *Эминян К. М.* Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложениями специального вида // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 1.

11. *Эминян К. М.* О средних значениях функции $\tau_k(n)$ в некоторых последовательностях натуральных чисел // Матем. заметки. 2011. Т. 90, вып. 3.

12. *Эминян К. М.* Обобщенная проблема делителей с натуральными числами специального вида // Матем. сб. 2015. Т. 206, вып. 7.

ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ВЫПОЛНИМОСТИ ТОЖДЕСТВ В КЛАССАХ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ

Д. Г. Явкаев, Д. А. Бредихин (г. Саратов)
E-mail: bredikhin@mail.ru

Алгеброй отношений называется упорядоченная пара (Φ, Ω), где Φ – множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними. Одним из основных направлений теории алгебр отношений является изучение их свойств, выразимых с помощью тождеств, то есть рассмотрение соответствующих многообразий порожденных различными классами алгебр отношений [1, 2].

Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул исчисления предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Важным классом логических операций является класс *диофантовых* операций. Операция называется диофантовой [3, 4] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [5]), если она может быть задана с помощью формулы исчисления предикатов первого порядка, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования.

Эквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в работах [3, 4] одного из авторов. Из этого описания, в частности, следует, что указанные теории являются разрешимыми. Однако проверка выполнимости тождеств для заданного класса алгебр отношений может представлять значительные вычислительные сложности. Это приводит к идеи реализации этой проверки с помощью компьютерной программы.

Алгебра отношений с одной бинарной операцией образует группоид отношений. Авторами предложен алгоритм, реализованный с помощью компьютерной программы по автоматической проверки выполнимости тождеств в классе группоидов отношений с заданной диофантовой операцией. Исходными данными для работы программы является вид формулы, задающий эту операцию и термы, являющиеся левыми и правыми частями проверяемого тождества. С помощью этой программы, в частности, удалось получить автоматическое доказательство необходимых условий результатов работ [6–9].

Библиографический список

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4.

2. *Jónsson B.* Varieties of relation algebras // Algebra universalis. 1982. Vol. 54.

3. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360.

4. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирский матем. журн. 1997. № 1.

5. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7.

6. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids assosiated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44, № 1.

7. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1.

8. *Бредихин Д. А.* О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2.

9. *Bredikhin D. A.* On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra universalis. 2015. Vol. 73.

ON HOMOMORPHISMS OF ORDERED RINGS

E. E. Shirshova (Moscow)

E-mail: shirshova.elena@gmail.com

Suppose G is an additive partial ordered (*po*-) group [1], and $a > 0$ in G. An element $b \in G$ is said to be *infinitesimal with respect to* a ($b << a$) if $nb \leq a$ is correct for each integer $n > 0$.

A ring $R =< R, +, \cdot, \leq >$ is called a *right (left) K-ring* if $< R, +, \leq >$ is a *po*-group, and the following condition holds: if $0 < a \in R$, then $ab << a$ $(ba << a)$ for all $b \in R$.

Theorem 1. *If R is a right K-ring, then there is the convex right ideal I_a for each element $a > 0$ in R, and every element $u \in I_a$ has a representation $u = b - c$, where $0 \leq b \leq ka$ and $0 \leq c \leq la$ for some integers $k > 0$ and $l > 0$.*

A ring $R =< R, +, \cdot, \leq>$ is called a *lattice K-ring* if R is a right K-ring and a left K-ring, and the group $< R, +, \leq>$ is a lattice-ordered group.

Suppose R and S are lattice K-rings and f is a homomorphism of the ring R to the ring S. f is said to be an *l-homomorphism* if f preserves the lattice operations.

Theorem 2. *Suppose $R =< R, +, \cdot, \leq>$ is a lattice K-ring, I is a convex directed subgroup of the group $G =< R, +, \leq>$, and ε is the natural homomorphism of the group G to the quotient-group G/I. Then there exists the lattice K-ring R/I, and ε is an l-homomorphism of the lattice K-ring R to the lattice K-ring R/I.*

References

1. *Fuchs L.* Partially Ordered Algebraic Systems. Moscow : Mir, 1965.

WEIGHTED UNIVERSALITY OF PERIODIC ZETA-FUNCTION

M. Stoncelis (Vilnius, Lithuania)
E-mail: stoncelis@su.lt

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable and let $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $k \in \mathbb{N}$. The periodic zeta-function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

and, in view of the equality,

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{m=1}^{k} a_m \zeta(s, \frac{m}{k}), \quad \sigma > 1,$$

where $\zeta(s, \alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, denotes the Hurwitz zeta-function, has a meromorphic continuation to the whole complex plane with a simple pole at the point $s = 1$. If $a_1 + \cdots + a_k = 0$, then the function $\zeta(s, a)$ is entire one.

The function $\zeta(s; \mathfrak{a})$, as the majority of zeta-functions, for some sequences $\mathfrak{a}$ is universal in the Voronin sense, i.e., a wide class of analytic functions can be approximated by shifts $\zeta(s+i\tau; \mathfrak{a})$. The first results in this direction were obtained by B. Bagchi, J. Steuding, and by J. Sander and J. Steuding. In [1], the universality of $\zeta(s; \mathfrak{a})$ with a multiplicative sequence $\mathfrak{a}$ has been considered. However, the universality of the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is a rather complicated problem. There exist examples of sequences $\mathfrak{a}$ when $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is not universal.

In the report, we present a weighted universality theorem for the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$. Let $w(t)$ be a positive function of bounded variation on $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$, such that the variation $V_a^b w$ on $[a, b]$ satisfies the inequality $V_a^b w \leqslant cw(a)$ with a certain constant $c > 0$ for any subinterval $[a, b] \in [T_0, \infty)$. Define

$$U = U(T, w) = \int_{T_0}^{T} w(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

and suppose that

$$\lim_{T\to\infty} U(t, w) = \infty.$$

Let I_A stand for the indicator function of the set A, and

$$A = \left\{ \tau : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Then the following statement is valid.

Theorem 1. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative ($a_{mn} = a_m a_n$ for all $(m, n) = 1$). Let K be a compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ with connected complement, and let $f(s)$ be a continuous non-vanishing function on K which is analytic in the interior of K. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(\tau) I_A(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau > 0.$$

References

1. *Laurinčikas A., Šiaučiūnas D.* Remarks on the universality of the periodic zeta-function // Math. Notes. 2006. Vol. 80, № 3-4.

О НУЛЯХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ, ЛЕЖАЩИХ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

С. А. Гриценко (г. Москва)
E-mail: s.gritsenko@gmail.com

Пусть $\chi_1(n)$ – характер Дирихле mod 5 такой, что $\chi_1(2)=i$,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}.$$

Функция Дэвенпорта–Хейльбронна определяется равенством

$$f(s)=\frac{1-i\varkappa}{2}L(s,\chi_1)+\frac{1+i\varkappa}{2}L(s,\overline{\chi}_1).$$

Функция $f(s)$ введена и исследована Дэвенпортом и Хейльбронном в 1936 г. Она удовлетворяет следующему функциональному уравнению риманова типа

$$g(s)=g(1-s),$$

где $g(s)=(\frac{\pi}{5})^{-s/2}\Gamma(\frac{1+s}{2})f(s)$.

Хорошо известно, что не все нетривиальные нули $f(s)$ лежат на прямой $\Re s=\frac{1}{2}$.

В области $\Re s>1$, $0<\Im s\leq T$ число нулей $f(s)$ превосходит cT, где $c>0$ – абсолютная постоянная (Дэвенпорт и Хейльбронн, 1936).

Более того, число нулей $f(s)$ в области $\frac{1}{2}<\sigma_1<\Re s<\sigma_2$, $0<\Im s\leq$ $\leq T$ превосходит c_1T, где $c>0$ – абсолютная постоянная (С.М. Воронин, 1976).

В 1980 г. С.М. Воронин доказал, что «аномально много» нулей $f(s)$ лежат на критической прямой $\Re s=\frac{1}{2}$.

Пусть $N_0(T)$ – число нулей $f(s)$ на промежутке $\Re s=\frac{1}{2}$, $0<\Im s\leq T$. С.М. Воронин получил оценку

$$N_0(T)>c_2T\exp\{\frac{1}{20}\sqrt{\log\log\log\log T}\},$$

где $c_2>0$ – абсолютная постоянная.

В 1990 г. А.А. Карацуба существенно усилил неравенство Варонина и получил оценку

$$N_0(T)>T(\log T)^{1/2-\varepsilon},$$

где $\varepsilon>0$ – произвольно малая константа, $T>T_0(\varepsilon)>0$.

В 1994 г. А.А. Карацуба получил еще несколько более точную оценку

$$N_0(T) > T(\log T)^{1/2} \exp\{-c_3\sqrt{\log\log T}\},$$

где $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

В докладе будет представлена следующая теорема, доказанная автором.

Теорема. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малая константа. Тогда справедлива оценка

$$N_0(T) > T(\log T)^{1/2+1/16-\varepsilon}.$$

О ЛОКАЛЬНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ПЕРВИЧНОГО РАДИКАЛА СЛАБОАРТИНОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

С. А. Пихтильков, А. Н. Благовисная, О. А. Пихтилькова (г. Оренбург)

E-mail: pikhtilkov@mail.ru, matmet@bk.ru, opikhtilkova@mail.ru

Алгебра Ли L называется первичной, если для любых двух ее идеалов U и V из $[U, V] = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Скажем, что идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P – первична.

Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех ее первичных идеалов.

Подробнее теорию первичного радикала для алгебр Ли можно прочитать, например, в [1].

Назовем алгебру Ли слабоартиновой, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов.

В 2001 году А.В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова "Кольца и модули" поставил проблему: существует ли слабоартинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

В [2] показано, что первичный радикал специальной слабоартиновой алгебры является разрешимым. Разрешимость первичного радикала также доказана для слабоартиновых локально нильпотентных алгебр Ли [3]. Ослабленная проблема А.В. Михалева решена в [4]. Доказано, что первичный радикал алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр – разрешим. Известно, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим, но может не быть локально разрешимым [1].

Целью данной работы, является доказательство следующих результатов.

Теорема 1. *Пусть L – слабоартинова алгебра Ли. Тогда ее первичный радикал $P = P(L)$ – локально нильпотентен.*

Аналог теоремы 1 справедлив и для градуированных Ω-групп.

Теорема 2. *Пусть A – градуированная Ω-группа с условием конечности, удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A – локально нильпотентен.*

Библиографический список

1. *Балаба И. Н.* Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2.

2.*Пихтильков С. А.* Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. науч. тр. Тула, 2001.

3.*Пихтильков С. А.* О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, № 1.

4.*Мещерина Е. В.* О проблеме А.В. Михалева для алгебр Ли // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2.

О ПЕРИОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ В МНИМЫХ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Г. В. Федоров (г. Москва)
E-mail: glebonyat@mail.ru

Пусть K — произвольное поле, Char $K \neq 2$. В докладе мы показываем, что при бирациональном преобразовании мнимой гиперэллиптической кривой над полем K, переводящем конечные рациональные точки P и ιP соответственно в точки на бесконечности O и ιO действительной гиперэллиптической кривой, вид соответствующих непрерывных дробей не меняется. Отсюда и из результатов статьи [1] следует, что если $\mathcal{C} : Y^2 = \phi(X)$ — действительная гиперэллиптическая кривая, и b — корень многочлена $\phi(X)$, то периодичность непрерывной дроби $\sqrt{\phi}/(X-b)$ эквивалентна наличию фундаментальной единицы в поле $\mathcal{L}=K(X)(\sqrt{\phi})$. Отметим, что эквивалентность последненго условия периодичности непрерывной дроби $\sqrt{\phi}$ была доказана в [2].

Библиографический список

1. *Платонов В. П., Федоров Г. В.* S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Докл. РАН. 2015. Т. 465.
2. *Adams W. W., Razar M. J.* Multiples of points on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41.

О ЗАДАЧАХ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова (г. Воронеж)
E-mail: algebraist@yandex.ru

Рассмотрим приложение метода весового решета к задачам в коротких интервалах. Метод решета является одним из наиболее универсальных методов теории чисел и успешно применяется при решении задач, в которых простые числа заменяются почти простыми числами, то есть числами с ограниченным количеством простых делителей. Применим метод одномерного решета Сельберга в сочетании с весами Бухштаба, анонсированными в 1985 г., к задачам по исследованию почти простых чисел в коротких интервалах (об этом методе см. [1–3]). Результаты, полученные авторами, приведены в [3, гл. 3, 5].

1. Для последовательности A :

$$A=\{\Phi(n)|\; n\in \mathrm{N},\; x-h<n\le x\},$$

где $\Phi(n)$ – неприводимый полином с целыми коэффициентами, $x,h\in \mathrm{R}$, $1<h\le x$, ранее были получены следующие результаты.

Исследованию почти простых чисел в коротких интервалах полиномиальных последовательностей посвящены работы Х.–Э. Рихерта [4] и М. Лабордэ [5].

В 1969 г. Х.–Э. Рихерт [4, теорема 4] доказал, что для r-почти простого числа P_r

$$r\in \mathbf{N},\, n\equiv l\ (mod\, k),\ x-x^{1/\lambda_r}<P_r<x$$

$$\Lambda_2=\frac{11}{6},\ \ \Lambda_3=\frac{11}{4},\ \ \Lambda_4=\frac{11}{3},\ \ (\forall r\ge 2)\ \ (\Lambda_r=r-\frac{2}{7}).$$

В 1979 г. М. Лабордэ [5, теорема 3] получил

$$\Lambda_2 = 1,89189, \ \ \Lambda_3 = 2,8571 \ \ \Lambda_4 = 3,8571, \ \ (\forall r \geq 2) \ \ (\Lambda_r = r - 0,145).$$

В 1982 г. Г. Гривс [6, 7] получил $\delta_2 = 0,063734...$, $\Lambda_r = r - \delta_r$, $\Lambda_2 = 1,937$.

Авторы получили $\Lambda_2 = 1,975$ [3, теорема 5.5.2].

2. Для последовательности A, $A = \{n | \, n \in \mathbf{N}, \, x - x^{1/\Lambda_2} < n \leqslant x\}$, ранее было получено:

В 1981 г. Х. Хальберстам, Х.–Э. Рихерт и Д. Р. Хис-Браун [8] получили $1/\Lambda_2 = 0,455$, а Х. Иванец и М. Лабордэ [9, теорема 2] получили $1/\Lambda_2 = 0,45$. Затем значение $1/\Lambda_2$ улучшалось в ряде работ: $0,4476$ (1985 г., Х. Хальберстам, Х.–Э. Рихерт [10]), $0,4436$ (1989 г., Э. Фуври [11]), $0,44$ (1992 г., Д. Ву [12]), $0,436$ (1996 г., Х.–К. Лиу [13]).

3. Исследованию наименьшего почти простого числа в арифметической прогрессии $kn + l$, $k, n, l \in \mathbf{N}$, $(k, l) = 1$, $0 < l < k$ и последовательности $kp + l$, $(k, l) = 1$, $0 < l < k$, p – простое число, посвящены работы Б. В. Левина [14], Х.–Э. Рихерта [4], М. Лабордэ [5, 15], Х. Майкава [16, 17].

Обозначим через $P_r^{(1)}$ наименьшее r-почти простое число. Пусть $P_r^{(1)} \leq k^B$, где B – некоторая постоянная, не зависящая от k.

В 1965 г. Б. В. Левин [14, теорема 1 и теорема 3] получил: для $kn + l$ $P_2^{(1)} \leq k^{2,3691}$, для $kp + l$ $P_4^{(1)} \leq k^{2,61}$, а, если справедлива расширенная гипотеза Римана, то $P_3^{(1)} \leq k^{3,02}$.

В дальнейшем были получены результаты для $P_2^{(1)}$ из арифметической прогрессии. В 1969 г. Х.–Э. Рихерт [4] для $kn+l$ получил $B = 2,20$. В 1978 г. М. Лабордэ [5, 15] для $kn + l$ получил $B = 2,13$. В 1978 г. Д.Р. Хис-Браун [18, теорема 1] – $B = 1,965$. В 1981 г. Г. Гривс [19, 7] – $B = 1,937$. В 1982 г. Х. Иванец [20, теорема 13] – $B = 1,845$.

Авторы получили $B = 1,8164$ [3, теорема 5.5.4].

В 1990 г. Х. Майкава [17] для $kn + l$ показал, что существуют такие числа $P_2^{(1)}$, что $P_2^{(1)} \leq \tau(l)\, k \, \ln^7 k$, где Q –большой параметр,

$0 < |l\,| \leq Q$, $\tau(l)$ – число делителей l (за исключением, возможно, $O(Q/\ln Q)$ модулей k с $(k, l) = 1$ и $Q < k \leq 2Q$).

Библиографический список

1. *Бухштаб А. А.* Новый тип весового решета // Теория чисел и её приложения: тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985.

2. *Вахитова Е. В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. М. : Изд-во МПГУ "Прометей", 2002.

3. *Вахитова Е. В., Вахитова С. Р.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014.

4. *Richert H.–E.* Selbergs sieve with weights // Mathematika. 1969. Vol. 16, № 31.

5. *Laborde M.* Buchstabs sifting weights // Mathematika. 1979. Vol. 26.

6. *Greaves G.* A weighted sieve of Brun type // Acta arith. 1982. Vol. 40.

7. *Greaves G.* The weighted linear sieve and Selbergs λ^2-method // Acta arith. 1986. Vol. 47.

8. *Halberstam H., Richert D. R., Heath-Brown H.* Almost-primes in short intervals. Recent progress in analytic number theory. London, 1981.

9. *Iwaniec H., Laborde M.* P_2 in short intervals // Annales de L'institut Fourier. Grenoble, 1981. Vol. 31, № 4.

10. *Halberstam H., Richert H.–E.* A weighted sieve of Greaves type // Elem. Anal. Theory Numbers. 1985. Vol. 17.

11. *Fouvry E., Grupp E.* Weighted sieves and twin prime type equations // Duke math. j. 1989. Vol. 58, №. 3.

12. *Wu J.* P_2 dans les petits intervalles // Progress in Math. "Seminare de Theorie des Nombres. Paris, 1991. Vol. 102.

13. *Liu H.–Q.* Almost primes in short intervals // J. Number Theory. 1996. Vol. 57.

14. *Левин Б. В.* О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности k^2x^2+1 // УМН. 1965. Т. 20, № 4(124).

15. *Laborde M.* Les sommes trigonometriques de Chen et les poids de Buchstab en theorie du crible. These presentee a luniversite de Paris-sud, 1978.

16. *Mikawa H.* Almost-primes in arithmetic progressions and short intervals // Tsukuba j. math. 1989. Vol. 13, №. 2.

17. *Mikawa H.* On almost-primes in arifmetic progressions // Tsukuba j. math. 1990. Vol. 14, №. 1.

18. *Heath-Brown D. R.* Almost-primes in arithmetic progressions and short intervals // Math. proceed. Camb. philos. soc. 1978. Vol. 83.

19. *Greaves G.* Rossers sieve with weights. Recent progress in analytic number theory. London, 1981.

20. *Iwaniec H.* On the Brun-Titchmarsh theorem // Y. Math. Soc. Japan. 1982. Vol. 34, №. 1.

ИНЪЕКТИВНОСТЬ И ПРОЕКТИВНОСТЬ ПОЛИГОНОВ НАД ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ СВЯЗКАМИ

И. Б. Кожухов, А. О. Петриков (г. Москва)
E-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru, petrikov.alexander@gmail.com

Важную роль в общей алгебре играют инъективные и проективные объекты. Целью данной работы является обобщение результатов о проективности полигонов над полугруппами правых/левых нулей до полигонов над прямоугольными связками. Отметим, что некоторые свойства полигонов над прямоугольными связками рассматривались в [1].

Напомним, что *прямоугольной связкой* называется полугруппа $S = L \times R$, где L — полугруппа левых, а R — полугруппа правых нулей. В данной работе мы описываем все проективные и инъективные полигоны над прямоугольной связкой. Полученное описание позволяет построить проективное накрытие и инъективную оболочку произвольного полигона.

Полигон X называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha : A \to B$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi : X \to B$ существует гомоморфизм $\psi : X \to A$ такой, что $\psi\alpha = \varphi$ (мы умножаем отображения слева направо, т.е. $x(\psi\alpha) = (x\psi)\alpha$). Полигон X называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha : A \to B$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi : A \to X$ существует гомоморфизм $\psi : B \to X$ такой, что $\alpha\psi = \varphi$.

Проективным накрытием полигона X называется проективный полигон P, имеющий сюръективный гомоморфизм $\xi : P \to X$, причем для любого собственного подполигона $P_1 \subset P$ ограничение $\xi|_{P_1}$ не является сюръективным. *Инъективной оболочкой* полигона X называется минимальное инъективное расширение полигона X.

Лемма. Пусть X — полигон над прямоугольной связкой S. Тогда:

(i) $Y = XS$ — подполигон;

(ii) $U = X \setminus XS$ — подмножество (возможно, пустое), не являющееся подполигоном;

(iii) $Z = XS \setminus US$, если не пусто, является подполигоном.

Теорема 1. Пусть $S = L \times R$ — прямоугольная связка, $Y = XS$, $U = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus US$. Полигон X проективен в том и только том случае, если выполняются условия:

(i) $\forall u, v \in U \quad \forall s, t \in S \quad (us = vt \Rightarrow u = v \wedge s = t)$;

(ii) $\forall z, z' \in Z \quad \forall r, r' \in R \quad (zr = zr' \Rightarrow r = r')$.

Теорема 2. Всякий полигон над прямоугольной связкой имеет проективное накрытие.

Теорема 3. Пусть $S = L \times R$ — прямоугольная связка, X — правый полигон над S. Представим X в виде $X = U \cup \coprod_{i \in I} Z_i$, где $U = X \setminus XS$, $Z_i = z_i S$ — попарно не пересекающиеся циклические подполигоны (орбиты), φ_l ($l \in L$) — отображения $U \to I$, определяющие структуру S-полигона X. Полигон X инъективен в том и только том случае, если выполняются условия:

(i) для любого неконстантного отображения $\omega : L \to I$ существует элемент $u \in U$ такой, что $u\varphi_l = l\omega$ при всех $l \in L$;

(ii) X содержит нуль (т.е. для какого-нибудь Z_i имеет место равенство $|Z_i| = 1$) [2–7].

Библиографический список

1. *Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р.* О решётке конгруэнций полигонов над прямоугольными связками // Сб. науч. тр. МИЭТ, посвящ. 70-летию А.С. Поспелова. М. : МИЭТ, 2016.

2. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories. N.Y.; Berlin, 2000.

3. *Avdeyev A.Yu., Kozhukhov I.B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. 2000. Vol. 14, № 4.

4. *Халиуллина А.Р.* Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей // Чебышевский сборник. 2013. Т. 13, вып. 4.

5. *Халиуллина А.Р.* Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей // Дальневост. матем. журн. 2015. Т. 15, № 1.

6. *Кожухов И.Б., Халиуллина А.Р.* Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами // Электронные информационные системы. 2014. Т. 2, № 2.

7. *Moghaddasi Gh.* On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups // Turk J. Math. 2012. Vol. 36.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ S-ЕДИНИЦ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ РОДА 2 И ПРОБЛЕМА КРУЧЕНИЯ В ЯКОБИАНАХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

М. М. Петрунин (г. Москва)
E-mail: petrunin@niisi.ras.ru

В последние 25 лет усилиями целого ряда математиков (Flynn, Leprevost, Howe, Poonen, Ogawa, Elkies и других, см. [1–11]) было доказано существование $\mathbb{Q}$-точек кручения якобианов гиперэллиптических кривых рода 2, определённых над $\mathbb{Q}$, следующих порядков: 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 35, 39, 40, 45, 60, 63, 70. Эти точки были получены с использованием различных методов, индивидуальных для отдельных порядков.

В 2010 г. В. П. Платоновым в работе [12] был предложен принципиально новый подход к проблеме кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел. Этот новый подход базируется на вычислении фундаментальных единиц в гиперэллиптических полях. С помощью указанного подхода в работах [13], [14] было доказано существование точек кручения новых порядков. Полное изложение нового метода и полученных на его основе результатов содержится в [15].

В. П. Платонов высказал гипотезу, что если рассмотреть S, состоящее из конечного и бесконечного нормирования, и изменить соответствующим образом определение степени S-единицы, то порядки $\mathbb{Q}$-точек кручения, как правило, будут определяться степенями фундаментальных S-единиц.

Основным результатом настоящего сообщения является построение фундаментальных S-единиц больших степеней методами, основанными на подходе В. П. Платонова. Вычисление базируется на методах непрерывных дробей и матричной линеаризации ([16, 17]).

В настоящем сообщении получили развитие эффективные алгоритмы вычисления S-единиц методом непрерывных дробей в случае S, состоящего из бесконечного и конечного нормирования первой степени. Также получено доказательство корректности условия остановки алгоритмов, основанных на методе непрерывных дробей, и в качестве следствия получено необходимое и достаточно условие соответствия S-единицы вида u^n, где u — фундаментальная S-единица, и подходящей дроби к $\sqrt{f}/d$

для некоторого d, делителя f, где f – свободный от квадратов многочлен нечетной степени. Улучшенные алгоритмы позволили построить упомянутые выше фундаментальные S-единицы больших степеней.

В качестве следствия получено альтернативное доказательство существования $\mathbb{Q}$-точек кручения некоторых больших порядков в соответствующих якобианах гиперэллиптических кривых.

Библиографический список

1. *Flynn E. V.* Large rational torsion on abelian varieties // J. Number Theory. 1990. Vol. 36.

2. *Leprevost F.* Famille de courbes de genre 2 munies dune classe de diviseurs rationnels dordre 13 // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1991. Vol. 313, № 7.

3. *Leprevost F.* Familles de courbes de genre 2 munies dune classe de diviseurs rationnels d'ordre // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1991. Vol. 313, № 11.

4. *Leprevost F.* Points rationnels de torsion de jacobiennes de certaines courbes de genre 2 // C.R. Acad. Sci. Paris. 1993. Vol. 316, № 8.

5. *Ogawa H.* Curves of genus 2 with a rational torsion divisor of order 23 // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1994. Vol. 70, № 9.

6. *Leprevost F.* Jacobiennes de certaines courbes de genre 2: torsion et simplicite // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1995. Vol. 7, № 1.

7. *Cassels W. S.* Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus 2. Cambridge Univ. Press, 1996.

8. *Howe E. W., Poonen B.* Large torsion subgroups of split Jacobians of curves of genus two or three // Forum Mathematicum. 2000. Vol. 12.

9. *Nicolas B., Leprevost F., Pohst M.* Jacobians of genus-2 curves with a rational point of order 11 // Experiment. Math. 2009. Vol. 18, № 1.

10. *Elkies N. D.* Curves of genus 2 over Q whose Jacobians are absolutely simple abelian surfaces with torsion points of high order. Preprint, Harvard University, 2010.

11. *Howe E. W.* Genus-2 Jacobians with torsion points of large order // Bulletin of the London Mathematical Society. 2015. Vol. 47, № 1.

12. *Платонов В. П.* Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // Докл. РАН. 2010. Т. 430, № 3.

13. *Платонов В. П., Петрунин М. М.* Новые порядки точек кручения

в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Докл. РАН. 2012. Т. 443, № 6.

14. *Платонов В. П., Петрунин М. М.* О проблеме кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Докл. РАН. 2012. Т. 446, № 3.

15. *Платонов В. П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН, 2014. Т. 69, вып. 1(415).

16. *Платонов В. П., Петрунин М. М.* Фундаментальные S-единицы в гиперэллиптических полях и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // Докл. РАН. 2015. Т. 465, № 1.

17. *Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П.* Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 11.

Содержание

Научное издание

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АЛГЕБРЕ, ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Межвузовский сборник научных трудов

В ы п у с к 8

Материалы XIV Международной конференции «Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения», посвященной 70-летию со дня рождения Г. И . Архипова и С. М. Воронина

Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Т. А. Трубникова*
Подготовка оригинал-макета *А. Е. Коротков, В. В. Кривобок*

Подписано в печать 29.07.2016. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 8,14 (8,75). Тираж 100 экз. Заказ 113-Т.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета.
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.