Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи

Рыхлов Виктор Сергеевич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н., профессор
А. П. Хромов

Саратов — 2025

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Актуальность темы. Тема диссертации относится к спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и дифференциальных оператор-функций (о.-ф.).

Вопросы спектральной теории, изучаемые в работе, затрагивают асимптотику по спектральному параметру фундаментальной системы решений (ф.с.р.) обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерную равносходимость внутри основного интервала разложений в ряды по собственным и присоединённым функциям (с.п.ф.) обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями, а также с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценку разности частичных сумм этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при $n-1$-й производной, m-кратную полноту ($1 \leqslant m \leqslant n$) в $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. нерегулярных полиномиальных дифференциальных о.-ф. n-го порядка, определяемых однородными по спектральному параметру дифференциальными выражениями (д.в.) с постоянными коэффициентами и произвольными двухточечными краевыми условиями.

В **первой главе** диссертации решается задача построения асимптотических формул экспоненциального типа для решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка с параметром λ при $|\lambda| \to \infty$.

Глава начинается с рассмотрения дифференциального уравнения n-го порядка с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ вида

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \; x \in [a,b]. \quad (1)$$

Обозначим $\lambda = -\operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в комплексной ρ-плоскости области: $S_k = \left\{\rho \in \mathbb{C} : \dfrac{\pi k}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \dfrac{\pi(k+1)}{n}\right\}$, $k = \overline{0,2n-1}$. Пусть S — некоторая область S_k, а T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$. Через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ обозначим корни n-й степени из -1, занумерованные для $\rho \in T_c$ таким образом, что $\operatorname{Re}(\rho+c)\omega_1 \leqslant \operatorname{Re}(\rho+c)\omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\rho+c)\omega_n$.

Пусть $W_p^k[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a,b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k-ю производную из $L_p[a,b]$, с нормой $\|y(x)\|_{pk} := \|y(x)\|_p + \|y^{(k)}(x)\|_p$, где через $\|\cdot\|_p$ обозначена норма пространства $L_p[a,b]$, $W_p^0[a,b] := L_p[a,b]$.

Задача об асимптотике решений уравнения (1) при больших значениях параметра $|\lambda|$ имеет долгую историю. Первым такого рода задачу рассмотрел Ж. Лиувилль [21] в принципиально важном частном случае $n=2$, $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 0$. Аналогичный случай рассмотрел позднее Я. Хорн [15].

Л. Шлезингер [48] рассмотрел общее уравнение (1) с бесконечно гладкими коэффициентами при $\arg\rho = \alpha = \mathrm{const}$, а при $\theta \leqslant \arg\rho \leqslant \psi$ независимо этот результат получил Дж. Биркгоф [6]. Позднее решение этой задачи в общем виде было рассмотрено в работах Я. Д. Тамаркина [53; 54; 187], М. Стоуна [51], Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона [94], М. А. Наймарка [135].

Широкий круг тем, связанных с асимптотическими методами, излагается в книгах И. М. Рапопорта [139], А. С. Ломова [126] и М. В. Федорюка [191]. Там же имеется обширная библиография.

Каноническим д.в. в этой задаче можно считать д.в. $\ell(y)$ в случае, когда $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 0$, а коэффициенты $a_j(x)$ $(j = \overline{2,n})$ могут быть самого общего вида, например, из пространства $C[a,b]$ или даже $L_1[a,b]$, если не стоит вопрос об уточнении асимптотических формул. Как правило, при нахождении асимптотических формул более общие д.в. сводят к каноническому д.в.

Для канонического д.в. из результатов [6; 51; 54; 187] следует, что в любой области T ρ-плоскости существуют n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $\ldots$, $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и удовлетворяющих асимптотическим формулам (результат изложен в книге [135])

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad k = \overline{1,n}, \quad m = \overline{0,n-1}.$$

В случае $a_0(x) \in W_1^n[a,b]$, $a_1(x) \in W_1^{n-1}[a,b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$ в результате соответствующей замены искомой функции и независимой переменной [135, с. 53, 87] получается каноническое д.в. с суммируемыми коэффициентами. Таким образом, в этом случае существует ф.с.р. с асимптотикой

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^m |a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} w(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{2}$$

где $\eta(x)$ и $w(x)$ определяются через коэффициенты $a_0(x)$ и $a_1(x)$.

В случае $a_0(x) \notin W_1^n[a,b]$ или $a_1(x) \notin W_1^{n-1}[a,b]$ ситуация усложняется. В работах [6; 54; 187], в работе М. В. Федорюка [190], а также в книге М. Л. Расулова [140] были рассмотрены более общие дифференциальные уравнения. Если полученные там результаты применить к уравнению (1), то найдём, что при выполнении условий $a_0(x) \in W_1^2[a,b]$, $a_1(x) \in W_1^1[a,b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$ это уравнение в любой области T имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $\ldots$, $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом, для которых также справедливы асимптотические формулы (2).

Эти требования были ослаблены сначала в работах автора диссертации [143; 144; 146] при $a_0(x) \equiv 1$, затем в совместной с А. П. Хромовым статье [175] (результаты по асимптотике ф.с.р. полностью принадлежат автору диссертации) и в статьях [34; 151; 152] в общем случае. Вместо оценки $O\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ была получена оценка $O(\psi(\rho))$, где $|\psi(\rho)| \to 0$ при $|\rho| \to \infty$, причем стремление $|\psi(\rho)|$ к нулю зависит от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ и может быть сколь угодно медленным.

Позднее А. И. Вагабов [61] также получил оценку $o(1)$, как следствие результата для систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывными коэффициентами. В частности, в этой работе также отмечается зависимость скорости стремления к нулю остаточного члена от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$, а точнее, от аналогов этих коэффициентов в дифференциальной системе, если они из пространства Гёльдера $C^\gamma[a,b]$. В этом случае получается оценка $\psi(\rho) = O\left(\dfrac{1}{|\rho|^\gamma}\right)$.

Таким образом, задача получения асимптотики системы решений дифференциального уравнения (1) при наименьших требованиях на коэффициенты $a_j(x)$, $j = \overline{0,n}$, и выяснение зависимости функции $\psi(\rho)$ в остаточном члене от свойств этих коэффициентов является актуальной.

Отметим, что А. М. Гомилко и Г. В. Радзиевский [71; 72], Г. В. Радзиевский [137] исследовали асимптотику по спектральному параметру решений функционально-дифференциальных уравнений.

Случай, когда коэффициенты д.в. являются обобщёнными функциями, рассмотрен В. Е. Владыкиной и А. А. Шкаликовым [67] для скалярных уравнений второго порядка, а позже А. А. Шкаликовым и А. М. Савчуком [178; 179] для уравнений высших порядков.

Далее в первой главе рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[a,b]$ вида

$$Y'(x) - A(x,\lambda)Y(x) = 0, \tag{3}$$

где $A(x,\lambda)$ и $Y(x)$ — $n\times n$ матрицы-функции, $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр,

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda),$$

причем компоненты матрицы $A_1(x)$ из $AC[a,b]$, матриц $A_0(x)$ и $A_{-1}(x,\lambda)$ из $L_1[a,b]$ и нормы компонент $A_{-1}(x,\lambda)$ ограничены в $L_1[a,b]$ по λ при $|\lambda|\gg 1$.

Впервые наиболее полно асимптотические решения системы уравнений (3) изучались Я. Д. Тамаркиным [54; 187]. Исследования продолжили Дж. Биркгоф и Р. Э. Лангер [7], И. М. Рапопорт [139], М. Л. Расулов [140], В. Вазов [64]. В предположении, что компоненты матриц $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x,\lambda)$ принадлежат пространствам $W_1^2[a,b]$, $W_1^1[a,b]$ и $L_1[a,b]$, и некоторых других естественных предположениях в этих работах была получена следующая асимптотическая формула для ф.м.р.

$$Y(x,\lambda) = \tilde{\Psi}(x)\exp\left(\lambda\int\limits_a^x \Phi_1(\xi)\,d\xi\right)\Big(E+\mathcal{E}(x,\lambda)\Big), \tag{4}$$

где матрица $\tilde{\Psi}(x)$ вполне определяется коэффициентами системы (3), $\Phi_1(x) := \operatorname{diag}\big\{\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\big\}$ ($\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, есть корни характеристического уравнения системы (3), или, кратко, характеристики) и для компонент матрицы $\mathcal{E}(x,\lambda)$ справедлива оценка $O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ в равномерной метрике.

Если $A_1'(x)$ и $A_0(x)$ из класса Гёльдера $C^\gamma[a,b]$, то А. И. Вагабов [61], как уже отмечалось, получил для компонент матрицы $\mathcal{E}(x,\lambda)$ в (4) оценку $O\left(\dfrac{1}{|\lambda|^\gamma}\right)$.

Из изложенного следует, что задача получения асимптотики типа (4) для ф.м.р. системы уравнений (3) при наименьших требованиях на коэффициенты $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x,\lambda)$ и выявление зависимости функции $\mathcal{E}(x,\lambda)$ от свойств этих коэффициентов также является актуальной.

Наиболее сильный результат по этой задаче опубликован в статьях [39;153] автора диссертации. В этих статьях была получена равномерная оценка функции $\mathcal{E}(x,\lambda)$, в которой выявлена явная зависимость от свойств коэффициентов $A_1(x)$ и $A_0(x)$ в предположении, что элементы матриц $A_1(x)$, $A_0(x)$ и $A_{-1}(x,\lambda)$ принадлежат, соответственно, пространствам $W_1^1[a,b]$, $L_1[a,b]$ и $L_1[a,b]$.

В работе [63] А. И. Вагабова результаты работ [39; 153] были передоказаны при более сильных условиях на компоненты матриц: $\{A_1(x)\}_{ij} \in W_q^1[a,b]$, $\{A_0(x)\}_{ij}$, $\{A_{-1}(\cdot,\lambda)\}_{ij} \in L_q[a,b]$, $q > 1$, а оценка компонент остатка была получена в более слабой норме $\|\cdot\|_{q'}$, где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q}' = 1$, вместо $\|\cdot\|_\infty$ в [39; 153].

Другие подходы к нахождению асимптотических формул для решений систем уравнений типа (3) и более общих систем, а также другие оценки остаточных членов в этих асимптотических формулах можно найти в совместной статье Дж. Биркгофа и Р. Е Лангера [7], в статье Р. Е Лангера [20], работах Р. Меникена и М. Мёллера [23; 24].

Случай, когда главная матрица $A_1(x)$ диагональная, что позволило снизить требования на эту матрицу, исследовался в недавних работах А. П. Косарева и А. А. Шкаликова [96–99]. Была получена не только асимптотика типа (4), но и уточнённая асимптотика при наименьших условиях гладкости коэффициентов.

Задача об асимптотике решений сингулярных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений на оси была рассмотрена Р. Билсом, П. Дейфтом и К. Томеем [2], а на конечном интервале и полуоси и с особенностями (коэффициенты которых неинтегрируемы) — В. А. Юрко [208; 209] и М. Ю. Игнатьевым [16; 82].

Во **второй главе** рассматривается дифференциальный оператор L, порожденный д.в.

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y, \qquad p_j(x) \in L_1[0,1], \tag{5}$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\right) = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. или, что то же самое, по корневым функциям (к.ф.) оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности частичных сумм или, по-другому, о скорости равносходимости.

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова [186], Э. У. Хобсона [14], А. Хаара [12;13] для случая дифференциального оператора Штурма-Лиувилля и Я. Д. Тамаркина [53; 54; 187], М. Стоуна [51] для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными двухточечными краевыми условиями, удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа [135, с. 66–67].

Новый импульс этому направлению придал В. А. Ильин [83–86], разработавший метод получения теорем равносходимости, в котором дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений (с.з.) и с.п.ф.

Первый наиболее общий результат о равносходимости для оператора L получил Я. Д. Тамаркин [53]. Он доказал, что при при нулевом коэффициенте $p_1(x)$ (или достаточно гладком: $p_1(x) \in C^{n-1}[0,1]$) и регулярных краевых условиях для всякой интегрируемой (по Риману) функции ряды Фурье по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе равномерно равносходятся внутри $(0,1)$. Похожий результат получил М. Н. Стоун [51].

Позднее Я. Д. Тамаркин [54; 187] доказал теорему равносходимости для более общих операторов, но опять-таки с условиями регулярности краевых условий и достаточной гладкости коэффициента при $n-1$-й производной или аналогичных ему коэффициентов.

Н. П. Купцов [100] доказал абстрактную теорему равносходимости разложений по с.п.ф. операторов A и $A+Q$, действующих в банаховом пространстве. Приложениями этой теоремы являются обычные теоремы равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, но опять же в случае регулярных краевых условий оператора L и нулевого коэффициента $p_1(x)$.

А. П. Хромов [195; 198] распространил теорему о равносходимости Тамаркина на интегральные операторы $(Af)(x) := \int\limits_0^1 A(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$ $(x \in [0,1])$, ядра которых обобщают свойства функции Грина оператора L с регулярными краевыми условиями. А именно, А. П. Хромов рассмотрел случай, когда некоторые производные ядра интегрального оператора имеют разрыв первого рода на линии $\xi = x$. Такие операторы являются в определенном смысле каноническими в классе интегральных операторов, для разложений по с.п.ф. которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье. В дальнейшем В. В. Корнев и А. П. Хромов [95], а также А. П. Хромов [200] распространили эти результаты на другие интегральные операторы. Аналог случая $p_1(x) \notin C^{n-1}[0,1]$ при этом не рассматривался.

Обзор результатов по вопросам сходимости и, в частности, равносходимости биортогональных разложений функций для обыкновенных дифференциальных операторов приведен А. П. Хромовым в [197].

В основе всех этих результатов лежал метод контурного интеграла Пуанкаре-Коши или, по-другому, резольвентный метод, использующий интегральное представление Коши проекторов Рисса.

Другой подход к проблеме равносходимости, как уже было отмечено, предложил В. А. Ильин [83–86]. При получении своих результатов он существенно использовал формулу среднего значения, полученную первоначально Е. И. Моисеевым [133; 134] для случая гладких коэффициентов, и затем модифицированную И. С. Ломовым [116] для случая негладких коэффициентов. Эта формула является распространением формулы среднего значения для регулярного решения самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, которая указана в книге Э. Ч. Титчмарша [188], на случай присоединенных функций и на случай уравнений более высокого порядка.

В. А. Ильин доказал равномерную равносходимость с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд по с.п.ф. произвольного несамосопряженного дифференциального оператора, порожденного выражением $\ell(y)$ и произвольными краевыми условиями, обеспечивающими определенное асимптотическое поведение с.з.

Доказанные В. А. Ильиным теоремы формулируются в терминах условий на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы и охватывают ранее известные результаты, касающиеся равносходимости, в частности, случай регулярных краевых условий. Более того, эти теоремы впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты $\ell(y)$ и функции биортогональной системы.

Дальнейшее продвижение в вопросе о равносходимости было сделано А. М. Минкиным [128–132]. Некоторые доказанные им теоремы по формулировке родственны ряду утверждений В. А. Ильина [83–86], но доказательства другие. В обзорной статье [25] А. М. Минкина дан развернутый анализ результатов по равносходимости спектральных разложений.

Все приведенные выше результаты относились к операторам L с достаточно гладким коэффициентом $p_1(x)$, а также к обобщениям именно таких операторов. Вопрос о влиянии свойств этого коэффициента на равносходимость был исследован автором диссертации [31; 142–145].

Было установлено, что существует связь между множеством тех функций $f(x)$, для разложений которых по с.п.ф. оператора L имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье, и свойствами коэффициента $p_1(x)$. По сути, в этих работах была дана оценка разности частичных сумм разложений в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Отметим, что вопрос об оценке разности частичных сумм разложений по с.п.ф., отвечающим двум произвольным неотрицательным самосопряжённым расширениям оператора Штурма-Лиувилля, впервые был рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо [89; 90].

Аналогичные вопросы для оператора Штурма-Лиувилля исследовались Ш. А. Алимовым и И. Йо [1], а также Н. Лажетичем [106; 107]. Для оператора Шредингера вопросы, связанные с оценкой скорости равносходимости спектральных разложений, исследовались Е. И. Никольской [136].

В. Е. Волков и И. Йо [68] перенесли результат [89; 90] на случай несамосопряженного оператор Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса L^2_{loc} и получили точную по порядку оценку разности частичных сумм спектральных разложений. Позднее В. А. Ильин [87; 88] перенёс результат [89; 90] на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного.

Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$, где G есть основной интервал. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым [103] для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов. Отметим также другие статьи [19; 101; 102; 104; 105] В. М. Курбанова в этом направлении. В частности, в статье [104] им была исследована зависимость скорости равносходимости от модуля непрерывности главных коэффициентов д.в.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям, поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке G в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценку скорости равносходимости разложений или оценку порядка приближения функций спектральными разложениями именно на всем G, причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Используя подход В. А. Ильина, оценки скорости равносходимости соответствующих разложений на всем интервале G в интегральной метрике L_p получил И. С. Ломов [110].

В дальнейшем И. С. Ломов перенёс эти результаты на несамосопряженный оператор Шредингера [111; 112] и затем на оператор Штурма–Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции [113–115]. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен И. С. Ломовым [117; 118; 120] и И. С. Ломовым совместно с С. В. Афониным [55] — для операторов нечетного порядка.

И. С. Ломовым в [121] также установил оценку зависимости скорости локальной равносходимости разложений от расстояния внутреннего компакта до границы интервала G и совместно с А. С. Марковым [125] перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений.

Детальный обзор этих и аналогичных результатов по оценке разности частичных сумм можно найти в работах И. С. Ломова [119; 123; 124].

Интересные результаты по оценке скорости равносходимости получили Г. В. Радзиевский и А. М. Гомилко [73], а также Г. В. Радзиевский [29; 138]. Они подробно исследовали равносходимость и получили оценки разности частичных сумм разложений по с.п.ф. регулярных краевых задач для функционально-дифференциальных и дифференциальных операторов в метрике $L_p[0,1]$, где $1 < p < \infty$. Результат сформулирован в терминах подходящих модулей непрерывности.

Оценки разности частичных сумм снизу и сверху исследовали немецкие математики Ф. Й. Кауфман и В. Й. Лютер [18].

Отдельно от перечисленных результатов стоят результаты о равносходимости для операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями.

Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями начали изучаться в начале 2000-х годов. Такого типа операторы были введены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [177] и активно исследовались разными математиками.

По-видимому, первой работой, в которой изучались вопросы равносходимости для таких операторов, стала статья В. А. Винокурова и В. А. Садовничего

[66], в которой была доказана равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость в случае, когда $f(x) \in L_1[0,\pi]$, $q(x) = u'(x)$, где функция $u(x)$ из пространства $BV[0,\pi]$, то есть функция ограниченной вариации. При этом рассматривались краевые условия Дирихле.

П. Джаков и Б. С. Митягин [8] установили равномерную равносходимость для такого вида операторов Штурма-Лиувилля с произвольными регулярными краевыми условиями. При этом разлагаемая функция $f(x)$ выбиралась квадратично суммируемой с дополнительным условием на ее коэффициенты Фурье, а именно: суммируемость в квадрате с логарифмическим весом.

И. В. Садовничая в работах [49; 180–184] получила интересные результаты о равносходимости и оценке скорости равносходимости для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом-распределением и операторов Дирака. В частности, для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[0,\pi]$, была доказана равносходимость по норме пространства $L_\nu[0,\pi]$, $\nu \in [2,\infty)$, в случае, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_\mu[0,\pi]$, $\mu \in [1,2]$, где $1/\mu - 1/\nu \leqslant 1/2$ (в частности, для $\mu = 2$, $\nu = \infty$). Для оператора Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0 < \theta < 1/2$ ($W_2^\theta[0,\pi]$ есть шкала соболевских пространств с нецелым индексом гладкости $\theta \in [0,1]$), получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty[0,\pi]$ для случая, когда разлагаемая функция $f(x) \in L_2[0,\pi]$. А.М. Савчук и И.В. Садовничая подробно изложили эти и аналогичные результаты в книге [176].

Следует отметить также результаты В. А. Юрко [209] по равносходимости спектральных разложений в случае дифференциальных уравнений с неинтегрируемыми коэффициентами.

Таким образом, вопросы равносходимости в том или ином виде спектральных разложений и задача оценки разности частичных сумм в различных метриках и для различных классов дифференциальных операторов являются актуальными направлениями исследований.

Автору диссертации удалось продвинуться в данном направлении, а именно, в [31; 32] была дана оценка разности частичных сумм разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье в терминах логарифмических модулей непрерывности коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$. В статьях [36; 149; 172; 173] результаты [31; 32] были обобщены и оценка разности частичных сумм была получена в терминах общих модулей непрерывности. В частности, в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. При этом важную роль в доказательстве играет доказанный автором аналог теоремы Штейнгауза [31; 167].

В **третьей главе** исследуется кратная полнота к.ф. некоторых классов дифференциальных о.-ф. с постоянными коэффициентами. Вопрос об n-кратной полноте к.ф. возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных.

Основным объектом, рассматриваемым в главе, является о.-ф. $L(\lambda)$, порожденная однородным д.в.

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{7}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами.

$L(\lambda)$ является частным случаем более общей о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$, порожденной д.в.

$$\tilde{\ell}(y,\lambda) := p_n(x,\lambda) y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda) y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x,\lambda) y, \tag{9}$$

где $p_j(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{n-j} p_{js}(x)\lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, и краевыми условиями (8).

Далее используются известные определения собственных значений дифференциальных о.-ф., собственных и присоединённых (с.п.ф.) или, кратко, корневых функций (к.ф.), производных (по Келдышу) m-цепочек ($1 \leqslant m \leqslant n$), кратной полноты системы к.ф. в гильбертовом пространстве из [92; 93; 135; 207].

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. $\tilde{L}(\lambda)$, а $Y := \{y_k(x)\}$ — множество всех к.ф., соответствующих Λ. Предполагается, что множество Λ счетное.

Одной из важных задач для о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ является задача о кратной полноте системы её к.ф. в различных пространствах, в частности, в $L_2[0,1]$, т. е. задача нахождения условий на коэффициенты д.в. $\tilde{\ell}(y,\lambda)$ и краевые условия (8), при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота системы к.ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае, естественно, возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Основополагающей по этой проблеме является статья М. В. Келдыша [92], в которой была сформулирована теорема об n-кратной полноте системы к.ф.

$\tilde{L}(\lambda)$, порожденной д.в. (9) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и не зависящими от λ распадающимися краевыми условиями (8). Подробное доказательство этой теоремы было опубликовано [93] только в 1971 году.

Из результатов А. П. Хромова [193] вытекает справедливость теоремы М. В. Келдыша в случае аналитических коэффициентов д.в. Независимо этот результат был получен В. Эберхардом [9]. В случае суммируемых коэффициентов д.в. этот результат был установлен А. А. Шкаликовым [205; 206].

Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано А. П. Хромовым [193; 194; 199].

Случай произвольной главной части д.в. (9) рассмотрел Г. Фрайлинг [10] и С. А. Тихомиров [189].

В работах М. Г. Гасымова [69], М. Г. Гасымова и А. М. Магеррамова [70], а также А. А. Шкаликова [207], относящихся к общему виду о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$, получены достаточные условия n- и m-кратной полноты системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по λ функции Грина о.-ф $\tilde{L}(\lambda)$ на некоторых лучах.

Отметим, что А. А. Шкаликов исследовал n-кратную полноту системы к.ф., т. е. полноту производных n-цепочек, построенных по системе к.ф., при достаточно гладких коэффициентах $p_{js}(x)$ в специально построенных гильбертовых пространствах $\mathscr{W}^r_{p,U}$ (r достаточно большое), которые вполне естественны при наличии спектрального параметра λ в граничных условиях и являются подпространствами конечной коразмерности в пространстве $\mathscr{W}^r_p = W^{n-1+r}_p \oplus \cdots \oplus W^r_p$, где W^k_p — соболевские пространства гладких функций. Индекс U означает зависимость $\mathscr{W}^r_{p,U}$ от краевых условий.

Но для некоторых классов о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к.ф. ещё недостаточно исследован. Речь идет о кратной полноте системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7)–(8).

Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) системы к.ф. $L(\lambda)$ вида (7)–(8) в случае неоднородного д.в. с постоянными коэффициентами и полураспадающимися краевыми условиями, не зависящими от λ, проведено А. И. Вагабовым [60; 62]. Им были получены условия n- и m-кратной полноты системы к.ф. в $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

Исследование вопроса об n- и m-кратной полноте системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7)–(8) в других ранее не исследованных случаях были предприняты также и автором диссертации [40; 42–45; 164].

Но есть классы полиномиальных дифференциальных о.-ф. с постоянными коэффициентами (даже в случае распадающихся краевых условий при определенном расположении характеристик), для которых стандартные методы рассуждений, которые использовались в вышеприведенных работах, не позволяют установить кратную полноту системы к.ф.

Из этого следует, что вполне актуальной является задача модификации известных методов под еще нерешенные задачи или поиск новых подходов к решению этих задач.

Дальнейшее продвижение в решении задачи о кратной полноте системы к.ф. было осуществлено автором диссертации с использованием нового подхода к доказательству, который по основной идее можно назвать методом *обобщённых порождающих функций* (п.ф.). Здесь под п.ф. понимается функция $\mathrm{g}(x,\lambda)$, которая определённым образом порождает систему к.ф. $\tilde{L}(\lambda)$.

Первоначально идея такого подхода опубликована автором диссертации в [37; 38]. Более подробное изложение дано в [159; 160; 166].

Аналогично [207], множество о.-ф. $\tilde{L}(\lambda)$ и, в частности, множество о.-ф. $L(\lambda)$ разбиваются по степени усиления нерегулярности на классы регулярных, почти регулярных, слабо нерегулярных, сильно нерегулярных и вырожденных о.-ф. Из результатов работы [207] следует, что если о.-ф. слабо нерегулярна, то система её производных n-цепочек, построенных по системе к.ф., полна в специально построенных гильбертовых пространствах $\mathscr{W}^r_{p,U}$ и, в частности, в $L^n_2[0,1]$.

Поэтому, вполне естественно, что интерес представляет исследование кратной полноты к.ф. именно для сильно нерегулярных о.-ф.

При изучении спектральных свойств дифференциальных о.-ф. традиционно использовались (см. [60; 62; 135; 205; 206]) так называемые *классические* п.ф. $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, которые получались из характеристического определителя (х.о.) $\Delta(\lambda) = \det\{U_j(y_k(x,\lambda),\lambda)\}^n_{j,k=1}$ путем замены i-й строки определителя строкой $(y_1(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda))$, где $\{y_k(x,\lambda)\}^n_{k=1}$ есть ф.с.р. уравнения $\tilde{\ell}(x,\lambda) = 0$. В случае сильно нерегулярных о.-ф. классические п.ф. не всегда позволяют провести стандартные схемы доказательства кратной полноты системы к.ф.

Идея метода обобщённых п.ф. состоит в использовании более общих п.ф.

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \gamma_1(\lambda)g_1(x,\lambda) + \gamma_2(\lambda)g_2(x,\lambda) \cdots + \gamma_n(\lambda)g_n(x,\lambda),$$

где $\Gamma(\lambda) = \big(\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_n(\lambda)\big)^T \not\equiv (0, \ldots, 0)^T$ является вектор-параметром (в.-п.). Если $\Gamma(\lambda) := (0, \ldots, 1(i), \ldots, 0)^T$, то получим функции $g_i(x,\lambda)$.

При рассмотрении некоторых классов сильно нерегулярных о.-ф. автору диссертации удалось подобрать векторы $\Gamma(\lambda)$ так, что стандартная схема доказательства кратной полноты проходит и в этих случаях. В частности, это удалось сделать для о.-ф. с распадающимися краевыми условиями в случае расположения характеристик на двух лучах [170; 171], для дифференциального оператора, порожденного д.в. $y^{(n)}$ и двухточечными двучленными краевыми условиями [41; 47; 156; 160], а также для некоторых конкретных сильно нерегулярных о.-ф. с нераспадающимися краевыми условиями [35; 168].

Отметим, что слабо и сильно нерегулярные простейшие дифференциальные операторы (как без весовой, так и с весовой функцией) исследовались А. П. Хромовым [196], А. П. Гуревичем и А. П. Хромовым [74], О. Ю. Дмитриевым [80].

Активно развивался и другой подход, сводящий вопросы полноты и неполноты, минимальности, базисности и разложимости по к.ф. к вопросу разрешимости линейных уравнений с операторами внутренней суперпозиции (взвешенного сдвига). Этот подход по-видимому, первоначально был использован А. И. Вагабовым [60; 62]. В дальнейшем он применялся в некоторых исследованиях автора диссертации [33; 46; 154; 155; 158; 161–163; 169].

Цель работы состоит в исследовании спектральных свойств обыкновенных дифференциальных оператор-функций, включающих построение асимптотики по спектральному параметру экспоненциального типа решений дифференциального уравнения общего вида и общей системы дифференциальных уравнений первого порядка при наименьших требованиях на коэффициенты, доказательство теорем равносходимости разложений по с.п.ф. дифференциального оператора n-го порядка с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты, а также получение оценок разности частичных сумм этих рядов в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $n-1$-й производной и, в частности, в случае оценки этих модулей непрерывности медленно меняющимися функциями, развитие новых подходов к доказательству n- и m- кратной полноты ($1 \leqslant m \leqslant n$) в пространстве $L_2[0,1]$ систем к.ф. сильно нерегулярных дифференциальных оператор-функций.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Для линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида со спектральным параметром получены асимптотические формулы экспоненциального типа для решений при наименьших условиях на коэффициенты с новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциального выражения.
2. Для общей линейной дифференциальной системы первого порядка со спектральным параметром получены асимптотические формулы экспоненциального типа для ф.м.р. при наименьших условиях на коэффициенты с новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциальной системы.
3. Доказаны новые теоремы равносходимости в равномерной метрике внутри основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и регулярными по Биркгофу краевыми условиями и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты д.в.
4. Получены оценки разности частичных сумм нового типа разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора из п. 3 и в обычный тригонометрический ряд Фурье в терминах общих модулей непрерывности коэффициента при $n-1$-й производной и разлагаемой функции, как в общем случае, так и в случае, когда эти модули непрерывности оцениваются медленно меняющимися функциями.
5. Предложен новый подход, а именно, метод обобщённых порождающих функций, к исследованию m-кратной $(1 \leqslant m \leqslant n)$ полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. оператор-функций, определяемых однородными по спектральному параметру д.в. с постоянными коэффициентами и двухточечными краевыми условиями с полиномиальными по спектральному параметру коэффициентами.
6. Исследованы приложения метода из п. 5 к отдельным новым сильно нерегулярным о.-ф., к новому классу сильно нерегулярных о.-ф. с распадающимися краевыми условиями при расположении характеристик

на двух лучах и к новым дифференциальным операторам, порожденным простейшим д.в. пятого порядка и двухточечными двучленными краевыми условиями.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, спектральной теории линейных операторов и оператор-функций в гильбертовом и банаховом пространствах, алгебры матриц, теории целых аналитических функций, теории аппроксимации функций многочленами, теория медленно и правильно меняющихся функций, асимптотические и другие методы комплексного и функционального анализа, а также оригинальные методы автора диссертации.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные подходы могут быть обобщены на другие классы операторов и о.-ф.: операторы, порожденные более общими д.в., о.-ф. с кратными характеристиками, с многоточечными краевыми условиями, на графах, с коэффициентами-распределениями. Результаты работы носят достаточно общий характер и могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в СГУ им. Н. Г. Чернышевского, МГУ им. М. В. Ломоносова, СПбГУ, МИАН им. В. А. Стеклова и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание спецкурсов по спектральной теории дифференциальных о.-ф. для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Асимптотические по спектральному параметру формулы экспоненциального типа для решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка общего вида при наименьших требованиях на коэффициенты уравнения и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциального уравнения.
2. Асимптотические по спектральному параметру формулы экспоненциального типа для ф.м.р. общих линейных дифференциальных систем первого порядка общего вида при наименьших требованиях на коэф-

фициенты системы и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов дифференциальной системы.

3. Теоремы равносходимости в равномерной метрике внутри основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. регулярного по Биркгофу дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты д.в.
4. Оценки нового типа разности частичных сумм разложений в ряды по с.п.ф. регулярного по Биркгофу дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье в терминах общих модулей непрерывности коэффициента при $n-1$-й производной и разлагаемой функции, как в общем случае, так и в случае, когда модули непрерывности оцениваются медленно меняющимися функциями.
5. Новый подход, основанный на использовании обобщённых порождающих функций для системы к.ф., к исследованию m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. оператор-функций, определяемых однородными по спектральному параметру д.в. и двухточечными краевыми условиями с полиномиальными по спектральному параметру коэффициентами.
6. Приложения подхода из предыдущего пункта к отдельным сильно нерегулярным о.-ф., к классу сильно нерегулярных о.-ф. с распадающимися краевыми условиями при расположении характеристик на двух лучах и к дифференциальным операторам, порождённым простейшим д.в. пятого порядка и двухточечными двучленными краевыми условиями.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Апробация работы. Результаты диссертации в разные годы докладывались на научных семинарах:

1. Семинар «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» ВМК МГУ (руководители в разные годы — акад. РАН В. А. Ильин, акад. РАН Е. И. Моисеев, проф. И. С. Ломов).

2. Семинар «Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их спектральный анализ» механико-математического факультета МГУ (руководители — проф. В. В. Власов, доц. Н. А. Раутиан).
3. Семинар «Спектральная теория несамосопряженных операторов» кафедры дифференцильных уравнений и математической экономики Саратовского государственного университета (руководитель — проф. А. П. Хромов).
4. Семинар «Обратные задачи спектрального анализа» кафедры математической физики и вычислительной математики Саратовского государственного университета (руководитель — проф. В. А. Юрко).
5. Семинар факультета математики университета Дуйсбурга-Эссена (руководители в разные годы — проф. В. Эберхард, Г. Фрайлинг), г. Дуйсбург, Германия.
6. Семинар факультета математики, информатики и естествознания Рейнско-Вестфальского технического университета (руководители — проф. Г. Фрайлинг, Г. Янк), г. Ахен, Германия.
7. Семинар Институт математики НАН Украины (руководитель — проф. Г. В. Радзиевский).

и на международных научных конференциях:

1. Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов (регулярно с 1982 года).
2. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения», Воронеж (регулярно с 1997 года).
3. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж (1999, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025 гг.).
4. Крымская осенняя математическая школа-симпозиум «Спектральные и эволюционные проблемы» (регулярно с 1996 года).
5. «Казанская летняя математическая школа», Казань (1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2015, 2021, 2023 гг.).
6. Международная конференция «Понтрягинские чтения-XXIX», посвященная 90-летию академика В. А. Ильина, Москва (2018 г.).
7. Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», Москва (1995 г.).

8. Международная конференция, посвященная 75-летию члена-корреспондента РАН профессора Л. Д. Кудрявцева, Москва (1998 г.).
9. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И. Г. Петровского, Москва (2007 г.).
10. Международная конференция «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвящённой 105-летию академика С. М. Никольского, Москва (2010 г.).
11. «Казанская международная конференция по алгебре, анализу и геометрии», Казань (2016 г.).
12. Международная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа (2018 г.).
13. Международной конференция, посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего, Москва (2019 г.).
14. Международная научная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения», Владикавказ (2023 г.).
15. Международная конференция «Analysis and Mathematical Physics (AMP-2024)», Мехико, Мексика (2024 г.).

Часть результатов получена при работе в качестве исполнителя по грантам РФФИ 97-01-00566, 00-01-00075, 03-01-00169, 06-01-00003, 10-01-00270, 13-01-00238, гранту Президента РФ на поддержку ведущих научных школ 00-15-96123, НШ-1295.2003, НШ-4383.2010, гранту Минобрнауки 1.1520.2014/К.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации получены автором лично.

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 26 статьях автора [31–37; 39–47; 155; 163–171], из которых 21 статья опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Все статьи опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, приложения и списка литературы. Общий объём диссертации 295 страниц, из них 266 страниц текста. Список литературы включает 209 наименований на 24 страницы. Диссертация содержит 16 рисунков.

Содержание работы. В **первой главе** формулируются и доказываются теоремы об асимптотике по спектральному параметру экспоненциального типа решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида и решений общей системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка при неограниченном возрастании параметра.

В первом разделе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка на конечном отрезке $[a,b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad (10)$$

где $a_j(x) \in L_1[a,b]$, $j = \overline{1,n}$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на $[a,b]$.

Обозначим $\lambda = -\operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в рассмотрение следующие угловые области или секторы в комплексной ρ-плоскости

$$S_k = \left\{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\pi k}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{\pi(k+1)}{n}\right\}, \quad k = \overline{0,2n-1}.$$

Пусть S — некоторый сектор S_k, а T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$. Пусть T есть некоторая область T_c.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ корни n-й степени из -1 (характеристики уравнения (10)), занумерованные для $\rho \in T_c$ таким образом, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_1 \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_n.$$

Пусть $W_p^k[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a,b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k-ю производную из $L_p[a,b]$, $W_p^0[a,b] := L_p[a,b]$, а норма определяется формулой $\|f(x)\|_{W_p^k[a,b]} := \|f(x)\|_{L_p[a,b]} + \|f^{(k)}(x)\|_{L_p[a,b]}$. Кроме того, там, где это не вызовет разночтения, используем обозначения $\|f(x)\|_p := \|f(x)\|_{L_p[a,b]}$, $\|f(x)\|_{pk} := \|f(x)\|_{W_p^k[a,b]}$. Через $\|f(x)\|$ обозначим норму в пространстве $C[a,b]$.

Положим $\rho_j = \rho\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$ и введём функции

$$\eta(x) := \int_a^x |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\, d\tau, \quad w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\, d\tau\right).$$

Сформулируем основные результаты, которые доказывается в данном разделе и которые опубликованы автором диссертации в статьях [152] и [34].

Теорема 1.1. *Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения* (10) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$a_0(x) \in W_1^1[a,b], \quad a_j(x) \in L_1[a,b], \quad j = \overline{1,n}; \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in [a,b].$$

Тогда во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение (10) *имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, $\ldots$, $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho\in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и имеющих асимптотику при $k=\overline{1,n}$ и $m=\overline{0,n-1}$*

$$y_k^{(m)}(x,\rho)=(\rho\omega_k\eta'(x))^m|a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}}w(x)e^{\rho\omega_k\eta(x)}\big(1+O(\psi(\rho))\big),$$

где

$$\eta(x):=\int\limits_a^x|a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\,d\tau,\ \ w(x):=\exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x\frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau\right),\ \ \psi(\rho):=\mathsf{f}(\rho)+\frac{1}{|\rho|},$$

$$\mathsf{f}(\rho):=\max_{j\neq s}\left\{\left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\,dt\right\|,\ \left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\frac{a_0'(t)}{a_0(t)}\,dt\right\|\right\},$$

c_{js} равно либо a, либо b в зависимости от условия $j<s$ или $j>s$. При этом $\mathsf{f}(\rho)\to 0$, когда $|\rho|\to\infty$.

Из результата видно, что главный вклад в асимптотику решений вносят коэффициенты $a_0(x)$ и $a_1(x)$, причем в случае, когда $a_0'(x)$ и $a_1(x)\in L_1[a,b]$, вклад $a_0'(x)$ и $a_1(x)$ в асимптотику одинаков.

Во втором разделе даются асимптотические формулы для ф.м.р. линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром.

Используются следующие обозначения:

$\mathfrak{L}_p[a,b]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ есть нормированное пространство $n\times n$ матриц-функций (м.-ф.) с компонентами из пространства $L_p[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_p:=\max\limits_{i,j}\|\{X(t)\}_{ij}\|_p$ для $n\times n$ м.-ф. $X(t)$ с компонентами $\{X(t)\}_{ij}$;

$\mathfrak{W}_p^1[a,b]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ есть нормированное пространство $n\times n$ м.-ф. с компонентами из пространства $W_p^1[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_{p1}:=\max\limits_{i,j}\|\{X(t)\}_{ij}\|_{p1}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка на отрезке $[a,b]$

$$Y'(x)-A(x,\lambda)Y(x)=0, \tag{11}$$

где $A(x,\lambda)$ и $Y(x)$ — $n\times n$ м.-ф., λ — комплексный параметр,

$$A(x,\lambda)=\lambda A_1(x)+A_0(x)+\frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda).$$

Под решением системы (11) понимается такая $n\times n$ м.-ф. $Y(\cdot,\lambda)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, которая удовлетворяет уравнению (11) п.в. на $[a,b]$.

Введём следующие условия:

1°) *$A_1(x)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, $A_0(x)\in\mathfrak{L}_1[a,b]$, $A_{-1}(x,\lambda)\in\mathfrak{L}_1[a,b]$ по переменной x и $|||A_{-1}(\cdot,\lambda)|||_1=O(1)$ при $|\lambda|\geqslant R$, где $R\gg 1$;*

2°) *корни $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ характеристического уравнения $\det\big(\varphi E-A_1(x)\big)=0$, где E обозначает единичную $n\times n$ матрицу, различны при всех $x\in[a,b]$ и отличны от нуля;*

3°) *существует бесконечное подмножество Ω области $|\lambda|>R$, в котором при всех $x\in[a,b]$ выполняются неравенства*

$$\operatorname{Re}(\lambda\varphi_1(x))\leqslant\operatorname{Re}(\lambda\varphi_2(x))\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}(\lambda\varphi_n(x)) \tag{12}$$

при соответствующей нумерации функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$;

4°) *$A_{-1}(\cdot,\lambda)$ — аналитическая м.-ф. по λ при $|\lambda|>R$ в пространстве $\mathfrak{L}_1[a,b]$.*

Обозначим через $\Psi(x)$ м.-ф., которая приводит матрицу $A_1(x)$ к диагональному виду

$$\Psi^{-1}(x)A_1(x)\Psi(x)=\operatorname{diag}\big\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)\big\}=:\Phi_1(x).$$

Положим $B_0(x):=\Psi^{-1}(x)A_0(x)\Psi(x)-\Psi^{-1}(x)\Psi'(x)-\Phi_0(x)$, где

$$\Phi_0(x):=\operatorname{diag}\big\{\varphi_{01}(x),\varphi_{02}(x),\ldots,\varphi_{0n}(x)\big\},$$

$$\varphi_{0j}(x):=\big\{\Psi^{-1}(x)A_0(x)\Psi(x)-\Psi^{-1}(x)\Psi'(x)\big\}_{jj},\quad j=\overline{1,n}.$$

Обозначим

$$\chi_{ij}(x,\lambda):=\varphi_i(x,\lambda)-\varphi_j(x,\lambda)\ (i\neq j),\quad \text{где } \varphi_j(x,\lambda):=\lambda\varphi_j(x)+\varphi_{0j}(x).$$

Введем числовую $n\times n$ матрицу L с компонентами $l(i,j)$ такими, что $l(i,j):=a$ при $i\leqslant j$ и $l(i,j):=b$ при $i>j$, $i,j=\overline{1,n}$.

Сформулируем основную теорему данного раздела. Результат опубликован автором диссертации в статьях [153] и [39].

Теорема 1.9. *При условиях **1°**) – **3°**) существует ф.м.р. $Y(x,\lambda)$ системы (11), допускающая асимптотическое по $|\lambda|\to\infty$ $(\lambda\in\Omega)$ представление*

$$Y(x,\lambda)=\tilde{\Psi}(x)\exp\left(\lambda\int\limits_a^x\Phi_1(\xi)\,d\xi\right)\Big(E+\mathcal{E}(x,\lambda)\Big),$$

где $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)\exp\left(\int\limits_a^x \Phi_0(\xi)d\xi\right)$, $\mathcal{E}(\cdot,\lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[a,b]$ *и справедлива оценка*

$$|||\mathcal{E}(\cdot,\lambda)|||_\infty \leqslant C\biggl(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\biggr),$$

в которой

$$\delta(\lambda) := \max_{i\neq j}\left\{\left\|\int\limits_{l(i,j)}^{x} \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\bigl\{B_0(t)\bigr\}_{ij}\,dt\right\|_\infty\right\},$$

при этом $\delta(\lambda) \to 0$, *когда* $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$. *Если наряду с условиями* $\mathbf{1}^\circ) - \mathbf{3}^\circ)$ *выполняется условие* $\mathbf{4}^\circ)$, *то решение* $Y(x,\lambda)$ *является аналитической в* $\mathfrak{W}_1^1[a,b]$ *м.-ф. при* $|\lambda| \gg 1$, $\lambda \in \Omega$.

Во **второй главе** рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор L, определяемый д.в.

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1], \tag{13}$$

где $p_j(x) \in L_1[0,1]$, $j = \overline{1,n}$, с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1}\bigl(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\bigr) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{14}$$

На протяжении второй главы выполняется основное предположение: краевые условия (14) регулярны по Биркгофу (определение регулярных краевых условий совершенно идентично определению в [135, с. 66–67]).

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный или модифицированный тригонометрический ряд Фурье (см. формулы (15) далее), а также об оценке разности частичных сумм. Модификация тригонометрического ряда заключается в применении к обычному тригонометрическому ряду Фурье вполне конкретного ограниченного оператора V, выражающегося через коэффициент $p_1(x)$, а к разлагаемой функции оператора V^{-1}.

Введём следующие модули непрерывности

$$\omega(f,\delta)_p = \sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int\limits_0^{1-h}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \quad \text{в случае } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\omega(f,\delta)_\infty = \sup_{0<h\leqslant\delta}\ \sup_{t\in[0,1-h]}\bigl|f(t+h)-f(t)\bigr|.$$

Под $L_\infty[0,1]$ понимается пространство $C[0,1]$.

Наряду с оператором L вида (13)–(14) рассматривается дифференциальный оператор L_0:

$$\ell_0(y) := y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

порожденный простейшим д.в. и периодическими краевыми условиями

Числа $\lambda_{0\nu} := (2\nu\pi i)^n$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, есть с.з. оператора L_0, а функции $e_\nu(x) := \exp(2\nu\pi i x)$ есть соответствующие собственные функции (с.ф.), т. е. система с.ф. есть обычная тригонометрическая система в экспоненциальной форме. Пусть λ_ν, $\nu = 0,1,2,\ldots$, есть с.з. оператора L.

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ в результате удаления множеств $\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\delta(\lambda_\nu)$ и $\bigcup\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} K_\delta(\lambda_{0\nu})$, где используется обозначение $K_\delta(c) = \{\lambda : |\lambda - c| < \delta\}$ и $\delta > 0$ достаточно мало.

Из асимптотики с.з. оператора L следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с $m \gg 1$, лежат в области D_δ и между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0, соответственно, а через $G(x,\xi,\lambda)$ и $G_0(x,\xi,\lambda)$ — соответствующие функции Грина.

Пусть

$$S_m(f,x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_\lambda f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi\, d\lambda,$$

$$\sigma_m(f,x) \equiv S_{0m}(f,x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^1 G_0(x,\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi\, d\lambda.$$

Известно [135, с. 92], что $S_m(f,x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν, для которых $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора L_0, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$, для которых $|\nu| \leqslant m$, т. е. частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$:

$$\sigma_m(f,x) := \sum_{k=-m}^{m} (f,e_k)e_k(x), \quad \text{где} \quad (f,e_k) := \int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0,1]$ обозначим

$$\Phi_m(x) = S_m(f,x) - V\sigma_m(V^{-1}f,x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f,x) - \sigma_m(f,x), \tag{15}$$

где $V(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{n}\int\limits_0^x p_1(\tau)\, d\tau\right)$.

Введём условие

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad p_1(x) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{16}$$

Справедлива следующая теорема об оценке разности $\Phi_m(x)$.

Теорема 2.1. *При условии* (16) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и натурального* $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,L,K)A_m, \tag{17}$$

где

$$A_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m\, \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m}\right) \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}.$$

Для формулировки теоремы об оценке разности $\Psi_m(x)$ введём следующие обозначения:

— для функции $h(x) \in C[0,1]$ положим

$$H_q(h,m) := \left(\int\limits_{1/m}^1 \frac{1}{\xi}\, h^q(\xi)\, d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant q < \infty, \quad H_\infty(h,m) := 1, \tag{18}$$

— для функции $g(x) \in L_q[0,1]$ положим

$$\theta_q(g,\delta) := \sup_{\tau\in[0,\delta]} \theta_{1q}(g,\tau) \text{ при } 1 \leqslant q < \infty \text{ и } \theta_\infty(g,\delta) \equiv 1, \tag{19}$$

где

$$\theta_{1q}(g,\tau) := \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\Big(g,\frac{1}{k}\Big)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant q < \infty, \tag{20}$$

$$\hat{\theta}_q(g,\delta) = \sup_{\tau\in[0,\delta]} \hat{\theta}_{1q}(g,\tau) \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty \ \text{ и } \ \hat{\theta}_\infty(g,\delta) \equiv 1,$$

где

$$\hat{\theta}_{1q}(g,\tau) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\Big(g,\frac{1}{k}\Big)_q + \frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(g,\frac{1}{k}\right) + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{при} \quad 1 \leqslant q < \infty.$$

Теорема 2.2. *При условии* (16) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и любого натурального* $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,L,K)B_m, \tag{21}$$

где

$$B_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m\, \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + 1 + H_q\big(\hat{\theta}_q(p_1,\cdot),m\big) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2\ln m}{m} \right) \times \right.$$
$$\left. \times\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r + \left(1+\frac{k^2\ln m}{m}\right)\omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4\ln m}{m} \right\}.$$

Далее рассматривается случай, когда функции $\omega(f,\delta)_r$ и $\omega(p_1,\delta)_q$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. Такие функции были введены Й. Караматой [17] в 1930 году.

В соответствии с [185, с. 10] положительная непрерывная в проколотой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого} \quad \gamma > 0,$$

называется *правильно меняющейся функцией* (п.м.ф.) в нуле порядка $\rho \in \mathbb{R}$. При $\rho = 0$ п.м.ф. называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле.

Предположим, что

$$\omega(f,\delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1,\delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \to +0, \tag{22}$$

где функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2.6 (медленного изменения (МИ)). Существует интервал $(0,\varepsilon_0)$, на котором (а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;

(б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией и обладает свойством $\Omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$;

(в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \to +0$, т. е. существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1\Omega(\delta) \leqslant \Omega(\delta^\gamma) \leqslant C_2\Omega(\delta).$$

Теорема 2.9. *Если выполняются условия* (16), (22), *функции* $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ *удовлетворяют условию МИ* 2.6 *и таковы, что*

$$\ln m\, \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty, \tag{23}$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0, \tag{24}$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K) \left(\ln\, \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Теорема 2.10. *Пусть выполняются условия* (16), (22), *а функции* $\Omega_1(\delta)$ *и* $\Omega_2(\delta)$ *удовлетворяют условию МИ* 2.6. *Если, к тому же, выполняются условия* (23) *и*

$$\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2,m) \to \infty \quad \textit{при} \quad m \to \infty,$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0, \tag{25}$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K) \left(\ln m\, \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \right.$$
$$\left. + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2,m) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Следствиями теорем 2.9 и 2.10 являются результаты для случая

$$\omega(f,\delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega\big(p_1,\delta\big)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right), \quad \delta \to +0. \tag{26}$$

Теорема 2.11. *Если выполняются условия* (16), (26) *и* $\alpha + \beta > 1$, *то для любого компакта* $K \subset (0{,}1)$ *имеет место равносходимость* (24), *и справедливы следующие оценки при* $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right).$$

Теорема 2.12. *Если выполняются условия* (16), (26) *и* $\alpha+\beta > 1$, *то для любого компакта* $K \subset (0{,}1)$ *имеет место равносходимость* (25) *и справедливы следующие оценки при* $m \gg 1$:
— *в случае* $\beta q = 1$ *и* $1 \leqslant q < \infty$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{\left(\ln\ln m\right)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right), \qquad (27)$$

— *а в остальных случаях* ($\beta q \neq 1$ *и* $1 \leqslant q < \infty$ *или* $q = \infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right). \qquad (28)$$

Точность теорем 2.11 и 2.12 показана автором диссертации в [144].

Оценки для $\Psi_m(x)$ в теоремах 2.2 и 2.10 получаются из оценок для $\Phi_m(x)$ в теоремах 2.1 и 2.9 с использованием соответствующих аналогов теоремы Г. Штейнгауза [50]. Дадим формулировку этой теоремы по книге [57, с. 111].

Теорема 2.26. (Г. Штейнгауза) *Если* $f(x) \in L_1[0{,}1]$, $\mathcal{W}(x)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* 1 *на* $[0{,}1]$ *и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{s\to\infty} \|\mathcal{W}(x)\sigma_m(f,x) - \sigma_m(\mathcal{W}f,x)\|_{C[0,1]} = 0. \qquad (29)$$

В работах автора диссертации [142; 144] равносходимость вида (29), но в метрике пространства $C(K)$ для любого компакта $K \subset (0{,}1)$ была установлена при других условиях на функции $f(x)$ и $\mathcal{W}(x)$ первоначально в частном случае, а затем — в самом общем случае [148]. Подробно эти результаты изложены в [167], а в более раннем варианте — в совместной статье с С. Н. Кабановым [91] (аналоги теоремы Штейнгауза полностью получены автором диссертации).

Аналоги теоремы Штейнгауза получали и другие математики, в частности, М. Ш. Бурлуцкая и А. П. Хромов [59] — для функционально-дифференциальных операторов.

Для формулировки аналога теоремы Штейнгауза обозначим

$$\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f,x) - \sigma_m(\mathcal{W}f,x).$$

Функцию $\Theta_m(x)$ назовём разностью частичных тригонометрических сумм.

Для функции $\mathcal{W}(x)$ используем представление

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_0 + \int\limits_0^x g(\xi)\,d\xi, \quad \mathcal{W}_0 = \mathrm{const}\,. \tag{30}$$

Введём условие:

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad g(x) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{31}$$

Справедлива следующая общая теорема об оценке.

Теорема 2.28. *Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид* (30), *а функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию* (31). *Тогда для любого компакта $K \subset (0,1)$ и любого натурального $m \gg 1$ имеет место оценка*

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K)Q_m,$$

где

$$Q_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) + \omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}.$$

Предположим, что выполняются оценки

$$\omega(f,\delta)_r = O\big(v(\delta)\big), \quad \omega\big(g,\delta\big)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \to +0, \tag{32}$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ удовлетворяют условию МИ 2.6.

Справедлив следующий аналог теоремы Штейнгауза.

Теорема 2.32. *Пусть функция $\mathcal{W}(x)$ имеет вид* (30), *выполняются условия* (31) *и* (32). *Тогда, если*

$$v\Big(\frac{1}{m}\Big)H_q(w,m) \to 0 \;\; \textit{при} \;\; m \to \infty, \tag{33}$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0. \tag{34}$$

При этом справедлива следующая оценка при $m \gg 1$

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w,m) + w\left(\frac{1}{m}\right)\right). \tag{35}$$

Следствием теоремы 2.32 является аналог теоремы Штейнгауза (теорема 2.37) в случае оценки модулей непрерывности логарифмическими функциями.

В работах автора диссертации [144; 167] была показана точность полученного в теореме 2.37, а следовательно, и в 2.32 результатов.

В **третьей главе** рассматривается полиномиальная о.-ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$, порожденная д.в. (7) и краевыми условиями (8), которые, не нарушая общности, можно считать нормированными (в смысле определения из [207]), т. е. имеющими вид

$$U_i(y,\lambda) \equiv U_{i0}(y,\lambda) + U_{i1}(y,\lambda) :=$$
$$:= \sum_{j+s \leqslant \varkappa_i} \lambda^s (\alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \beta_{ijs} y^{(j)}(1)) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (36)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i$ есть порядок i-го краевого условия ($\varkappa_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), $\varkappa := \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$ есть суммарный порядок краевых условий (36).

Исследуется вопрос об m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноте в $L_2[0,1]$ к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ вида (7), (36) в ранее не исследованных случаях.

В разделе 3.1 вводятся обозначения и даются необходимые определения, в частности, известные определения с.з., к.ф., производных по Келдышу n- и m-цепочек ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) из [92; 93; 135; 207].

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. $L(\lambda)$. Предполагается, что множество Λ счетное.

В разделе 3.2 дается классификация о.-ф. $L(\lambda)$ по степени усиления их нерегулярности по аналогии с [207].

Рассмотрим уравнение $\ell(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения (характеристики) попарно различны и отличны от нуля. Система функций

$$y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}, \quad (37)$$

является ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$.

В [207] классификация о.-ф. была дана для самых общих о.-ф., коэффициенты д.в. которых могут зависеть от x. Для проведения этой классификации требуется накладывать дополнительные условия гладкости на коэффициенты о.-ф., чтобы получить достаточное число членов уточнённой асимптотики ф.с.р. по спектральному параметру, и это уточнение продолжается неограниченно.

В случае д.в. (7) ф.с.р. имеет самый простой вид (37), классификация сильно упрощается и становится конечной в отличие от классификации в [207].

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j=\overline{1,n}$

$$\hat{U}_j(\lambda):=\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}}U_1(y_j),\dots,\frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}}U_n(y_j,\lambda)\right)^T,$$

$$\hat{V}_j(\lambda):=\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}}U_{10}(y_j,\lambda),\dots,\frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}}U_{n0}(y_j,\lambda)\right)^T,$$

$$\hat{W}_j(\lambda):=e^{-\lambda\omega_j}\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}}U_{11}(y_j,\lambda),\dots,\frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}}U_{n1}(y_j,\lambda)\right)^T.$$

Таким образом, $\hat{U}_j(\lambda)=\hat{V}_j(\lambda)+e^{\lambda\omega_j}\hat{W}_j(\lambda)$.

При необходимости аргумент λ у функций и в.-ф. будем опускать в тех случаях, когда это не мешает пониманию формул.

С использованием этих обозначений х.о. для $L(\lambda)$ можно записать в виде

$$\Delta(\lambda)=\det\left(U_i(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n=\lambda^{\varkappa}\left|\hat{U}_1(\lambda),\hat{U}_2(\lambda),\dots,\hat{U}_n(\lambda)\right|=$$
$$=\lambda^{\varkappa}\left|\hat{V}_1(\lambda)+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1(\lambda),\hat{V}_2(\lambda)+e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2(\lambda),\dots,\hat{V}_n(\lambda)+e^{\lambda\omega_n}\hat{W}_n(\lambda)\right|.$$

Отличные от нуля с.з. $L(\lambda)$ есть нули $\Delta(\lambda)$.

Обозначим через Ω множество, содержащее 0 и всевозможные суммы различных ω_j, $j=\overline{1,n}$, состоящие из 1, 2, …, n слагаемых, то есть множество Ω содержит точки $0,\omega_k,\omega_i+\omega_j$ $(i\neq j)$, $\omega_i+\omega_j+\omega_k$ $(i\neq j\neq k),\dots,\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_n$. Совпадающие точки $\omega\in\Omega$, полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω.

Справедливо представление

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\varkappa}\sum_{\omega\in\Omega}F^{\omega}(\lambda)e^{\lambda\omega},\quad F^{\omega}(\lambda)=F_0^{\omega}+\frac{1}{\lambda}F_1^{\omega}+\dots+\frac{1}{\lambda^{\varkappa}}F_{\varkappa}^{\omega}. \tag{38}$$

В этом представлении для $\omega=\omega_{j_1}+\omega_{j_2}+\dots+\omega_{j_k}$ имеет место равенство $F^{\omega}(\lambda)=\left|\hat{V}_1,\dots,\hat{V}_{j_1-1},\hat{W}_{j_1},\hat{V}_{j_1+1},\dots,\hat{V}_{j_k-1},\hat{W}_{j_k},\hat{V}_{j_k+1},\dots,\hat{V}_n\right|$.

Положим $M=\operatorname{conv}\{\Omega\}$ (может случиться, что M — отрезок).

Введем обозначение $[\eta(x,\lambda)]_r=\eta_0(x)+\dfrac{\eta_1(x)}{\lambda}+\ldots+\dfrac{\eta_r(x)}{\lambda^r}$ при значениях $r\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ для функции $\eta(x,\lambda)=\eta_0(x)+\dfrac{\eta_1(x)}{\lambda}+\ldots+\dfrac{\eta_r(x)}{\lambda^r}+\dfrac{\eta_r(x)}{\lambda^{r+1}}+\ldots$

Для $r\in\{0,1,\dots,\varkappa\}$ через $(M_\Delta)_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω, для которых $[F^{\omega}(\lambda)]_r\not\equiv 0$. Справедливы включения

$$(M_\Delta)_0\subset(M_\Delta)_1\subset\ldots\subset(M_\Delta)_{\varkappa}\subset M.$$

Аналогично [207] дадим следующие определения.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *регулярной* (по Биркгофу), если $(M_\Delta)_0 = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *почти регулярной* (по Стоуну), если $(M_\Delta)_\varkappa = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *слабо нерегулярной* (или *нормальной* в терминологии [207]), если многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам M, на которых лежат точки касания, разбивают комплексную плоскость на углы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то о.-ф. $L(\lambda)$ называем *слабо нерегулярной*, когда $(M_\Delta)_\varkappa = M$.

О.-ф. $L(\lambda)$, которая не удовлетворяет предыдущему определению, назовём *сильно нерегулярной*.

Таким образом, о.-ф. $L(\lambda)$ сильно нерегулярна, если ее резольвента имеет экспоненциальный рост в λ-плоскости не менее, чем в полуплоскости.

Многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ кратко обозначим M_Δ и назовём его характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$. Из представления (38) видно, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), т. е. первого порядка и нормального типа. Х.м. M_Δ есть в точности сопряженная диаграмма (с.д.) $\bar{I}_\Delta$ функции $\Delta(\lambda)$ в соответствии с [109, с. 113–117] (необходимые сведения приводятся в приложении А).

Класс слабо нерегулярных о.-ф. $L(\lambda)$ был введен А. А. Шкаликовым [207] и исследован с точки зрения n-кратной полноты к.ф. в специально построенных гильбертовых пространствах и, в частности, в пространстве $L_2[0,1]$. Этот класс о.-ф. существенно шире первых двух классов (регулярных и почти регулярных). Из результатов [207] следует, что если о.-ф. $L(\lambda)$ из этого класса, то система её к.ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Исследование кратной полноты для о.-ф. из класса сильно нерегулярных о.-ф. представляет наибольшую трудность и проведено лишь для отдельных множеств о.-ф. $L(\lambda)$.

В разделе 3.3 предлагается новый подход к исследованию кратной полноты системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, использующий понятие порождающей функции (п.ф.), а именно, метод *обобщённых п.ф.*

Функцию $\mathrm{g}(x,\lambda)$, $x \in [0,1]$, $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$, назовём *порождающей* для системы к.ф. $L(\lambda)$, если функции $\left.\dfrac{\partial^k \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial \lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_\nu}$, где $k \in \overline{\tau_\nu,s_\nu}$, $0 \leqslant \tau_\nu \leqslant s_\nu$ и $\lambda_\nu \in \Lambda$, являются к.ф. $L(\lambda)$, соответствующими с.з. λ_ν кратности $s_\nu+1$; τ_ν определяется условием $\left.\dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^k \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=\lambda_\nu} \equiv 0, \quad k=\overline{0,\tau_\nu-1}, \quad \left.\dfrac{1}{\tau_\nu!}\dfrac{\partial^{\tau_\nu}\mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^{\tau_\nu}}\right|_{\lambda=\lambda_\nu} \not\equiv 0.$

Рассматривается только случай $D=\mathbb{C}$ и п.ф. есть решения уравнения $\ell(y,\lambda)=0$. В этом случае п.ф. являются ц.ф.э.т. по λ. Тогда в соответствии с [109, с. 113–117] для каждого фиксированного $x\in[0,1]$ можно построить сопряжённую диаграмму $M_{\mathrm{g}(x,\lambda)} := \bar{I}_{\mathrm{g}(x,\lambda)}$, которая является многоугольником.

Многоугольник

$$M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)} := \operatorname{conv}_{x\in[0,1]} M_{\mathrm{g}(x,\lambda)}, \tag{39}$$

назовём *характеристическим многоугольником* п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$.

Будем говорить, что п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$ *удовлетворяет условию* (α) (обозначаем $\mathrm{g}(x,\lambda)\in(\alpha)$), если M_Δ имеет не менее двух точек касания с $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$, на которых лежат точки касания M_Δ, разбивают комплексную плоскость на секторы раствора меньше π.

В основе стандартной схемы доказательства кратной полноты (сокращённо: схема ДКП) лежит следующая лемма.

Лемма 3.14. *Если* $\mathrm{g}(x,\lambda)\in(\alpha)$ *и* $h(x)=(h_1(x),h_2(x),\ldots,h_m(x))^T$ *ортогональна всем производным* m*-цепочкам, соответствующим системе к.ф.* Y*, то при дополнительном условии ортогональности* $h(x)$ *некоторому конечному набору в.-ф. справедливо равенство*

$$H_m(\mathrm{g},\lambda)\equiv 0,$$

где

$$H_m(\mathrm{g},\lambda) := \int\limits_0^1 \mathrm{g}(x,\lambda)\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx, \quad \mathrm{h}_m(x,\lambda) := \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\bar{h}_j(x).$$

Схема ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ предполагает наличие некоторого набора п.ф. $\mathrm{g}_i(x,\lambda)$, $i=\overline{1,r}$, удовлетворяющих условию (α). Тогда на основании леммы 3.14 получим

$$H_m(\mathrm{g}_i,\lambda)\equiv 0, \quad i=\overline{1,r}, \tag{40}$$

при условии ортогональности в.-ф. $h(x)$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф.

Если набор п.ф. достаточен для того, чтобы из (40) получить соотношения

$$h_1(x) = h_2(x) = \ldots = h_m(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in [0,1], \tag{41}$$

то это означает, что имеет место m-кратная полнота к.ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Существенным условием описанной схемы ДКП системы к.ф. является наличие достаточного количества п.ф. $g_i(x) \in (\alpha)$.

При исследовании спектральных свойств дифференциальных о.-ф. обычно используются [60; 62; 135; 205; 206] п.ф. $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, которые получаются из х.о. $\Delta(\lambda) = \det\{U_j(y_k(x,\lambda),\lambda)\}_{j,k=1}^n$ путем замены i-й строки определителя строкой $(y_1(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda))$, где $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ в расматриваемом случае есть система решений (37).

Такие п.ф. будем называть *классическими* п.ф. (или, кратко, к.п.ф.). Они являются ц.ф.э.т. по λ.

Классические п.ф. удачно применялись при рассмотрении о.-ф. $L(\lambda)$ с распадающимися или полураспадающимися краевыми условиями при некоторых дополнительных предположениях на характеристики [60; 62; 205; 206].

Проведение описанной схемы ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ сильно усложняется или вообще не проходит, если либо $g_i(x),\lambda) \notin (\alpha)$ для всех $i = \overline{1,n}$, либо из набора соотношений (40) проблематично вывести равенства (41). Следуя описанной схеме, в этих ситуациях не удается получить m-кратную полноту к.ф. в $L_2[0,1]$.

Чтобы расширить возможности описанной схемы ДКП системы к.ф., автор диссертации предложил [35; 37; 38; 166] использовать обобщённые п.ф. (или, кратко, о.п.ф.) вида

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \gamma_1(\lambda)g_1(x,\lambda) + \gamma_2(\lambda)g_2(x,\lambda) \cdots + \gamma_n(\lambda)g_n(x,\lambda), \tag{42}$$

где $\Gamma(\lambda) = \big(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\ldots,\gamma_n(\lambda)\big)^T \not\equiv (0,0,\ldots,0)^T$ есть вектор-параметр (в.-п.). Обозначим

$$\hat{\Gamma}(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}}\gamma_1(\lambda), \ldots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}}\gamma_n(\lambda)\right)^T.$$

Так как $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и эти функции линейно независимы, то о.п.ф. (42) включают в себя все п.ф., являющиеся решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.

Для о.п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ удобно использовать следующее представление

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \lambda^{\varkappa} \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ -\hat{\Gamma}(\lambda) & \hat{U}_1(\lambda) & \ldots & \hat{U}_n(\lambda) \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Обозначим через Ω_k подмножество тех точек из Ω, которые представляются в виде $\omega_k + \ldots$, т. е. содержат в качестве слагаемого число ω_j. Через Ω^k обозначим множество $\Omega \setminus \Omega_k$.

Считаем далее, что $\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j\varkappa_j}\lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j,\varkappa_j-1}\lambda^{\varkappa_j-1} + \ldots + \gamma_{j0}$, $j = \overline{1,n}$.

Справедливо представление

$$g(x,\lambda,\Gamma) = \lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n} y_k(x,\lambda)\left|\hat{U}_1, \ldots, \hat{U}_{k-1}, \hat{\Gamma}, \hat{U}_{k+1}, \ldots, \hat{U}_n\right| = \lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda\omega_k x}\times$$
$$\times\left|\ldots,\hat{V}_{k-1} + e^{\lambda\omega_{k-1}}\hat{W}_{k-1},\hat{\Gamma},\hat{V}_{k+1} + e^{\lambda\omega_{k+1}}\hat{W}_{k+1}, \ldots\right| =$$
$$\lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\omega\in\Omega^k} \mathrm{G}_k^{\omega}(\lambda)e^{\lambda(\omega_k x+\omega)}, \quad (44)$$

где определители $\mathrm{G}_k^{\omega}(\lambda)$ составлены из столбцов $\hat{V}_j$, $\hat{W}_j$, $\hat{\Gamma}$ и ограничены по λ.

Таким образом, п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т. по λ. Для такой функции уже был ранее введен х.м. Так как для фиксированной о.-.ф. $L(\lambda)$ вид этого многоугольника определяется лишь в.-п. $\Gamma(\lambda)$, то х.м. обобщённой п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ будем называть также х.м. вектор-параметра $\Gamma(\lambda)$ и обозначать $M(\Gamma(\lambda))$ или просто $M(\Gamma)$.

Будем говорить также, что $\Gamma(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (α) и писать $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, если о.п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) \in (\alpha)$.

Таким образом, из схемы ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ следует, что если $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то при условии ортогональности в.-ф. $h(x)$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф. из $L_2[0,1]$, на основании леммы 3.14 получим тождество $H_m(g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)),\lambda) \equiv 0$.

В разделе 3.4 доказываются достаточные условия кратной полноты системы к.ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Теорема 3.21. *Если существуют n линейно независимых в.-п. $\Gamma_1(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)$, …, $\Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$, то система к.ф. $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с нулевым дефектом в случае $\varkappa_i \leqslant n-1$, $i = \overline{1,n}$, и с возможным конечным дефектом в противном случае.*

В случае $\Gamma(\lambda) = V_j(\lambda)$ или $\Gamma(\lambda) = W_j(\lambda)$ в формуле (44) для о.п.ф. очень много экспонент зануляется, ввиду обращения в нуль соответствующих коэффициентов из-за наличия в определяющих их определителях одинаковых столбцов. Поэтому при поиске в.-п. $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$ для о.п.ф. естественными кандидатами являются именно векторы $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$

При проверке условия (α) для в.-п. $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$ удобно пользоваться довольно простыми достаточными условиями, даваемыми следующими двумя леммами.

Лемма 3.22. *Справедливы включения* $M(V_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_j\}$, $j = \overline{1,n}$.

Лемма 3.23. *Справедливы включения* $M(W_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega^j\}$, $j = \overline{1,n}$.

Специфическая структура функции $g(x,\lambda,\Gamma(x))$, определяемая формулой (43), позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.25. *Если существуют* m *пар векторов* $\{V_{j_s}, W_{j_s}\}$, $s = \overline{1,m}$, *таких, что* V_{j_s}, $W_{j_s} \in (\alpha)$, *то имеет место* m*-кратная полнота в* $L_2[0,1]$ *системы к.ф.* $L(\lambda)$ *с возможным конечным дефектом.*

В разделе 3.5 рассмотрены три конкретных примера сильно нерегулярных о.-ф. третьего порядка вида (7), (36) идентичной структуры, но с различным расположением характеристик. В результате исследования кратной полноты в $L_2[0,1]$ с помощью о.п.ф. с использованием теорем 3.21 и 3.25 и лемм 3.22 и 3.23 удалось установить, что кратность полноты у этих о.-ф. различна, а именно, имеет место 1-, 2- и 3-кратная полнота с возможным конечным дефектом.

В разделе 3.6 рассматривается о.-ф. $L^1(\lambda)$, порожденная д.в. $\ell(y,\lambda)$ вида (7) и распадающимися краевыми условиями

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i = \overline{1,l}, \quad \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i = \overline{l+1,n},$$

где α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Предполагается, что характеристики ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала, (или на одном луче) в количествах k и $n-k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Не нарушая общности можно считать, что корни ω_j расположены следующим образом

$$\omega_n e^{i(\pi-\varphi)} < \omega_{n-1} e^{i(\pi-\varphi)} < \cdots < \omega_{k+1} e^{i(\pi-\varphi)} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k, \qquad (45)$$

где $0 < |\varphi| < \pi$. В случае $k = n$ считаем, что $\varphi = 0$.

Решается задача о нахождении условий на параметры о.-ф. $L^1(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота $(1 \leqslant m \leqslant n)$ системы её к.ф. в $L_2[0,1]$.

Найдены условия на параметры n, l и k, при которых реализуется схема ДКП системы к.ф. $L^1(\lambda)$ с использованием только к.п.ф.

Обозначим $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[p,q]_+ = \max\{p,q\}$. Положим при $j = \overline{1,n}$ $a_{ij} := \sum\limits_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu$, $i = \overline{1,l}$; $b_{ij} := \sum\limits_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu$, $i = \overline{l+1,n}$.

Введём следующие условия

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \qquad \text{при } n-k \leqslant l; \tag{46}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \qquad \text{при } n-k \geqslant l; \tag{47}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0 \qquad \text{при } k \leqslant l; \tag{48}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \qquad \text{при } k \geqslant l. \tag{49}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.26. *Если $[k,n-k]_+ \leqslant l$ и выполняются условия* (46) *и* (48), *то при $m = 2(n-l)$ система к.ф. $L^1(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Теорема 3.27. *Если $[k,n-k]_- \geqslant l$ и выполняются условия* (47) *и* (49), *то при $m = 2l$ система к.ф. $L^1(\lambda)$ m-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l} [m-1-\varkappa_i]_+$.*

Доказательство этих теорем проводится в соответствии с приведенной в разделе 3.3 схемой ДКП с использованием к.п.ф.

В случае $[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+$, который исключен из рассмотрения в теоремах 3.26 и 3.27, использование к.п.ф. не приводит к результату, так как, вообще говоря, к.п.ф. не удовлетворяют условию (α). В этом случае найдены о.п.ф., удовлетворяющие условию (α), что позволило реализовать схему ДКП и получить условия кратной полноты к.ф. $L^1(\lambda)$.

Из (45)) следует, что многоугольник M есть четырехугольник $A'B'C'D'$, где $A' = 0$ и $B' = \omega_1 + \dots + \omega_k$ — крайние левая и правая точки, лежащие на вещественной оси, $C' = \omega_1 + \dots + \omega_n$ и $D' = \omega_{k+1} + \dots + \omega_n$, причем прямая $C'D'$ параллельна вещественной прямой, т. е. M есть параллелограмм.

В случае $k \geqslant n-k$ называем стороны $A'B'$ и $D'C'$ «длинными» сторонами $A'B'C'D'$. Стороны $A'D'$ и $B'C'$ в таком случае будем называть «короткими». В случае $k \leqslant n-k$ «длинными» сторонами, наоборот, будем называть стороны $A'D'$ и $B'C'$, а «короткими» — стороны $A'B'$ и $A'D'$.

Введём многоугольник M_{n-l}, который является выпуклой оболочкой всевозможных точек множества Ω, являющихся суммами различных характеристик в количестве ровно $n-l$ штук.

Вершины многоугольника M_{n-l}, лежащие на «длинных» сторонах параллелограмма, будем называть *главными вершинами*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.29. *Если $[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+$, $m = [k,n-k]_-$ и х.м. M_Δ о.-ф. $L^1(\lambda)$ содержит главные вершины многоугольника M_{n-l}, то система его к.ф. m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

В разделе 3.7 рассматривается дифференциальный оператор L^0 пятого порядка в $L_2[0,1]$ вида

$$\ell^0(y) := y^{(5)}(x), \quad U^0_\nu(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0,\ \nu = \overline{1,5},$$

где $\alpha_\nu,\ \beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0,\ \nu = \overline{1,5}$.

Исследуется вопрос о полноте системы к.ф. этого оператора в $L_2[0,1]$.

Интерес к данному оператору вызван тем, что при соответствующем выборе коэффициентов α_ν и β_ν краевых условий этот оператор может быть и регулярным по Биркгофу и слабо или сильно нерегулярным.

Основной теоремой раздела 3.7 является следующая теорема.

Теорема 3.49. *Предположим, что или $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$, или $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$. Тогда либо система к.ф. L^0 полна в пространстве $L_2[0,1]$, либо этот оператор вырожден, то есть, или не имеет вообще с.з., или имеет конечное число с.з., или все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.*

Утверждение теоремы 3.49 есть следствие теоремы 3.50 о кратной полноте в $L_2[0,1]$ системы к.ф. тесно связанной с оператором L^0 оператор-функции $L^0(\rho) := L^0 + \rho^5 E$, где $\lambda = -\rho^5$, порожденной д.в.

$$\ell^0(y,\rho) := y^{(5)}(x) + \rho^5 y, \quad x \in [0,1],$$

и теми же самыми краевыми условиями, что и в случае оператора L^0.

Доказательство теоремы 3.50 проводится в соответствии со схемой ДКП с существенным использованием нетривиально построенных обобщенных п.ф. и теории, изложенной в разделах 3.2, 3.3 и 3.4.

Случай дифференциального оператора L^0 произвольного нечетного порядка $n \geqslant 7$ также исследован автором диссертации и опубликован в [41]. Но главные трудности общего случая возникают уже при $n = 5$.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору Августу Петровичу Хромову за полезные обсуждения содержания диссертации, постоянную поддержку и ценные советы.

Глава 1. Асимптотика решений линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с параметром

Основными объектами, рассматриваемыми в данной главе являются:

— обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка общего вида на конечном отрезке $[a,b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x), \tag{1.1}$$

где $a_j(x) \in L_1[a,b]$, $j = \overline{1,n}$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на $[a,b]$,

— система дифференциальных уравнений 1-го порядка на отрезке $[a,b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Y'(x) - A(x,\lambda)Y(x) = 0, \tag{1.2}$$

где $A(x,\lambda)$ и $Y(x)$ есть $n \times n$ матрицы-функции (м.-ф.),

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda),$$

компоненты матрицы $A_1(x)$ абсолютно непрерывны, компоненты матрицы $A_0(x)$ суммируемы, нормы компонент матрицы $A_{-1}(x,\lambda)$ в пространстве $L_1[a,b]$ ограничены по λ при $|\lambda| \to \infty$.

Решается задача построения асимптотических формул по параметру λ экспоненциального типа для решений дифференциального уравнения (1.1) и дифференциальной системы (1.2) при $|\lambda| \to \infty$.

Краткая история вопроса изложена во Введении.

Данная глава состоит из двух разделов.

В первом разделе при больших значениях $|\lambda|$ исследуется уравнение (1.1) и при наименьших требованиях на коэффициенты уравнения доказывается теорема о существовании n линейно независимых решений этого уравнения с асимптотикой экспоненциального типа при $|\lambda| \to \infty$.

Во втором разделе при больших значениях $|\lambda|$ исследуется уравнение (1.2) и при минимальных требованиях на коэффициенты системы доказывается теорема о существовании фундаментальной матрицы решений (ф.м.р.) с асимптотикой экспоненциального типа при $|\lambda| \to \infty$. Как приложение этого результата во втором разделе при больших значениях $|\lambda|$ исследуется уравнение, аналогичное уравнению вида (1.1), но коэффициенты которого зависят от спектрального параметра λ. При наименьших требованиях на коэффициенты уравнения доказывается теорема о существовании n линейно независимых решений этого уравнения с асимптотикой экспоненциального типа при $|\lambda| \to \infty$.

1.1 Асимптотические формулы для решений линейного дифференциального уравнения общего вида с параметром

1.1.1 Предварительные сведения и формулировки основных теорем

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка общего вида на конечном отрезке $[a,b]$ с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\ell(y) := a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x) \qquad (1.3)$$

где $a_j(x) \in L_1[a,b]$, $j = \overline{1,n}$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в ноль на $[a,b]$.

Обозначим $\lambda = -\operatorname{sign}(a_0(x))\rho^n$ и введем в рассмотрение следующие угловые области (секторы) в комплексной ρ-плоскости

$$S_k = \left\{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\pi k}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{\pi(k+1)}{n}\right\}, \quad k = \overline{0,2n-1}.$$

Пусть S — некоторый сектор S_k, T_c — область, получающаяся из S сдвигом на число $-c$, а T — некоторая область T_c.

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ корни n-й степени из -1 (характеристики уравнения (1.3)), занумерованные для $\rho \in T_c$ таким образом, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_1 \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_n. \qquad (1.4)$$

Положим, для краткости, $\rho_j = \rho\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$.

Пусть $W_p^k[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть нормированное пространство гладких функций на отрезке $[a,b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k-ю производную из $L_p[a,b]$, с нормой

$$\|f(x)\|_{W_p^k[a,b]} := \|f(x)\|_{L_p[a,b]} + \|f^{(k)}(x)\|_{L_p[a,b]}.$$

Пространство $W_p^0[a,b]$ совпадает с $L_p[a,b]$. Для краткости, там, где это не вызовет разночтения, будем использовать обозначения $\|f(x)\|_p := \|f(x)\|_{L_p[a,b]}$, $\|f(x)\|_{pk} := \|f(x)\|_{W_p^k[a,b]}$. Через $\|f(x)\|$ будем обозначать норму в пространстве $C[a,b]$, то есть $\|f(x)\| := \|f(x)\|_{C[a,b]}$.

В случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_1(x) \equiv 0$ в [6; 51; 53] (см. также [135, с. 52–63]) было показано, что уравнение (1.3) в любой области T ρ-плоскости имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, $\ldots$, $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом, для которых справедливы следующие асимптотические формулы

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad k = \overline{1,n}, \quad m = \overline{0,n-1}. \tag{1.5}$$

В случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_1(x) \in W_1^{n-1}[a,b]$ в результате замены искомой функции

$$y = v(x)\hat{y}, \quad \text{где} \quad v(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x a_1(\tau)\,d\tau\right),$$

и деления обеих частей уравнения (1.3) на $v(x)$, для $\hat{y}$ получается [135, с. 53] дифференциальное уравнение с коэффициентами $\hat{a}_j(x)$, $j = \overline{0,n}$, причем $\hat{a}_0(x) \equiv 1$ и $\tilde{a}_1(x) \equiv 0$. Таким образом, вместо асимптотических формул (1.5) будем иметь формулы

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad k = \overline{1,n}, \quad m = \overline{0,n-1}. \tag{1.6}$$

В случае $a_0(x) \in W_1^n[a,b]$, $a_1(x) \in W_1^{n-1}[a,b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$ в результате замены независимой переменной

$$t = \eta(x) := \int\limits_a^x |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\,d\tau \in [0,h], \text{ где } h := \int\limits_a^b |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\,d\tau,$$

получается [135, с. 87–88] дифференциальное уравнение с коэффициентами $\hat{a}_j(t)$, $j = \overline{0,n}$, $t \in [0,h]$, причем, $\hat{a}_0(t) \equiv 1$ и $\hat{a}_1(t) \in W_1^{n-1}[0,h]$.

Таким образом, в этом случае существует ф.с.р. с асимптотикой

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^m |a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} w(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{1.7}$$

где

$$w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau \right).$$

В случае $a_0(x) \notin W_1^n[a,b]$ или $a_1(x) \notin W_1^{n-1}[a,b]$ ситуация усложняется. В работах [6; 53; 54; 140; 187] были рассмотрены более общие дифференциальные уравнения. Если полученные там результаты применить к уравнению (1.3), то найдём, что при условии $a_0(x) \in W_1^2[a,b]$, $a_1(x) \in W_1^1[a,b]$ и $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$ это уравнение в любой области T имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, ..., $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом, для которых справедливы асимптотические формулы (1.7).

Как показано в работах [34; 143; 144; 146; 175] автора диссертации, эти требования можно ослабить. А именно, было показано в итоге, что при предположении $a_0(x) \in W_1^1[a,b]$, $a_1(x) \in L_1[a,b]$ и по-прежнему $a_0(x) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$ также могут быть получены асимптотические формулы, аналогичные формулам (1.7), только вместо оценок $O\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ будут оценки вида $O\left(f(\rho)+\dfrac{1}{|\rho|}\right)$, где $|f(\rho)| \to 0$ при $|\rho| \to \infty$, причем стремление $|f(\rho)|$ к нулю зависит от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ и может быть сколь угодно медленным. Похожий результат при более сильных предположениях получил А. И. Вагабов [61].

Отметим, что случай, когда имеются точки на отрезке $[a,b]$, в которых коэффициент $a_0(x)$ обращается в нуль, здесь не рассматривается.

Сформулируем основные результаты, которые доказывается в данном разделе и которые опубликованы в статьях автора диссертации первоначально в [152], а затем в [34].

Теорема 1.1. *Предположим, что коэффициенты дифференциального уравнения* (1.3) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$a_0(x) \in W_1^1[a,b], \quad a_j(x) \in L_1[a,b], \quad j = \overline{1,n}; \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in [a,b].$$

Тогда во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение (1.3) *имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, ..., $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho| \gg 1$ и имеющих асимптотику при $\overline{1,n}$, $m = \overline{0,n-1}$*

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k\eta'(x))^m |a_0(x)|^{\frac{n-1}{2n}} w(x) e^{\rho\omega_k\eta(x)}\big(1 + O(\psi(\rho))\big), \tag{1.8}$$

где

$$\eta(x) := \int\limits_a^x |a_0(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\, d\tau,\ \ w(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\, d\tau\right),\ \ \psi(\rho) := \mathsf{f}(\rho) + \frac{1}{|\rho|}, \tag{1.9}$$

$$\mathsf{f}(\rho) := \max_{j\neq s}\left\{\left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt\right\|, \left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(\eta(x)-\eta(t))}\frac{a_0'(t)}{a_0(t)}\, dt\right\|\right\}, \tag{1.10}$$

c_{js} равно либо a, либо b в зависимости от условия $j < s$ или $j > s$. При этом $\mathsf{f}(\rho) \to 0$, когда $|\rho| \to \infty$.

Результат теоремы 1.1 получается как следствие соответствующего результата об асимптотике ф.с.р. для более общего, чем уравнение (1.3), квазидифференциального (к.д.) уравнения вида

$$y^{[n]}(x) = \lambda y(x), \tag{1.11}$$

на конечном отрезке $[a,b]$, где

$$\begin{gathered} y^{[k]}(x) := ip_{kk}(x)\frac{d}{dx}y^{[k-1]}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(x)y^{[j]}(x), \quad m = n, n-1, \dots, 1, \\ y^{[0]}(x) := y(x). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Обозначим*

$$r_m(x) := \prod_{s=1}^m p_{ss}(x), \quad m = \overline{1,n}, \quad r_0(x) := 1$$

и положим $\lambda = -\operatorname{sign}(r_n(x))(i\rho)^n$. Если коэффициенты к.д. уравнения (1.11) удовлетворяют следующим условиям

$$p_{mm}(x) \in W_1^1[a,b],\ p_{mj}(x) \in L_1[a,b],\ m = \overline{1,n},\ j = \overline{0,m-1},\ r_n(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b],$$

то во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение (1.11) имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, $\dots$, $y_n(x,\rho)$, регулярных по параметру $\rho \in T$ при $|\rho| \gg 1$ и имеющих асимптотику при $k = \overline{1,n}$ и $m = \overline{0,n-1}$

$$y_k^{[m]}(x,\rho) = r_m(x)\big(i\rho\omega_k\tilde{\eta}'(x)\big)^m q(x)\tilde{w}(x)e^{\rho\omega_k\tilde{\eta}(x)}\big(1 + O(\tilde{\psi}(\rho))\big), \tag{1.13}$$

где

$$q(x) := |r_n(x)|^{\frac{n-1}{2n}}\left(\prod_{\gamma=1}^{n-1}|p_{\gamma\gamma}(x)|^{\frac{n-\gamma}{n}}\right)^{-1}, \quad \tilde{\eta}(x) := \int_a^x |r_n(\xi)|^{-\frac{1}{n}}\,d\xi, \tag{1.14}$$

$$\tilde{w}(x) := \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{\gamma=1}^{n}\frac{p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)}{p_{\gamma\gamma}(\xi)}\,d\xi\right), \quad \tilde{\psi}(\rho) := \tilde{\mathsf{f}}(\rho) + \frac{1}{|\rho|}, \tag{1.15}$$

$$\tilde{\mathsf{f}}(\rho) := \max_{j\neq s}\max_{\gamma=\overline{1,n}}\left\{\left\|\int\limits_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\frac{p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)}{p_{\gamma\gamma}(\xi)}\,d\xi\right\|, \left\|\int\limits_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\frac{p'_{\gamma\gamma}(\xi)}{p_{\gamma\gamma}(\xi)}\,d\xi\right\|\right\}. \tag{1.16}$$

Здесь константы c_{js} *имеют тот же смысл, что и в теореме 1.1. При этом* $\tilde{\mathsf{f}}(\rho) \to 0$ *при* $|\rho| \to \infty$.

Замечание 1.3. К.д. уравнение (1.11), по-видимому, впервые было рассмотрено Д. Шином [203; 204]. Автор диссертации первоначально не знал об этих работах и ввёл два других типа квазипроизводных. Эти квазипроизводные определяются в статье [141] и, в частности, показывается, что они эквивалентны квазипроизводным Д. Шина.

Выражения, аналогичные (1.12), возникают естественным образом при рассмотрении сопряженного дифференциального уравнения к уравнению (1.3), когда коэффициенты $a_j(x)$ не являются достаточно гладкими [135, с. 180–183]. Отметим, что функция Грина $G(x,t,\lambda)$ краевой задачи, порожденной дифференциальным выражением $\ell(y)$ (см. (1.3)) с недостаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяет по переменной t к.д. уравнению, аналогичному уравнению (1.11) (см., например, [143; 144]). □

Замечание 1.4. Результаты настоящего раздела, даже в случае обыкновенного дифференциального уравнения (1.3) при недостаточной гладкости коэффициентов, получаются посредством его сведения к некоторому к.д. уравнению (1.11). Это хорошо видно при рассмотрении простейшего для изучаемой ситуации уравнения

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) = \lambda y(x), \quad a_1(x) \in L_1[a,b], \quad a_1(x) \notin W_1^1[a,b]. \tag{1.17}$$

Суть предлагаемого метода состоит в следующей замене искомой функции

$$y(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int_a^x a_1(\xi)\,d\xi\right)u(x). \tag{1.18}$$

Так как $a_1(x) \notin W_1^1[a,b]$, то эта замена сводит уравнение (1.17) к уравнению

$$u^{\lfloor n\rfloor} = \lambda u, \tag{1.19}$$

где

$$u^{\lfloor 0\rfloor}(x) := u(x), \quad u^{\lfloor k\rfloor}(x) := \frac{d}{dx}u^{\lfloor k-1\rfloor}(x) - \frac{1}{n}a_1(x)u^{[k-1]}(x), \quad k = \overline{1,n-1},$$
$$u^{\lfloor n\rfloor}(x) := \frac{d}{dx}u^{\lfloor n-1\rfloor}(x) + \frac{n-1}{n}a_1(x)u^{\lfloor n-1\rfloor}(x).$$

Отметим, что уже в случае $a_1(x) \notin W_1^{n-1}[a,b]$ уравнение (1.19) является к.д. уравнением, не сводящимся к обычному дифференциальному уравнению. При этом роль коэффициента при $n-1$-й производной играют коэффициенты

$$p_{m,m-1}(x) := -\frac{1}{n}a_1(x),\, m = \overline{1,n-1}, \quad p_{nn-1}(x) := \frac{n-1}{n}a_1(x).$$

Значение замены (1.18), которая сводит обычное дифференциальное уравнение (1.17) к более сложному на первый взгляд к.д. уравнению (1.19), состоит в следующем. Наличие негладкого коэффициента $a_1(x)$ при $(n-1)$-й производной в уравнении (1.17) не позволяет применить к этому уравнению метод [51] (см. также [135, с. 52–63]). В отличие от этого, применение указанного подхода к решению уравнения (1.19) позволяет получить требуемую асимптотику ф.с.р. Это происходит в силу того, что для уравнения (1.19) п.в. справедливо равенство $\sum_{m=1}^{n} p_{mm-1}(x) = 0$, хотя сами коэффициенты $p_{m,m-1}(x)$, как видно из их определения, имеют те же свойства в смысле гладкости, что и коэффициент $a_1(x)$. За счет этого равенства при применении к уравнению (1.19) метода [51] (см. также [135, с. 52–63]) те слагаемые, которые в соответствующей системе интегральных уравнений [135, с. 61] для уравнения (1.17) заведомо не стремились к нулю при $|\rho| \to \infty$ (именно из-за этого не проходило доказательство теоремы), в системе интегральных уравнений, соответствующей уравнению 1.19, обращаются в нуль. $\square$

Замечание 1.5. Первоначальным толчком к излагаемому в данном разделе подходу получения асимптотики ф.с.р. дифференциального уравнения (1.3) с недостаточно гладким коэффициентом при $n-1$-й производной послужила работа [201]. В этой работе рассматривалось уравнение (1.3) в случае $a_0(x) \equiv 1$ и $a_j(x) \in C[a,b]$ $(j = \overline{1,n})$ и для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ предлагалась замена искомой функции

$$y(x) = v_\varepsilon(x)\check{y}_\varepsilon(x), \quad v_\epsilon(x) := \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_a^x A_{1\epsilon}(\tau)\,d\tau\right), \tag{1.20}$$

где $A_{1\epsilon}(x)$ есть многочлен, аппроксимирующий коэффициент $a_1(x)$ с точностью до ε на отрезке $[a,b]$, то есть $\|a_1(x)-A_{1\epsilon}(x)\| \leqslant \varepsilon$. В результате замены для новой искомой функции $\tilde{y}_\varepsilon$ получалось дифференциальное уравнение

$$\check{y}_\varepsilon^{(n)} + \check{a}_{1\varepsilon}(x)\check{y}_\varepsilon^{(n-1)} + \check{a}_{2\varepsilon}(x)\check{y}_\varepsilon^{(n-2)} + \cdots + \check{a}_{n\varepsilon}(x)\check{y}_\varepsilon = \lambda\check{y}_\varepsilon, \tag{1.21}$$

в котором $\check{a}_{1\varepsilon}(x) = a_1(x) - A_{1\varepsilon}(x)$, т.е. $\|\check{a}_{1\varepsilon}(\cdot)\| \leqslant \varepsilon$, а остальные коэффициенты являются линейными комбинациями коэффициентов исходного дифференциального уравнения и некоторых произведений $A_{1\varepsilon}(x)$, $A'_{1\varepsilon}(x)$, $\ldots$, $A_{1\varepsilon}^{(n-1)}(x)$. Затем к уравнению (1.21) применялся метод [51] (см. также [135, с. 52–63]) нахождения асимптотики ф.с.р. С учетом замены (1.20) в результате получались асимптотические формулы при $k = \overline{1,n}$ и $m = \overline{0,n-1}$

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}\left(1 + O(\varepsilon) + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \tag{1.22}$$

где $\|O(\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon$, $\left\|O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\rho|}\right)\right\| \leqslant C(\varepsilon)\frac{1}{|\rho|}$, причем константа C не зависит ни от ρ ни от ε, а константа $C(\varepsilon)$ зависит только от ε.

Недостаток формул (1.22) состоит в том, что число $\varepsilon > 0$ хотя и является сколь угодно малым, но все-таки фиксированно. Этот недостаток был устранен автором диссертации в статьях [143; 175] (в совместной статье с А. П. Хромова результат об асимптотике системы решений принадлежит автору диссертации), где полагалось $\varepsilon \to 0$. При этом, чтобы обеспечить выполнение условия $O_\varepsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) \to 0$ при $|\rho| \to 0$, предлагалось вполне определенное согласование ε и $|\rho|$, т.е. в качестве ε бралась функция $\varepsilon = \varepsilon(|\rho|) \to 0$ при $|\rho| \to \infty$. В результате в [143] получены формулы при

$$y_k^{(m)}(x,\rho) = (\rho\omega_k)^m v(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}\bigl(1 + O(\psi(\rho))\bigr),$$

где $\psi(\rho) = o(1)$ при $|\rho| \to \infty$. В [175] получен аналог этого результата для уравнения $a_0(x)y^{(n)}(x) = \lambda y(x)$. $\square$

Замечание 1.6. По-видимому, впервые зависимость скорости стремления $\psi(\rho)$ к нулю от свойств коэффициента $a_1(x) \in L_1[0,1]$ при $a_0 \equiv 1$, аналогичная той, что содержится в теоремах 1.1 и 1.2, установлена в [146].

В дальнейшем автор диссертации получил и систематически использовал [31; 32; 34; 36; 144; 146; 147; 151; 152] асимптотику типа (1.8), где остаточный член $\psi(\rho) := \mathsf{f}(\rho) + \dfrac{1}{|\rho|}$ и $\mathsf{f}(\rho)$ определяется формулой (1.10).

В случае систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывными коэффициентами оценка для $\psi(\rho)$ вида $o(1)$ получена в [61]. В частности там отмечается зависимость скорости стремления к нулю от свойств коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ или их аналогов, если они из пространства Гёльдера $C^\gamma[a,b]$. В этом случае $\psi(\rho) = O\left(\dfrac{1}{|\rho|^\gamma}\right)$.

К указанным результатам примыкают результаты работ [71; 72; 137] об асимптотике решений функционально-дифференциального уравнения вида

$$y^{(n)}(x) + (Fy)(x) + \rho^n y(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

а также некоторым его обобщениям. Здесь F — линейный оператор, непрерывно действующий из пространства Гёльдера $C^\gamma[0,1]$ в пространство $L_1[0,1]$, причем $\gamma < n-1$. В этих работах, в частности, получена асимптотика системы решений экспоненциального типа, при этом также выявлена определенная зависимость скорости стремления $\psi(\rho)$ к нулю от свойств оператора F. $\square$

1.1.2 Вспомогательная теорема

Для доказательства сформулированных результатов нам потребуется вспомогательная теорема об асимптотике системы решений к.д. уравнения (1.11) при условии

$$p_{mm}(x) \equiv 1,\ x \in [a,b], \quad p_{mj}(x) \in L_1[a,b],\ m = \overline{1,n},\ j = \overline{0,m-1}, \tag{1.23}$$

представляющая также самостоятельный интерес.

Пусть $\lambda = -(i\rho)^n$ в уравнении (1.11). Тогда оно будет иметь вид

$$y^{[n]}(x) + (i\rho)^n y(x) = 0. \tag{1.24}$$

Теорема 1.7. *Если выполняется условие (1.23), то во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение (1.24) имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho)$, $y_2(x,\rho)$, ..., $y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho| \gg 1$ и имеющих асимптотику при $k=\overline{1,n}$ и $m=\overline{0,n-1}$*

$$y_k^{[m]}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m \tilde{v}(x) e^{\rho\omega_k(x-a)}\big(1+O(\tilde{\varphi}(\rho))\big), \tag{1.25}$$

где

$$\tilde{v}(x) := \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{\gamma=1}^n p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\,d\xi\right), \quad \tilde{\varphi}(\rho) := \tilde{\mathrm{g}}(\rho)+\frac{1}{|\rho|},$$
$$\tilde{\mathrm{g}}(\rho) := \max_{j\neq s}\max_{\gamma=\overline{1,n}}\left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(x-\xi)}p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\,d\xi\right\|. \tag{1.26}$$

Константы c_{js} имеют тот же самый смысл, что и в теореме 1.1. При этом $\tilde{\mathrm{g}}(\rho)\to 0$ при $|\rho|\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\rho \in T$, где $T := T_c$ при фиксированном $c \in \mathbb{C}$.

Преобразуем уравнение (1.24). Рассмотрим достаточно малое положительное число ε и сделаем следующую замену искомой функции

$$y^{[0]}(x) = \tilde{v}(x)y^{\lfloor 0\rfloor}(x),$$
$$y^{\lfloor m\rfloor}(x) = \tilde{v}(x)\left(y^{\lfloor m\rfloor} + \left(\sum_{j=1}^m P_{j,j-1}(x) - \frac{m}{n}\sum_{j=1}^n P_{j,j-1}(x)\right)y^{\lfloor m-1\rfloor}(x)\right),\ m=\overline{1,n}, \tag{1.27}$$

где $P_{j,j-1}(x)$ есть фиксированные функции из $W_1^1[a,b]$, такие, что

$$\|p_{j,j-1}-P_{j,j-1}\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.28}$$

В результате замены (1.27) уравнение (1.24) преобразуется к эквивалентному уравнению

$$y^{\lfloor n\rfloor} + (i\rho)^n y^{\lfloor 0\rfloor} = 0, \tag{1.29}$$

где

$$y^{\lfloor m\rfloor}(x) := i\frac{d}{dx}y^{\lfloor m-1\rfloor}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} q_{mj}(x)y^{\lfloor j\rfloor}(x), \quad k=\overline{1,n}, \tag{1.30}$$

$$q_{m,m-1}(x) := \left(\Big(p_{m,m-1}(x)-P_{m,m-1}(x)\Big) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\Big(p_{j,j-1}(x)-P_{j,j-1}(x)\Big)\right). \tag{1.31}$$

При этом q_{mj}, $j=\overline{0,m-2}$, есть некоторые функции от $p_{kj}(x)$, $P_{j,j-1}(x)$ и $P'_{j,j-1}(x)$ такие, что $q_{mj}(x)\in L_1[a,b]$. Когда $p_{m,m-1}(x)\in W_1^1[a,b]$, тогда в качестве $P_{m,m-1}(x)$ можно рассматривать $p_{m,m-1}(x)$ и в результате получим $q_{m,m-1}(x)=0$, $m=\overline{1,n}$, для п.в. $x\in[a,b]$.

Из соотношений (1.28) и (1.31) следует, что

$$\|q_{m,m-1}(x)\|_1\leqslant\varepsilon,\quad m=\overline{1,n}; \tag{1.32}$$

$$\sum_{m=1}^{n}q_{m,m-1}(x)=0\ \text{ для п.в. }\ x\in[a,b]. \tag{1.33}$$

Эти соотношения будут играть принципиальную роль в дальнейшем.

Рассмотрим далее к.д. уравнение (1.29). Обозначим $y^{\lfloor m\rfloor}(x)=z_m(x)$, где $m=\overline{0,n-1}$. В результате получим систему

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dx}z_{m-1}(x)+q_{m,m-1}(x)z_{m-1}(x)-z_m(x)=F_{m-1}(x),\, m=\overline{1,n-1},\\ i\dfrac{d}{dx}z_{n-1}(x)+q_{n,n-1}(x)z_{n-1}(x)-(i\rho)^nz_0(x)=F_{n-1}(x), \end{cases} \tag{1.34}$$

где

$$F_0(x)=0,\quad F_m(x)=-\sum_{j=0}^{m-1}q_{m+1,j}(x)z_j(x),\, m=\overline{1,n-1}.$$

Найдем ф.м.р. системы (1.34), используя модификацию метода [51]. Первоначально рассмотрим более простую систему

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dx}v_{m-1}(x)-v_m(x)=-q_{m,m-1}(x)v_{m-1}(x),\quad m=\overline{1,n-1}\\ i\dfrac{d}{dx}v_{n-1}(x)-(i\rho)^nv_0(x)=-q_{n,n-1}(x)v_{n-1}(x). \end{cases} \tag{1.35}$$

Для получения системы интегральных уравнений, которой удовлетворяет решение системы (1.35), считаем, что ее правые части являются известными функциями, т. е. свободными членами.

Тогда матрица

$$\Big((i\rho\omega_k)^{m-1}e^{\rho\omega_k(x-a)}\Big)_{m,k=1}^{n} \tag{1.36}$$

является ф.м.р. соответствующей однородной системы.

Применяя к системе (1.35) метод вариации произвольных постоянных, получим для нахождения k-го столбца матрицы решений следующую систему интегральных уравнений

$$
\begin{gathered}
v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)} - \int\limits_a^x \sum_{s=1}^n K_{mks}(x,\xi,\rho) q_{s,s-1}(\xi) v_{s-1,k}(\xi,\rho)\, d\xi + \\
+ \int\limits_x^b \sum_{s=1}^n N_{mks}(x,\xi,\rho) q_{s,s-1}(\xi) v_{s-1,k}(\xi,\rho)\, d\xi, \quad m = \overline{0,n-1},
\end{gathered} \tag{1.37}
$$

где

$$
K_{mks}(x,\xi,\rho) = \frac{1}{in} \sum_{j=1}^k (i\rho\omega_j)^{m+1-s} e^{\rho\omega_j(x-\xi)},
$$

$$
N_{mks}(x,\xi,\rho) = \frac{1}{in} \sum_{j=k+1}^n (i\rho\omega_j)^{m+1-s} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}.
$$

Сделав в (1.37) замену

$$
v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)} u_{mk}(x,\rho), \quad m = \overline{0,n-1}, \tag{1.38}
$$

получим для нахождения $u_{mk}(x,\rho)$ систему интегральных уравнений

$$
u_{mk}(x,\rho) = 1 + \int\limits_a^b \sum_{s=1}^n A_{mks}(x,\xi,\rho) u_{s-1,k}(\xi,\rho)\, d\xi, \quad m = \overline{0,n-1}, \tag{1.39}
$$

где

$$
A_{mks}(x,t,\rho) = \begin{cases} -\dfrac{1}{in} \displaystyle\sum_{j=1}^k \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-\xi)} q_{s,s-1}(\xi), & \xi \leqslant x; \\ \dfrac{1}{in} \displaystyle\sum_{j=k+1}^n \left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{kj}(\xi-x)} q_{s,s-1}(\xi), & \xi > x. \end{cases}
$$

Из соотношения (1.32) и (1.4) следует, что для $\rho \in T$

$$
\max_{x\in[a,b]} \|A_{mks}(x,\cdot\,,\rho)\|_1 \leqslant C\varepsilon.
$$

Следовательно, система (1.39) однозначно разрешима при достаточно малом $\varepsilon > 0$, ее решением являются непрерывные по $x \in [a,b]$ и регулярные по $\rho \in T$ функции $u_{mk}(x,\rho)$, $m = \overline{0,n-1}$, и равномерно по $x \in [a,b]$ и $\rho \in T$

$$
u_{mk}(x,\rho) = 1 + O(\varepsilon), \quad m = \overline{0,n-1}. \tag{1.40}
$$

Непосредственно из системы (1.39) получить оценки для $u_{mk}(x,\rho)$, из которых вытекают асимптотические формулы (1.25), не удается. Поэтому рассуждаем следующим образом. Зафиксируем ε, при котором было найдено решение (1.40), и осуществим в системе (1.39) два раза последовательную подстановку.

В результате получим, что решение $u_{mk}(x,\rho)$, $m=\overline{0,n-1}$, помимо того, что удовлетворяет системе (1.39), удовлетворяет также и следующей системе тождеств

$$u_{mk}(x,\rho)\equiv 1-\frac{1}{in}\int\limits_a^x\sum_{s=1}^n\sum_{j=1}^k\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}e^{\rho_{jk}(x-\xi)}q_{s,s-1}(\xi)D_{ks}(\xi,\rho)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{in}\int\limits_x^b\sum_{s=1}^n\sum_{j=k+1}^n\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}e^{\rho_{kj}(\xi-x)}q_{s,s-1}(\xi)D_{ks}(\xi,\rho)\,d\xi,\quad m=\overline{0,n-1},\quad (1.41)$$

где

$$D_{ks}(\xi,\rho):=1-\frac{1}{in}\int\limits_a^\xi\sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=1}^k\left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s}e^{\rho_{\beta k}(\xi-\tau)}q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)E_{k\alpha}(\tau,\rho)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{in}\int\limits_\xi^b\sum_{\alpha=1}^n\sum_{\beta=k+1}^n\left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s}e^{\rho_{k\beta}(\tau-\xi)}q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)E_{k\alpha}(\tau,\rho)\,d\tau,$$

$$E_{k\alpha}(\tau,\rho):=1-\frac{1}{in}\int\limits_a^\tau\sum_{\gamma=1}^n\sum_{\mu=1}^k\left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha}e^{\rho_{\mu k}(\tau-\zeta)}q_{\gamma,\gamma-1}(\zeta)u_{\gamma-1,k}(\zeta,\rho)\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{in}\int\limits_\tau^b\sum_{\gamma=1}^n\sum_{\mu=k+1}^n\left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha}e^{\rho_{k\mu}(\zeta-\tau)}q_{\gamma,\gamma-1}(\zeta)u_{\gamma-1,k}(\zeta,\rho)\,d\zeta.$$

В соответствии с соотношением (1.33), система тождеств (1.41) обладает важным свойством, которое и позволяют далее получить требуемое асимптотическое представление для решения. А именно, в правой части тождеств (1.41) отсутствуют слагаемые, соответствующие «плохим» случаям (когда при соответствующем коэффициенте $q_{s,s-1}(\xi)$ или аналогичном коэффициенте отсутствует экспонента с неположительной вещественной частью показателя $\rho_{jk}(x-\xi)$ или аналогичного показателя):

1) $\beta = j$;

2) $\mu = \beta$;

3) $j = k$, когда слагаемые содержат только интегрирование по ξ;

4) $\beta = k$, когда слагаемые содержат только интегрирование по ξ и τ.

Покажем, что это именно так. Рассуждения в случаях 1)–4) проводятся аналогично, поэтому проведём рассуждения, например, только в случае $\beta = j$.

Тогда под знаком интеграла справа в (1.41) формально присутствует, например, слагаемое вида:

$$\frac{1}{(in)^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m} e^{\rho_{jk}(x-\xi)}q_{s,s-1}(\xi)\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{\alpha-s} e^{\rho_{jk}(\xi-\tau)}q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)E_{k\alpha}(\tau,\rho).$$

Меняя порядок суммирования по s и по j и учитывая равенство (1.33), получим, что это слагаемое равно нулю. Остальные слагаемые в случае $\beta = j$ рассматриваются аналогично.

Оценим теперь оставшиеся слагаемые в правой части. Разобьём их на три группы по числу входящих в них интегралов.

Как оцениваются слагаемые, содержащие один интеграл, покажем на примере суммы вида

$$I_1(x,\rho) := \frac{1}{in}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}\int_a^x e^{\rho_{jk}(x-\xi)}q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi.$$

Подставив в $I_1(x,\rho)$ выражение для $q_{s,s-1}(\xi)$ из (1.31) и проинтегрировав один раз по частям слагаемые, которые содержат $P_{\eta,\eta-1}$, получим оценку

$$I_1(x,\rho) = O\left(\tilde{\mathrm{g}}(\rho) + \frac{1}{|\rho|}\right),$$

где $\tilde{\mathrm{g}}(\rho)$ определяются формулой из (1.26).

Слагаемые в (1.41), содержащие по два интеграла, рассматриваются аналогично.

Рассмотрим теперь слагаемые в (1.41), содержащее три интеграла. Как оцениваются такие слагаемые рассмотрим на примере слагаемого вида

$$I_2(x,\rho) := \frac{1}{(in)^3}\left(\frac{\omega_k}{\omega_j}\right)^{s-1-m}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\beta}\right)^{\alpha-s}\left(\frac{\omega_k}{\omega_\mu}\right)^{\gamma-\alpha}\int_a^x e^{\rho_{jk}(x-\xi)}q_{s,s-1}(\xi)\times$$

$$\times\int_a^\xi e^{\rho_{\beta k}(\xi-\tau)}q_{\alpha,\alpha-1}(\tau)\int_a^\tau e^{\rho_{\mu k}(\tau-\zeta)}q_{\gamma,\gamma-1}(\zeta)u_{\gamma-1,k}(\zeta,\rho)\,d\zeta\,d\tau\,d\xi,$$

где $1 \leqslant s,\ \alpha,\ \gamma \leqslant n$, $1 \leqslant j,\ \beta,\ \mu \leqslant k$, $\beta \neq j$, $\mu \neq \beta$.

Меняя порядок интегрирования по ξ и τ, получим

$$I_2(x,\rho) = O\left(\max_{a \leqslant \tau \leqslant x \leqslant b}\left|\int\limits_{\tau}^{x} e^{\rho_{jk}(x-\xi)+\rho_{\beta k}(\xi-\tau)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right|\right).$$

Для определенности рассмотрим случай $j < \beta$. Представляя показатель в экспоненте в виде

$$\rho_{jk}(x-\xi) + \rho_{\beta k}(\xi - \tau) \equiv \rho_{j\beta}(x-\xi) + \rho_{\beta k}(x-\tau),$$

будем иметь

$$\left|\int\limits_{\tau}^{x} e^{\rho_{jk}(x-\xi)+\rho_{\beta k}(\xi-\tau)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant \left|\int\limits_{a}^{x} e^{\rho_{j\beta}(x-\xi)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right| +$$
$$+\left|\int\limits_{a}^{\tau} e^{\rho_{j\beta}(x-\tau)+\rho_{j\beta}(\tau-\xi)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int\limits_{a}^{x} e^{\rho_{j\beta}(x-\xi)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right|.$$

Случай $j > \beta$ рассматривается аналогично. Окончательно получим

$$I_2(x,\rho) = O\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int\limits_{a}^{x} e^{\rho_{j\beta}(x-\xi)} q_{s,s-1}(\xi)\,d\xi\right|\right) = O\left(\tilde{\mathrm{g}}(\rho) + \frac{1}{|\rho|}\right).$$

Остальные слагаемые в правой части (1.41) оцениваются аналогично. Следовательно,

$$u_{mk}(x,\rho) = 1 + O(\tilde{\varphi}(\rho)), \quad m = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

А с учетом замены (1.38), отсюда получаем следующую асимптотику для компонент решений системы (1.35)

$$v_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}\big(1 + O(\tilde{\varphi}(\rho))\big),\ m = \overline{0,n-1},\ k = \overline{1,n}, \tag{1.42}$$

образующих ф.м.р. системы (1.34), если рассматривать ее как неоднородную систему с правыми частями $F_j(x)$, $j = \overline{0,n-1}$.

Проводя далее рассуждения, которые аналогичны тем, что были проведены при получении формул (1.42), но используя вместо ф.м.р. (1.36) ф.м.р. $\big(v_{mk}(x,\rho)\big)_{k,m=1}^{n}$, получим для компонент ф.м.р. системы (1.34) асимптотику при $|\rho| \to \infty$ вида

$$z_{mk}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m e^{\rho\omega_k(x-a)}\big(1 + O(\tilde{\varphi}(\rho))\big),\ m = \overline{0,n-1},\ k = \overline{1,n}.$$

Последовательно возвращаясь от системы (1.34) к уравнению (1.29), а затем от него, при помощи формул (1.27), к уравнению (1.24), получим утверждение (1.25) доказываемой теоремы.

Докажем теперь, что

$$\tilde{\mathrm{g}}(\rho) \to 0 \ \text{ при } \ |\rho| \to \infty. \tag{1.43}$$

Для доказательства потребуются некоторые результаты из [108]. Сформулируем эти результаты в виде леммы.

Лемма 1.8 ([108]). *Если $Q_m(x)$ есть произвольный алгебраический многочлен степени m, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, s есть натуральное число, то существует константа $C(p,q)$, зависящая только от p и q, и константа $C(s)$, зависящая только от s, такие, что*

$$\text{а)} \quad \|Q_m(x)\|_q \leqslant C(p,q) m^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|Q_m(x)\|_p; \tag{1.44}$$

$$\text{б)} \quad \|Q_m^{(s)}(x)\|_p \leqslant C(s) m^{2s} \|Q_m(x)\|_p. \tag{1.45}$$

Обозначим через $\mathbb{P}_k$ множество алгебраических многочленов степени не выше k. Далее, наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[a,b]$ алгебраическими многочленами степени не выше k будем обозначать $E_k(f)_p$, а многочлен наилучшего приближения — $F_k(x)$ (если не оговорено противное), т. е.

$$E_k(f)_p = \|f(x) - F_k(x)\|_p = \min_{f_k(x) \in \mathbb{P}} \|f(x) - f_k(x)\|_p.$$

Пусть $P_{\gamma,\gamma-1,k}(x)$ есть многочлен наилучшего приближения степени k для коэффициента $p_{\gamma,\gamma-1}(x)$, а $E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_1$ есть наилучшее приближение этого коэффициента в метрике пространства $L_1[a,b]$. Справедливо следующее тождество для интеграла, стоящего под знаком нормы в выражении (1.26) для $\tilde{g}(\rho)$:

$$\int_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(x-\xi)} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\, d\xi \equiv$$

$$\equiv \int_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(x-\xi)} \Big(p_{\gamma,\gamma-1}(\xi) - P_{\gamma,\gamma-1,k}(x) \Big)\, d\xi + \int_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(x-\xi)} P_{\gamma,\gamma-1,k}(\xi)\, d\xi =:$$

$$=: I_{1k}(x,\rho_{js},\gamma) + I_{2k}(x,\rho_{js},\gamma). \tag{1.46}$$

Так как $\operatorname{Re}\rho_{js}(x-\xi)\leqslant 0$, то, используя неравенство Гёльдера и тот факт, что $P_{\gamma,\gamma-1,k}(x)$ есть многочлен наилучшего приближения степени не выше k функции $p_{\gamma,\gamma-1}(x)$ в метрике $L_1[0,1]$, будем иметь

$$\|I_{1k}(x,\rho_{js},\gamma)\|\leqslant CE_k(p_{\gamma,\gamma-1})_1 \tag{1.47}$$

равномерно по $x\in[a,b]$, j и s.

В интеграле $I_{2k}(x,\rho_{js},\gamma)$ проводим один раз интегрирование по частям. Затем, учитывая, что $\operatorname{Re}\rho_{js}(x-\xi)\leqslant 0$, применяем неравенства (1.44)–(1.45). В результате получим

$$\|I_{2k}(x,\rho_{js},\gamma)\|\leqslant C(p_{\gamma,\gamma-1})\frac{k^2}{|\rho|} \tag{1.48}$$

равномерно по $x\in[a,b]$, j и s.

Так как степень многочлена k является параметром, то выбирая его, например, как

$$k=k(|\rho|):=\left[\sqrt[4]{|\rho|}\right],$$

где $[y]$ обозначает целую часть числа y, из (1.46)–(1.48) получим

$$\left\|\int\limits_{c_{js}}^{x} e^{\rho_{js}(x-\xi)}p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\,d\xi\right\|\to 0 \quad \text{при} \quad |\rho|\to\infty$$

равномерно по γ, j и s. А отсюда следует (1.43).

Таким образом, теорема 1.7 полностью доказана. □

1.1.3 Доказательства основных теорем

Дифференциальное уравнение (1.3) есть частный случай к.д. уравнения (1.11), если в (1.11) положить

$$p_{kk}(x)\equiv 1,\ p_{kj}(x)\equiv 0,\ k=\overline{1,n-1},\ j=\overline{0,k-1};$$
$$p_{nj}(x):=\frac{1}{i^j}a_{n-j}(x),\ j=\overline{0,n}. \tag{1.49}$$

Поэтому, теорема 1.1 есть простое следствие теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.2. Положим $\lambda = -\operatorname{sign}(r_n(x))(i\rho)^n$ в уравнении (1.11). Получим к.д. уравнение

$$y^{[n]}(x) + \operatorname{sign}(r_n(x))(i\rho)^n y(x) = 0. \tag{1.50}$$

Сделаем теперь в уравнении (1.50) следующую замену независимой переменной

$$t = \tilde{\eta}(x) := \int\limits_a^x |r_n(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\, d\tau \in [0,\tilde{h}], \quad \tilde{h} = \int\limits_a^b |r_n(\tau)|^{-\frac{1}{n}}\, d\tau, \tag{1.51}$$

Так как функция $\tilde{\eta}(x)$ строго монотонна на $[a,b]$, то существует обратная функция $x = \theta(t)$. Обозначим далее

$$P_{kj}(t) := p_{kj}(\theta(t)),\ R_k(t) := r_k(\theta(t)),\ R(t) := r(\theta(t)),\ Y(t) := y(\theta(t)),$$

где $r(x) := |r_n(x)|^{\frac{1}{n}}$.

В результате замены (1.51) уравнение (1.50) примет вид

$$Y^{\lceil n \rceil}(t) + (i\rho)^n Y^{\lceil 0 \rceil}(t) = 0, \quad t \in [0,\tilde{h}], \tag{1.52}$$

где

$$Y^{\lceil 0 \rceil}(t) := Y(t), \quad Y^{\lceil k \rceil}(t) := i\,\frac{d}{dt} Y^{\lceil k-1 \rceil} + \sum_{j=0}^{k-1} Q_{kj}(t) Y^{\lceil j \rceil}(t),\ k = \overline{1,n}, \tag{1.53}$$

$$Q_{k,k-1}(t) := i\,\frac{R^{k-1}(t)}{R_{k-1}(t)} \left(\frac{R_{k-1}(t)}{R^{k-1}(t)} \right)' + \frac{P_{k,k-1}(t)}{P_{kk}(t)} R(t), \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.54}$$

при этом $Q_{k,k-1}(t) \in L_1[0,\tilde{h}]$, а остальные функции $Q_{kj}(t)$ также есть вполне определенные функции из $L_1[0,\tilde{h}]$, конкретный вид которых нам не потребуется. При этом справедливы формулы

$$y^{[0]}(x) \equiv Y^{\lceil 0 \rceil}(t), \quad y^{[k]} \equiv R_k(t) R^{-k}(t) Y^{\lceil k \rceil}(t),\ k = \overline{1,n}. \tag{1.55}$$

Но уравнение (1.52) удовлетворяет требованиям теоремы 1.7. На основании этой теоремы уравнение (1.52) имеет для всякой области T систему линейно независимых решений $Y_1(t,\rho)$, $Y_2(t,\rho)$, $\ldots$, $Y_n(t,\rho)$, регулярных по ρ при $|\rho| \gg 1$ и имеющих асимптотику

$$Y_k^{\lceil m \rceil}(t,\rho) = (i\rho\omega_k)^m \tilde{V}(t) e^{\rho\omega_k t}\bigl(1 + O(\tilde{\Phi}(\rho))\bigr), \quad k = \overline{1,n}, \quad m = \overline{0,n-1}, \tag{1.56}$$

где

$$\tilde V(t) := \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_0^t \sum_{k=1}^n Q_{k,k-1}(\tau)\,d\tau\right), \quad \tilde\Phi(\rho) := \tilde G(\rho) + \frac{1}{|\rho|}, \tag{1.57}$$

$$\tilde G(\rho) := \max_{j\neq s}\max_m \left\| \int\limits_{d_{js}}^t e^{\rho_{js}(t-\tau)} Q_{m,m-1}(\tau)\,d\tau \right\|, \tag{1.58}$$

d_{js} равно либо 0, либо $\tilde h$ в зависимости от условия $j < s$ или $j > s$, соответственно.

Преобразуем выражения для функций $\tilde V(t)$ и $\tilde\Phi(\rho)$.

Для функции $\tilde V(t)$ имеем с учетом (1.54)

$$\tilde V(t) = \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_0^t \left(i\sum_{j=1}^n \frac{R^{j-1}(\tau)}{R_{j-1}(\tau)}\left(\frac{R_{j-1}(\tau)}{R^{j-1}(\tau)}\right)' + \sum_{j=1}^n \frac{P_{j,j-1}(\tau)}{P_{jj}(\tau)} R(\tau)\right) d\tau\right) =$$
$$= \exp\big(J_1(t) + J_2(t)\big). \tag{1.59}$$

Для $J_1(t)$ получим, учитывая замену $\tau = \tilde\eta(\xi)$,

$$J_1(t) = -\frac{1}{n}\int\limits_0^t \sum_{j=2}^n \frac{R^{j-1}(\tau)}{R_{j-1}(\tau)}\, d\left(\frac{R_{j-1}(\tau)}{R^{j-1}(\tau)}\right) =$$
$$= -\frac{1}{n}\int\limits_a^x \sum_{j=2}^n \frac{r^{j-1}(\xi)}{r_{j-1}(\xi)}\, d\left(\frac{r_{j-1}(\xi)}{r^{j-1}(\xi)}\right) = -\frac{1}{n}\int\limits_a^x d\left(\sum_{j=2}^n \ln\frac{|r_{j-1}(\xi)|}{r^{j-1}(\xi)}\right) =$$
$$= \ln\left(\prod_{j=2}^n \frac{r^{j-1}(\xi)}{|r_{j-1}(\xi)|}\right)^{\frac{1}{n}}\Bigg|_a^x = \ln\left(\frac{r^{\frac{n-1}{2}}(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} |r_j(\xi)|^{\frac{1}{n}}}\right)\Bigg|_a^x = \ln\frac{q(x)}{q(a)}, \tag{1.60}$$

где функция $q(x)$ определяется формулой (1.14) в формулировке теоремы 1.2.

Для $J_2(t)$ после замены $\tau = \tilde\eta(\xi)$ (см. формулу (1.14)) будем иметь

$$J_2(t) = \frac{i}{n}\int\limits_0^t \sum_{j=1}^n \frac{P_{j,j-1}(\tau)}{P_{jj}(\tau)} R(\tau)\,d\tau =$$
$$= \frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{j=1}^n \frac{p_{j,j-1}(\xi)}{p_{jj}(\xi)} r(\xi)\,\frac{d\xi}{r(\xi)} = \frac{i}{n}\int\limits_a^x \sum_{j=1}^n \frac{p_{j,j-1}(\xi)}{p_{jj}(\xi)}\,d\xi. \tag{1.61}$$

Следовательно, на основании (1.59)–(1.61) получим

$$\tilde{V}(t)=\frac{q(x)}{q(a)}\exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_a^x\sum_{j=1}^n\frac{p_{j,j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)}\,d\tau\right)=\frac{q(x)}{q(a)}\tilde{w}(x), \tag{1.62}$$

где функция $\tilde{w}(x)$ та же, что и в формуле (1.15).

Рассмотрим теперь $\tilde{\Phi}(\rho)$. Для того, чтобы найти требуемую в формулировке теоремы формулу для $\tilde{\psi}(\rho)$ (см. (1.15)), предварительно рассмотрим интеграл внутри нормы в (1.58) и подставим вместо $Q_{m,m-1}(\tau)$ их выражения из (1.54).

Ограничимся рассмотрением случая $j<s$, т. е. когда $d_{js}=0$. Рассуждения в случае $j>s$ аналогичны. Интеграл, соответствующий первому слагаемому в правой части (1.54), обозначим $L_1(t)$, а интеграл, соответствующий второму слагаемому — $L_2(t)$.

Используя замену $\tau=\tilde{\eta}(\xi)$, слагаемое $L_1(t)$ можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned}L_1(t)=\int\limits_0^t e^{\rho_{js}(t-\tau)}\frac{R^{m-1}(\tau)}{R_{m-1}(\tau)}\,d\biggl(\frac{R_{m-1}(\tau)}{R^{m-1}(\tau)}\biggr)=\int\limits_a^x e^{\rho_js(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\,d\ln\left(\frac{\bigl|r_{m-1}(\xi)\bigr|}{r^{m-1}(\xi)}\right)=\\
=\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\,d\left(\sum_{\alpha=1}^{m-1}\ln\bigl|p_{\alpha\alpha}(\xi)\bigr|-\frac{m-1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\ln\bigl|p_{\alpha\alpha}(\xi)\bigr|\right)=\\
=O\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\,d\ln\bigl|p_{\alpha\alpha}(\xi)\bigr|\right|\right)=\\
=O\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left|\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\frac{p'_{\alpha\alpha}(\xi)}{p_{\alpha\alpha}(\xi)}\,d\xi\right|\right).\end{aligned} \tag{1.63}$$

Слагаемое $L_2(t)$ преобразуем следующим образом, опять используя замену $\tau=\tilde{\eta}(\xi)$,

$$L_2(t)=\int\limits_0^t e^{\rho_{js}(t-\tau)}\frac{P_{m,m-1}(\tau)}{P_{mm}(\tau)}R(\tau)\,d\tau=\int\limits_a^x e^{\rho_{js}(\tilde{\eta}(x)-\tilde{\eta}(\xi))}\frac{p_{m,m-1}(t)}{p_{mm}(\xi)}\,d\xi. \tag{1.64}$$

Следовательно, на основании (1.63)–(1.64) для $\tilde{G}(\rho)$ получается оценка

$$\tilde{G}(\rho)\leqslant C\tilde{\mathsf{f}}(\rho),$$

где $\tilde{\mathsf{f}}(\rho)$ определена формулой (1.16) в формулировке теоремы 1.2.

Таким образом, учитывая (1.57) и (1.15), будем иметь оценку

$$\tilde{\Phi}(\rho) = O\big(\tilde{\psi}(\rho)\big).$$

Из этой оценки, формулы (1.62), (1.56) и (1.55) в результате замены $t = \tilde{\eta}(x)$ и отбрасывания отличной от нуля константы $\dfrac{1}{q(a)}$ получим асимптотические формулы (1.13).

Тем самым, теорема 1.2 полностью доказана. $\square$

1.2 Асимптотические формулы для решений линейной дифференциальной системы первого порядка с параметром

В данном разделе используются следующие обозначения:

$\mathfrak{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть нормированное пространство $n \times n$ м.-ф. с компонентами из пространства $L_p[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_p := \max\limits_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_p$ для $n \times n$ м.-ф. $X(t)$ с компонентами $\{X(t)\}_{ij}$;

$\mathfrak{W}^1_p[a,b]$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, есть нормированное пространство $n \times n$ м.-ф. с компонентами из пространства $W^1_p[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_{p1} := \max\limits_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_{p1}$.

Как обычно, различные константы обозначаются как C, $C(\cdot)$, $C(\cdot,\cdot)$, $\ldots$, где в скобках записываются параметры, от которых могут зависеть эти константы, за исключением особых случаев, когда используются специальные обозначения для некоторых констант.

1.2.1 Обозначения, предварительные сведения и формулировка основной теоремы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка на отрезке $[a,b]$

$$Y'(x) - A(x,\lambda)Y(x) = 0, \tag{1.65}$$

где $A(x,\lambda)$ и $Y(x)$ — $n\times n$ матрицы-функции, λ — комплексный параметр,

$$A(x,\lambda)=\lambda A_1(x)+A_0(x)+\frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda). \tag{1.66}$$

Под решением системы (1.65) понимается такая $n\times n$ матрица-функция $Y(\cdot,\lambda)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, которая удовлетворяет уравнению (1.65) почти всюду на $[a,b]$.

Далее в этом разделе будут использоваться следующие условия:

1°) $A_1(x)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, $A_0(x)\in\mathfrak{L}_1[a,b]$, $A_{-1}(x,\lambda)\in\mathfrak{L}_1[a,b]$ *и справедлива оценка* $|||A_{-1}(\cdot,\lambda)|||_1=O(1)$ *при* $|\lambda|>R$, *где* $R\gg 1$;

2°) *корни* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ *характеристического уравнения*

$$\det\bigl(\varphi E-A_1(x)\bigr)=0,$$

где E *обозначает единичную* $n\times n$ *матрицу, различны при всех* $x\in[a,b]$ *и отличны от нуля (из* [65] *следует, что если* $A_1(x)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, *то* $\varphi_j(x)$ *могут быть выбраны так, что* $\varphi_j(x)\in W_1^1[a,b]$, $j=\overline{1,n}$);

3°) *существует бесконечное подмножество* Ω *области* $|\lambda|>R$, *в котором при всех* $x\in[a,b]$ *выполняются неравенства*

$$\operatorname{Re}(\lambda\varphi_1(x))\leqslant\operatorname{Re}(\lambda\varphi_2(x))\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}(\lambda\varphi_n(x)), \tag{1.67}$$

при соответствующей нумерации функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$;

4°) $A_{-1}(\cdot,\lambda)$ — *аналитическая м.-ф. по* λ *при* $|\lambda|>R$ *в пространстве* $\mathfrak{L}_1[a,b]$.

Обозначим через $\Psi(x)$ м.-ф., которая приводит матрицу $A_1(x)$ к диагональному виду

$$\Psi^{-1}(x)A_1(x)\Psi(x)=\operatorname{diag}\bigl\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)\bigr\}=:\Phi_1(x). \tag{1.68}$$

Если $A_1(x)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$, то из [65] следует, что $\Psi(x)$, $\Psi^{-1}(x)\in\mathfrak{W}_1^1[a,b]$.

Обозначим

$$B_0(x):=\Psi^{-1}(x)A_0(x)\Psi(x)-\Psi^{-1}(x)\Psi'(x)-\Phi_0(x), \tag{1.69}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi_0(x):=\operatorname{diag}\bigl\{\varphi_{01}(x),\varphi_{02}(x),\ldots,\varphi_{0n}(x)\bigr\},\\ \varphi_{0j}(x):=\bigl\{\Psi^{-1}(x)A_0(x)\Psi(x)-\Psi^{-1}(x)\Psi'(x)\bigr\}_{jj},\quad j=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{1.70}$$

Пусть

$$\Phi(x,\lambda):=\operatorname{diag}\{\varphi_1(x,\lambda),\ldots,\varphi_n(x,\lambda)\},$$

где $\varphi_j(x,\lambda) := \lambda\varphi_j(x) + \varphi_{0j}(x)$.

Для краткости обозначим далее

$$\chi_{ij}(x,\lambda) := \varphi_i(x,\lambda)-\varphi_j(x,\lambda),\ \ \chi_{ij}(x) := \varphi_i(x)-\varphi_j(x),\ \ \chi_{0ij}(x) := \varphi_{0i}(x)-\varphi_{0j}(x).$$

Введем числовую $n \times n$ матрицу L с компонентами $l(i,j)$ такими, что $l(i,j) := a$ при $i \leqslant j$ и $l(i,j) := b$ при $i > j$, $i,j = \overline{1,n}$.

Сформулируем основную теорему данного раздела. Результат опубликован первоначально в [153], а затем в [39].

Теорема 1.9. *При условиях* $\mathbf{1}^\circ) - \mathbf{3}^\circ)$ *существует ф.м.р.* $Y(x,\lambda)$ *системы* (1.65), *допускающая асимптотическое по* $|\lambda| \to \infty$ $(\lambda \in \Omega)$ *представление*

$$Y(x,\lambda) = \tilde{\Psi}(x)\exp\left(\lambda\int\limits_a^x \Phi_1(\xi)\,d\xi\right)\Big(E + \mathcal{E}(x,\lambda)\Big), \tag{1.71}$$

где

$$\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)\exp\left(\int\limits_a^x \Phi_0(\xi)d\xi\right),$$

$\mathcal{E}(\cdot,\lambda) \in \mathfrak{W}_1^1[a,b]$ *и справедлива оценка*

$$|||\mathcal{E}(\cdot,\lambda)|||_\infty \leqslant C\bigg(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\bigg), \tag{1.72}$$

в которой

$$\delta(\lambda) := \max_{i\neq j}\left\{\left\|\int\limits_{l(i,j)}^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\big\{B_0(t)\big\}_{ij}\,dt\right\|_\infty\right\}, \tag{1.73}$$

при этом $\delta(\lambda) \to 0$, *когда* $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$. *Если наряду с условиями* $\mathbf{1}^\circ) - \mathbf{3}^\circ)$ *выполняется условие* $\mathbf{4}^\circ)$, *то решение* $Y(x,\lambda)$ *является аналитической м.-ф. по* λ *при* $\lambda \in \Omega$ *и* $|\lambda| \gg 1$.

Замечание 1.10. Впервые наиболее полно решения системы (1.65) изучались в [187]. Переизложение полученных там результатов об асимптотике решений имеется в [54; 140]. По сравнению с теоремой 1.9, доказываемой в данном разделе, в [187] на м.-ф. $A(x,\lambda)$ накладывались более сильные условия гладкости, а именно: предполагалось, что компоненты этой матрицы есть непрерывные функции, при этом компоненты $A_0(x)$ один раз, а компоненты $A_1(x)$ два раза непрерывно дифференцируемы. Асимптотическая формула для решения из [187] имеет внешне такой же вид, что и формула (1.71), но член $\mathcal{E}(\cdot,\lambda)$ имеет оценку $O\left(\dfrac{1}{|\lambda|}\right)$. □

Замечание 1.11. В работе [61] также изучалось решение системы (1.65), при этом на м.-ф. $A(x,\lambda)$ накладывались более сильные условия, чем в теореме 1.9, а именно: предполагалось, что компоненты этой матрицы есть непрерывные функции, при этом компоненты $A_0(x)$ непрерывны, а компоненты $A_1(x)$ один раз непрерывно дифференцируемы. Остаточный член $\mathcal{E}(x,\lambda)$ имел в [61] оценку $o(1)$ в общем случае и $O\left(\dfrac{1}{|\lambda|^\gamma}\right)$ в случае, когда компоненты $A_1'(x)$ и $A_0(x)$ принадлежат классу Гельдера $C^\gamma[a,b]$.

Доказательство теоремы 1.9 проводится методом работы [61], но в схему этого метода внесены существенные изменения. □

1.2.2 Преобразование исходной системы дифференциальных уравнений

Сделаем в системе (1.65) следующую замену искомой м.-ф.

$$Y(x,\lambda) = \hat{\Psi}(x)\exp\left(\int\limits_a^x \hat{\Phi}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) Z(x,\lambda), \tag{1.74}$$

где $\hat{\Phi}(x,\lambda) = \lambda\hat{\Phi}_1(x) + \hat{\Phi}_0(x)$ — пока произвольная диагональная м.-ф., $\hat{\Phi}_1(x)$, $\hat{\Phi}_0(x) \in \mathcal{L}_1[a,b]$, а $\hat{\Psi}(x) \in \mathfrak{W}_1^1[a,b]$ — произвольная м.-ф., для которой существует $\hat{\Psi}^{-1}(x)$ и $\hat{\Psi}^{-1}(x) \in \mathfrak{W}_1^1[a,b]$.

Подставляя (1.74) в (1.65), получим

$$Z'(x) = \exp\left(-\int\limits_a^x \hat{\Phi}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) B(x,\lambda)\exp\left(\int\limits_a^x \hat{\Phi}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) Z, \tag{1.75}$$

где

$$\begin{gathered} B(x,\lambda) := \lambda\Big(\hat{\Psi}^{-1}(x)A_1(x)\hat{\Psi}(x) - \hat{\Phi}_1(x)\Big) + \\ + \Big(\hat{\Psi}^{-1}(x)A_0(x)\hat{\Psi}(x) - \hat{\Psi}^{-1}(x)\hat{\Psi}'(x)) - \hat{\Phi}_0(x)\Big) + \frac{1}{\lambda}\hat{\Psi}^{-1}(x)A_{-1}(x,\lambda)\hat{\Psi}(x). \end{gathered} \tag{1.76}$$

Лемма 1.12. *Если выполнены условия* $\mathbf{1}^\circ$)–$\mathbf{2}^\circ$) *и* $\hat{\Psi}(x) = \Psi(x)$, $\hat{\Phi}_0(x) = \Phi_0(x)$, $\hat{\Phi}_1(x) = \Phi_1(x)$, *то справедливо соотношение*

$$B(x,\lambda) = B_0(x) + B_{-1}(x,\lambda), \tag{1.77}$$

где $B_0(x)$ *определяется формулой* (1.69), *принадлежит* $\mathfrak{L}_1[a,b]$, *имеет нулевые элементы на главной диагонали и* $|||B_{-1}(x,\lambda)|||_1 = O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ *при* $|\lambda| \geqslant R$. *Если, кроме того, выполнено условие* $\mathbf{4}^\circ$, *то* $B_{-1}(x,\lambda)$ *есть аналитическая матрица-функция в* $\mathfrak{L}_1[a,b]$ *при* $|\lambda| > R$.

Доказательство. При выполнении условий $\mathbf{1}^\circ$)–$\mathbf{2}^\circ$), в результате замены (1.74) в соответствии с формулой (1.76) и обозначением (1.69), получим

$$B(x,\lambda) = \Big(\Psi^{-1}(x)A_0(x)\Psi(x) - \Psi^{-1}(x)\Psi^{(1)}(x) - \Phi_0(x)\Big) + \\ + \lambda^{-1}(x)\Psi^{-1}(x)A_{-1}(x,\lambda)\Psi(x) =: B_0(x) + B_{-1}(x,\lambda).$$

Ясно, что м.-ф. $B_0(x)$ и $B_{-1}(x,\lambda)$ обладают указанными в формулировке леммы свойствами. Лемма 1.12 доказана. □

Считаем далее, что м.-ф. $\hat{\Psi}(x)$ и $\hat{\Phi}(x,\lambda)$ в формуле (1.74) выбраны так, как это сделано в лемме 1.12.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение (или, точнее, систему интегральных уравнений)

$$Z(x,\lambda) = \\ = E + \int\limits_L^x \exp\left(-\int\limits_a^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) B(t,\lambda) \exp\left(\int\limits_a^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) Z(t,\lambda)\,dt, \tag{1.78}$$

где L есть $n \times n$ матрица с компонентами $l(i,j)$ (интеграл от матрицы с нижним пределом интегрирования в виде матрицы L понимается как матрица интегралов от соответствующих компонент с нижними пределами интегрирования $l(i,j)$ для компоненты с номером (i,j)). Совершенно ясно, что матричное решение уравнения (1.78) является решением системы (1.75).

Производя в (1.78) замену

$$Z(x,\lambda) = \exp\left(-\int\limits_a^x \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) U(x,\lambda) \exp\left(\int\limits_a^x \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right), \tag{1.79}$$

получим следующее уравнение

$$U(x,\lambda) =$$
$$= E + \int\limits_L^x \exp\left(-\int\limits_x^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) B(t,\lambda)U(t,\lambda)\exp\left(\int\limits_x^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\,dt. \quad (1.80)$$

Решив это уравнение, которое будем называть вспомогательным интегральным уравнением, получим доказательство основной теоремы 1.9.

1.2.3 Решение вспомогательного интегрального уравнения и доказательство основной теоремы

Найдем решение вспомогательного интегрального уравнения (1.80), а точнее, системы интегральных уравнений.

Пусть, как и раньше, $E_k(f)_1$ наилучшее приближение скалярной функции $f(x) \in L_1[a,b]$ в метрике пространства $L_1[a,b]$ алгебраическими многочленами степени не выше k. Если $F \in \mathfrak{L}_1[a,b]$, то положим $\mathfrak{E}_k(F) := \max\limits_{ij} E_k(\{F\}_{ij})_1$.

Лемма 1.13. *Для любого достаточно большого натурального числа s и $\lambda \in \Omega$, $|\lambda| \geqslant R$, где $R \gg 1$, справедлива оценка*

$$d(\lambda) := \max_{i\neq j} \max_{(x,\tau)\in\Delta_{ij}} \left| \int\limits_\tau^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \{B_0(t)\}_{ij}\,dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \theta_1\left(\mathfrak{E}_s(B_0) + \theta_2 \frac{s^2}{|\lambda|}\right), \quad (1.81)$$

где

$$\Delta_{ij} := \big\{(x,\tau) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant \tau \leqslant x\big\} \text{ при } i < j,$$
$$\Delta_{ij} := \big\{(x,\tau) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leqslant x \leqslant b,\ x \leqslant \tau \leqslant b\big\} \text{ при } i < j,$$
$$\theta_1 := \max_{ij} \exp\left(\int\limits_a^b |\chi_{0ij}(\xi)|\,d\xi\right), \quad \theta_2 := 2\eta_1\eta_4 + \eta_1^2\eta_2\eta_4 + \eta_1\eta_5 + \eta_1\eta_3\eta_4,$$
$$\eta_1 := \max_{i\neq j}\left\|\frac{1}{\chi_{ij}(x)}\right\|_\infty, \quad \eta_2 := \max_{i\neq j}\|\chi'_{ij}(x)\|_1,$$
$$\eta_3 := \max_{i\neq j}\|\chi_{0ij}(x)\|_1,\ \eta_4 := 2C(1,\infty)\beta_0, \quad \beta_0 := |||B_0(x)|||_1,\ \eta_5 := 2C(1)\beta_0,$$

а константы $C(\cdot,\cdot)$ *и* $C(\cdot)$ *те же, что и в лемме* 1.8.

Доказательство. Зафиксируем индексы i и j. Пусть для определенности $i < j$. Случай $i > j$ рассматривается аналогично.

Обозначим через $b_s(t)$ алгебраический многочлен наилучшего приближения степени не выше s функции $\{B_0(t)\}_{ij}$ в метрике пространства $L_1[a,b]$.

Справедливо представление

$$\int_\tau^x \exp\left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\{B_0(t)\}_{ij}\,dt =$$
$$= \int_\tau^x \exp\left(\int_x^t \chi_{ij}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\Big(\{B_0(t)\}_{ij} - b_s(t)\Big)\,dt +$$
$$+ \int_\tau^x \exp\left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) b_s(t)\,dt =: I_{1s}(x,\tau,\lambda,i,j) + I_{2s}(x,\tau,\lambda,i,j). \quad (1.82)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (1.82) отдельно.

В силу неравенств (1.67) для первого слагаемого в (1.82) имеем

$$|I_{1s}(x,\tau,\lambda)| \leqslant \theta_1 \int_a^b \Big|\{B_0(t)\}_{ij} - b_s(t)\Big|\,dt = \theta_1 E_s(\{B_0\}_{ij})_1 \leqslant \theta_1 \mathfrak{E}_s(B_0). \quad (1.83)$$

В $I_{2s}(x,\tau,\lambda,i,j)$ интегрируем один раз по частям. Получим

$$I_{2s}(x,\tau,\lambda,i,j) = \frac{1}{\lambda}\int_\tau^x \frac{1}{\chi_{ji}(t)} \exp\left(\int_x^t \chi_{oji}(\xi)\,d\xi\right) b_s(t)\,d_t \exp\left(\lambda \int_x^t \chi_{ji}(\xi)\,d\xi\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\chi_{ji}(t)} \exp\left(\int_x^t \chi_{0ji}(\xi)\,d\xi\right) b_s(t) \exp\left(\lambda \int_x^t \chi_{ji}(\xi)\,d\xi\right)\right)\Bigg|_{t=\tau}^{t=x} -$$
$$- \frac{1}{\lambda}\int_\tau^x \frac{\chi'_{ji}(t)}{\chi^2_{ji}(t)} \exp\left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) b_s(t)\,dt -$$
$$- \frac{1}{\lambda}\int_\tau^x \frac{\chi_{0ji}(t)}{\chi_{ji}(t)} \exp\left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) b_s(t)\,dt -$$
$$- \frac{1}{\lambda}\int_\tau^x \frac{1}{\chi_{ji}(t)} \exp\left(\int_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) b'_s(t)\,dt. \quad (1.84)$$

Так как функции $\chi_{ji}(x)$ при $i \neq j$ не обращаются в нуль и являются непрерывными, то $\eta_1 := \max_{i\neq j} \left\| \dfrac{1}{\chi_{ij}}(x) \right\|_\infty < +\infty$. На основании этого, с учетом неравенств (1.67), из (1.84) следует неравенство

$$\left|I_{2s}(x,\tau,\lambda,i,j)\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\theta_1\Big(2\|b_s(x)\|_\infty\eta_1 + \|b_s(x)\|_\infty\eta_1^2 \max_{i\neq j}\|\chi'_{ij}(x)\|_1 + \\ + \|b_s(x)\|_\infty\eta_1 \max_{i\neq j}\|\chi_{0ij}(x)\|_1 + \|b'_s(x)\|_1\eta_1\Big). \quad (1.85)$$

Обозначим $\eta_2 := \max_{i\neq j}\|\chi'_{ij}(x)\|_1$, $\eta_3 := \max_{i\neq j}\|\chi_{0ij}(x)\|_1$.

Применяя лемму 1.8, получим при достаточно больших s

$$\|b_s\|_\infty \leqslant C(1,\infty)s^2\|b_s\|_1 \leqslant 2C(1,\infty)s^2\|\{B_0\}_{ij}\|_1 \leqslant \eta_4 s^2,$$
$$\|b'_s\|_1 \leqslant C(1)s^2\|b_s\|_1 \leqslant 2C(1)s^2\|\{B_0\}_{ij}\|_1 \leqslant \eta_5 s^2,$$

где $\eta_4 := 2C(1,\infty)\beta_0$, $\beta_0 := |||B_0(x)|||_1$, $\eta_5 := 2C(1)\beta_0$.

Таким образом,

$$|I_{2s}(x,\tau,\lambda,i,j)| \leqslant \frac{s^2}{|\lambda|}\theta_1\Big(2\eta_1\eta_4 + \eta_1^2\eta_2\eta_4 + \eta_1\eta_5 + \eta_1\eta_3\eta_4\Big) \leqslant \frac{s^2}{|\lambda|}\theta_1\theta_2. \quad (1.86)$$

Из (1.82), (1.83) и (1.86) следует утверждение леммы 1.13. □

Следующая лемма вытекает из предыдущей леммы.

Лемма 1.14. *Если $\lambda \in \Omega$, то $d(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся оценкой (1.81), которая справедлива для всех достаточно больших s. Возьмем в качестве s функцию

$$s = s(|\lambda|) := \left[\sqrt[4]{|\lambda|}\right].$$

Так как $s \to \infty$ при $|\lambda| \to \infty$, то утверждение леммы становится очевидным. □

Лемма 1.15. *При условиях* $\mathbf{1}^\circ$–$\mathbf{3}^\circ$ *решение уравнения* (1.80) *в области* Ω *имеет асимптотическое представление*

$$U(x,\lambda) = E + \mathcal{E}(x,\lambda), \quad (1.87)$$

где $\mathcal{E}(x,\lambda)$ при $|\lambda| \gg 1$ есть абсолютно непрерывная по $x \in [a,b]$ м.-ф., для которой справедлива оценка

$$|||\mathcal{E}(\cdot,\lambda)|||_\infty \leqslant C\left(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (1.88)$$

здесь $\delta(\lambda)$ *определяется формулой* (1.73). *При этом* $\delta(\lambda) \to 0$, *когда* $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$. *Если, кроме того, выполнено условие* $\mathbf{4}^\circ$), *то* $\mathcal{E}(x,\lambda)$ *в области* Ω *при* $|\lambda| \gg 1$ *является аналитической по* λ *м.-ф. в пространстве* $\mathfrak{W}_1^1[a,b]$.

Доказательство. Решение уравнения (1.80) при $\lambda \in \Omega$ будем искать методом последовательных подстановок в виде ряда

$$U(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x,\lambda),$$

нулевым членом которого является $U_0(x,\lambda) = E$, а k-й член равен

$$U_k(x,\lambda) = \\ = \int\limits_L^x \exp\left(-\int\limits_x^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) B(t,\lambda)U_{k-1}(t,\lambda)\exp\left(\int\limits_x^t \Phi(\xi,\lambda)\,d\xi\right) dt \quad (1.89)$$

или в покомпонентной записи

$$\big\{U_k(x,\lambda)\big\}_{ij} = \int\limits_{l(i,j)}^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B(t,\lambda)U_{k-1}(t,\lambda)\big\}_{ij}\,dt. \quad (1.90)$$

Обозначим $\gamma_k(\lambda) = |||U_k(\cdot,\lambda)|||_\infty$, $k \geqslant 0$. Очевидно, $\gamma_0(\lambda) = 1$.

Зафиксируем i и j и рассмотрим формулу (1.90) при $k = 1$. В соответствии с леммой 1.12

$$\{U_1(x,\lambda)\}_{ij} = \int\limits_{l(i,j)}^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B(t,\lambda)\big\}_{ij}\,dt = \\ = \int\limits_{l(i,j)}^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B_0(t)\big\}_{ij}\,dt + \\ + \int\limits_{l(i,j)}^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B_{-1}(t,\lambda)\big\}_{ij}\,dt.$$

Следовательно, при $|\lambda| \geqslant R$ и $\lambda \in \Omega$

$$\gamma_1(\lambda) \leqslant \left(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\right). \quad (1.91)$$

Так как $\delta(\lambda) \leqslant d(\lambda)$, а по лемме 1.14 $d(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$, то будем иметь также $\gamma_1(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$.

Далее, из (1.90) при $k = 2$ следует

$$\{U_2(x,\lambda)\}_{ij} = \int\limits_{l(i,j)}^{x} \exp\left(\int\limits_{x}^{t} \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B(t,\lambda)U_1(t,\lambda)\big\}_{ij}\,dt =$$

$$= \int\limits_{l(i,j)} \exp\left(\int\limits_{x}^{t} \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \sum_{r=1}^{n} \big\{B(t,\lambda)\big\}_{ir}\big\{U_1(t,\lambda)\big\}_{rj}\,dt.$$

Отсюда получим при $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \geqslant R$

$$\gamma_2(\lambda) \leqslant \theta_1\gamma_1(\lambda) \sum_{r=1}^{n} \int\limits_{a}^{b} \left|\big\{B(t,\lambda)\big\}_{ir}\right| dt \leqslant \theta_1\beta n\gamma_1(\lambda), \tag{1.92}$$

где обозначено $\beta := \max\limits_{|\lambda|\geqslant R} |||B(x,\lambda)|||_1$.

Рассмотрим теперь формулу (1.90) при $k \geqslant 3$. Подставляя в правую часть вместо члена $U_{k-1}(x,\lambda)$ его выражение по этой же формуле и используя представление (1.77), получим

$$\big\{U_k(x,\lambda)\big\}_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \int\limits_{l(i,j)}^{x} \exp\left(\int\limits_{x}^{t} \chi_{ij}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B(t,\lambda)\big\}_{ir} \times$$

$$\times \int\limits_{l(r,j)}^{t} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \sum_{m=1}^{n} \big\{B(\tau,\lambda)\big\}_{rm}\big\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\big\}_{mj}\,d\tau\,dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \int\limits_{l(i,j)}^{x} \exp\left(\int\limits_{x}^{t} \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B_0(t)\big\}_{ir} \times$$

$$\times \int\limits_{l(r,j)} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B(\tau,\lambda)\big\}_{rm}\big\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\big\}_{mj}\,d\tau\,dt +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \int\limits_{l(i,j)} \exp\left(\int\limits_{x}^{t} \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \big\{B_{-1}(t,\lambda)\big\}_{ir} \int\limits_{l(r,j)} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \times$$

$$\times \big\{B(\tau,\lambda)\big\}_{rm}\big\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\big\}_{mj}\,d\tau\,dt =: I(x,\lambda) + J(x,\lambda). \tag{1.93}$$

Второе слагаемое в (1.93) оценим при $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \geqslant R$ следующим образом

$$|J(x,\lambda)| \leqslant \theta_1^2 |||U_{k-2}(\cdot,\lambda)|||_\infty \sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_a^b \left|\left\{B_{-1}(t,\lambda)\right\}_{ir}\right| dt \int\limits_a^b \left|\left\{B(\tau,\lambda)\right\}_{rm}\right| d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \theta_1^2 \beta\beta_{-1} n^2 \frac{1}{|\lambda|}\gamma_{k-2}(\lambda), \quad (1.94)$$

где $\beta_{-1} = \max\limits_{|\lambda|\geqslant R}\left\{|\lambda|\, |||B_{-1}(\cdot,\lambda)|||_1\right\}$. При получении оценки (1.94) была использована лемма 1.12.

Оценим теперь слагаемое $I(x,\lambda)$ в (1.93). Рассмотрим для определенности случай $i \leqslant j$. Случай $i > j$ рассматривается аналогично.

Учитывая, что $\left\{B_0(t)\right\}_{ii} = 0$, представим $I(x,\lambda)$ в виде

$$I(x,\lambda) = \sum_{r=1}^{i-1}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\left\{B_0(t)\right\}_{ir}\int\limits_a^t \exp\left(\int\limits_t^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\times$$
$$\times\left\{B(\tau,\lambda)\right\}_{rm}\left\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\right\}_{mj}\,d\tau\,dt + \sum_{r=i+1}^{j-1}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\left\{B_0(t)\right\}_{ir}\times$$
$$\times\int\limits_a^t \exp\left(\int\limits_t^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\left\{B(\tau,\lambda)\right\}_{rm}\left\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\right\}_{mj}\,d\tau\,dt+$$
$$+\sum_{r=j}^{n}\sum_{m=1}^{n}\int\limits_a^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\left\{B_0(t)\right\}_{ir}\int\limits_b^t \exp\left(\int\limits_t^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\times$$
$$\times\left\{B(\tau,\lambda)\right\}_{rm}\left\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\right\}_{mj}\,d\tau\,dt =: \sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{n}\sum_{m=1}^{n} H_{rm}(x,\lambda). \quad (1.95)$$

Отметим, что так как $i \neq r$, то в каждом слагаемом $H_{rm}(x,\lambda)$ обязательно присутствует хотя бы одна экспонента

$$\exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right) \quad \text{или} \quad \exp\left(\int\limits_t^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)$$

с ненулевым показателем. Рассмотрим, например, слагаемые $H_{rm}(x,\lambda)$ при $r \leqslant i-1$. Остальные слагаемые рассматриваются аналогично.

Переставим в $H_{rm}(x,\lambda)$ порядок интегрирования. Получим

$$H_{rm}(x,\lambda)=\int\limits_a^x\int\limits_\tau^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\bigl\{B_0(t)\bigr\}_{ir}\exp\left(\int\limits_t^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\,dt\times$$
$$\times\bigl\{B(\tau,\lambda)\bigr\}_{rm}\bigl\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\bigr\}_{mj}\,d\tau=:\int\limits_a^x K_r(x,\tau,\lambda)\bigl\{B(\tau,\lambda)\bigr\}_{rm}\bigl\{U_{k-2}(\tau,\lambda)\bigr\}_{mj}\,d\tau.$$

Отсюда при $\lambda\in\Omega$ и $|\lambda|\geqslant R$ следует

$$|H_{rm}(x,\lambda)|\leqslant\beta\gamma_{k-2}(\lambda)\max_{a\leqslant\tau\leqslant x\leqslant b}|K_r(x,\tau,\lambda)|.$$

Для оценки максимума в последнем неравенстве представим функцию $K_r(x,\tau,\lambda)$ в виде

$$K_r(x,\tau,\lambda)=$$
$$=\int\limits_\tau^x \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\bigl\{B_0(t)\bigr\}_{ir}\exp\left(\left(\int\limits_x^\tau-\int\limits_x^t\right)\chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\,dt=$$
$$=\exp\left(\int\limits_x^\tau \chi_{jr}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\int\limits_\tau^x\exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ri}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\bigl\{B_0(t)\bigr\}_{ir}\,dt.$$

Отсюда на основании леммы 1.13 и неравенств (1.67) получим

$$\max_{a\leqslant\tau\leqslant x\leqslant b}|K_r(x,\tau,\lambda)|\leqslant\theta_1 d(\lambda)\leqslant\theta_1^2\left(\mathfrak{E}_s(B_0)+\theta_2\frac{s^2}{|\lambda|}\right),$$

где s — произвольное достаточно большое натуральное число.

Таким образом,

$$|H_{rm}(x,\lambda)|\leqslant\beta\theta_1^2\left(\mathfrak{E}_s(B_0)+\theta_2\frac{s^2}{|\lambda|}\right)\gamma_{k-2}(\lambda).$$

Учитывая эту оценку, а также соотношения (1.93)–(1.95), получим при $\lambda\in\Omega$ и $|\lambda|\geqslant R$ следующее неравенство

$$\gamma_k(\lambda)\leqslant n^2\beta\theta_1^2\left(\mathfrak{E}_s(B_0)+\theta_2\frac{s^2}{|\lambda|}+\beta_{-1}\frac{1}{|\lambda|}\right)\gamma_{k-2}(\lambda). \tag{1.96}$$

Рассмотрим произвольное достаточно малое $\varepsilon>0$ и подберем такое натуральное число $s(\varepsilon)$, что $\mathfrak{E}_{s(\varepsilon)}(B_0)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Зафиксируем это $s(\varepsilon)$. Пусть, далее, число $R_\varepsilon \geqslant R$ таково, что $\theta_2 \dfrac{s^2(\varepsilon)}{|\lambda|} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\beta_{-1}\dfrac{1}{|\lambda|} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$. Тогда для $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$ получим из (1.96) при $k \geqslant 3$

$$\gamma_k(\lambda) \leqslant n^2\theta_1^2\beta\varepsilon\gamma_{k-2}(\lambda). \tag{1.97}$$

Из (1.92) и (1.97) следует, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\lambda)$ сходится при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$, $\lambda \in \Omega$. При этом справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\lambda) \leqslant C_\varepsilon\gamma_1(\lambda). \tag{1.98}$$

Зафиксируем какое-нибудь ε и R_ε, для которого выполняется (1.98), и рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^\infty U_k(x,\lambda)$. Так как

$$|||\sum_{k=0}^\infty U_k(\cdot,\lambda)|||_\infty \leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\lambda), \quad |\lambda| \geqslant R_\varepsilon, \quad \lambda \in \Omega,$$

то при этих значениях λ рассматриваемый ряд равномерно и абсолютно сходится к непрерывной по x и аналитической по λ (в случае выполнения условия $\mathbf{4}^\circ$) м.-ф. $E + \mathcal{E}(x,\lambda)$, причем справедлива оценка (1.88). Последнее заключение следует из (1.91) и (1.98).

Покажем теперь, что

$$\mathcal{E}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^\infty U_k(x,\lambda)$$

есть абсолютно непрерывная м.-ф. по x при каждом фиксированном $\lambda \in \Omega$, $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$. Для этого достаточно доказать, что $\sum\limits_{k=1}^\infty |||U_k'(\cdot,\lambda)|||_1$ есть сходящийся числовой ряд.

Используя формулу (1.90) при $k \geqslant 1$, получим для п.в. $x \in [a,b]$

$$\left\{U_k'(x,\lambda)\right\}_{ij} = \chi_{ij}(x,\lambda)\int\limits_{l(i,j)}^{x} \exp\left(\int\limits_x^t \chi_{ji}(\xi,\lambda)\,d\xi\right)\left\{B(t,\lambda)U_{k-1}(t,\lambda)\right\}_{ij}dt + \\ + \left\{B(x,\lambda)U_{k-1}(x,\lambda)\right\}_{ij}.$$

Если положить $\eta_6 := \max\limits_{i\neq j}\|\chi_{ij}(x)\|_\infty$ и использовать обозначения из леммы 1.13, то из последнего равенства следует оценка

$$\left\|\left\{U_k'(\cdot,\lambda)\right\}_{ij}\right\|_1 \leqslant \Big(\eta_6|\lambda| + \eta_3\Big)\theta_1 n\left(\beta_0 + \beta_{-1}\frac{1}{|\lambda|}\right)\gamma_{k-1}(\lambda) + \\ + n\left(\beta_0 + \beta_{-1}\frac{1}{|\lambda|}\right)\gamma_{k-1}(\lambda) \leqslant 2n\theta_1\beta_0\eta_6|\lambda|\gamma_{k-1}(\lambda)$$

при $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \geqslant R_1 \geqslant R_\varepsilon$.

Из последней оценки и установленного ранее факта, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\lambda)$ сходится при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $|\lambda| \geqslant R_\varepsilon$, $\lambda \in \Omega$, получим, что и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |||U_k'(\cdot,\lambda)|||_1$ сходится при любом $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \geqslant R_1$, а следовательно, $\mathcal{E}(x,\lambda)$ есть абсолютно непрерывная м.-ф. по x.

Лемма 1.15 полностью доказана. □

Теперь можно доказать основную теорему 1.9.

Доказательство основной теоремы 1.9. Подставляя (1.79) в (1.74) и учитывая, что $\hat{\Psi}(x) = \Psi(x)$, $\hat{\Phi}_0(x) = \Phi_0(x)$, $\hat{\Phi}_1(x) = \Phi_1(x)$ (см. лемму (1.12)), найдем

$$Y(x,\lambda) = \Psi(x) \exp\left(\int_a^x \Phi(\xi,\lambda)\, d\xi\right) \exp\left(-\int_a^x \Phi(\xi,\lambda)\, d\xi\right) U(x,\lambda) =$$
$$= \Psi(x) U(x,\lambda) \exp\left(\int_a^x \Phi(\xi,\lambda)\, d\xi\right).$$

Затем, по лемме 1.15 при $\lambda \in \Omega$ и $|\lambda| \gg 1$ будем иметь

$$Y(x,\lambda) = \Psi(x)\Big(E + \mathcal{E}(x,\lambda)\Big) \exp\left(\int_a^x \Phi(\xi,\lambda)\, d\xi\right) =$$
$$= \Psi(x)\Big(E + \mathcal{E}(x,\lambda)\Big) \exp\left(\lambda \int_a^x \Phi_1(\xi)\, d\xi\right) \exp\left(\int_a^x \Phi_0(\xi)\, d\xi\right) =$$
$$= \tilde{\Psi}(x) \exp\left(\lambda \int_a^x \Phi_1(\xi)\, d\xi\right) \Big(E + \mathcal{E}(x,\lambda)\Big)$$

где $\tilde{\Psi}(x)$ обозначает ту же м.-ф., что и в формулировке теоремы, причем справедлива оценка

$$\mathcal{E}(x,\lambda) = O\left(\delta(\lambda) + \frac{1}{|\lambda|}\right).$$

Таким образом, формула (1.71) получена. При этом $\mathcal{E}(x,\lambda)$ — абсолютно непрерывная м.-ф. по x.

Из леммы 1.15 также следует, что если выполняется условие $\mathbf{4}^\circ$), то $\mathcal{E}(x,\lambda)$ и $Y(x,\lambda)$ есть аналитические м.-ф. по $\lambda \in \Omega$ при $|\lambda| \gg 1$ в пространстве $\mathfrak{W}_1^1[a,b]$.

Тем самым, теорема 1.9 полностью доказана. □

1.2.4 Случай дифференциального уравнения общего вида с коэффициентами, зависящими от параметра

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \lambda p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \lambda^2 p_2(x,\lambda)y^{(n-2)} + \ldots + \lambda^n p_n(x,\lambda)y = 0, \qquad (1.99)$$

где

$$p_i(x,\lambda) = p_{i1}(x) + \frac{1}{\lambda}p_{i0}(x) + \frac{1}{\lambda^2}\hat{p}_i(x,\lambda), \quad i = \overline{1,n}.$$

Это уравнение с помощью замены

$$y_1 := y, \quad y_{i+1} := \frac{1}{\lambda^i}\frac{d^i y}{dx^i}, \quad i = \overline{1,n-1}, \qquad (1.100)$$

приводится к системе вида (1.65), где

$$A(x,\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_n(x,\lambda) & -p_{n-1}(x,\lambda) & -p_{n-2}(x,\lambda) & \ldots & -p_1(x,\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda), \quad (1.101)$$

а для коэффициентов справедливы формулы

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_{n1}(x) & -p_{n-11}(x) & -p_{n-21}(x) & \cdots & -p_{11}(x) \end{pmatrix},$$

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -p_{n0}(x) & -p_{n-10}(x) & -p_{n-10}(x) & \cdots & -p_{10}(x) \end{pmatrix},$$

$$A_{-1}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\hat{p}_n(x,\lambda) & -\hat{p}_{n-1}(x,\lambda) & -\hat{p}_{n-2}(x,\lambda) & \cdots & -\hat{p}_1(x,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Переформулируем условия и результат, даваемый теоремой 1.9, к рассматриваемому случаю.

Очевидно, условие **1°**) перейдет в условие:

5°) *$p_{i1} \in W_1^1[a,b]$, $p_{i0} \in L_1[a,b]$, $\|\hat{p}_i(\cdot,\lambda)\|_1 = O(1)$ для всех $i = \overline{1,n}$, причем последняя оценка выполняется при $|\lambda| > R$, где $R \gg 1$.*

Условие **2°**) примет вид:

6°) *корни $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ характеристического уравнения*

$$\det(\varphi E - A_1) = \varphi^n + p_{11}\varphi^{n-1} + \ldots + p_{n1}, \tag{1.102}$$

различны между собой и отличны от нуля при всех значениях $x \in [a,b]$.

Условие **3°**) останется прежним. Для удобства переформулируем его здесь под другим номером

7°) *существует бесконечное подмножество Ω области $|\lambda| > R$, в котором при всех $x \in [a,b]$ выполняются неравенства*

$$\mathrm{Re}(\lambda\varphi_1(x)) \leqslant \mathrm{Re}(\lambda\varphi_2(x)) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{Re}(\lambda\varphi_n(x)) \tag{1.103}$$

при соответствующей нумерации функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$.

Условие **4°**) перейдет в условие:

8°) *$\hat{p}_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, аналитические в пространстве $L_1[a,b]$ функции по λ при $|\lambda| > R$.*

Ввиду специфики м.-ф. $A_1(x)$, в качестве матрицы $\Psi(x)$ можно взять матрицу Вандермонда корней $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, φ_n, то есть

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \cdots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Справедливы также формулы

$$\varphi_{0k}(x) = -\frac{\Psi_{nk}(x)}{\Psi_0(x)}\left(\sum_{j=0}^{n-1} p_{n-j0}(x)\varphi_k^j(x)\right) -$$

$$- \frac{\varphi_k'(x)}{\Psi_0(x)}\left(\sum_{j=1}^{n-1} j\varphi_k^{j-1}(x)\Psi_{j+1k}(x)\right), \quad k = \overline{1,n},$$

где $\Psi_0(x) := \det\Psi(x)$, а $\Psi_{ij}(x)$ есть алгебраические дополнения к элементу $\{\Psi(x)\}_{ij}$ в матрице $\Psi(x)$.

Из формул (1.100) видно, что если

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_{11}(x,\lambda) & y_{12}(x,\lambda) & \cdots & y_{1n}(x,\lambda) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ y_{n1}(x,\lambda) & y_{n2}(x,\lambda) & \cdots & y_{nn}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

есть ф.м.р. системы (1.65) с матрицей $A(x,\lambda)$, определяемой формулой (1.101), то функции $y_{11}(x,\lambda)$, $y_{12}(x,\lambda)$, $\ldots$, $y_{1n}(x,\lambda)$ составляют ф.с.р. уравнения (1.99).

Воспользовавшись теоремой 1.9, получим следующий результат.

Теорема 1.16. *Пусть выполнены условия* **5°**)–**7°**). *Тогда в области* Ω *при* $|\lambda| \gg 1$ *существует ф.с.р.* $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, $\ldots$, $y_n(x,\lambda)$ *уравнения* (1.99), *допускающая асимптотическое представление при* $|\lambda| \to \infty$

$$y_k^{(m)}(x,\lambda) = (\lambda\varphi_k(x))^m \eta_k(x) e^{\lambda \int\limits_a^x \varphi_k(\xi)\,d\xi} \Big(1 + \varepsilon_{km}(x,\lambda)\Big), \ k = \overline{1,n}, \ m = \overline{0,n-1},$$

где

$$\eta_k(x) := \exp\left(\int\limits_a^x \varphi_{0k}(\xi)\,d\xi\right),$$

$\varepsilon_{km}(x,\lambda)$ — *абсолютно непрерывные по* x *функции,* $\varepsilon_{km}(x,\lambda) = O\left(\delta(\lambda) + \dfrac{1}{|\lambda|}\right)$, *при этом* $\delta(\lambda)$ *определяется формулой* (1.73) *и* $\delta(\lambda) \to 0$, *когда* $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Omega$. *Если, кроме того, выполняется условие* **8°**), *то решения* $y_k(x,\lambda)$ *есть аналитические функции по* $\lambda \in \Omega$ *при* $|\lambda| \gg 1$.

Замечание 1.17. Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y - \lambda r(x)y = 0. \tag{1.104}$$

является частным случаем уравнения (1.99). Если применить к этому уравнению теорему 1.16 и учесть специфику коэффициентов этого уравнения, а также специфику вхождения параметра λ в это уравнение, то получим результат, аналогичный доказанному ранее в разделе 1.1 (см. теорему 1.1). Формулировку этого результата опускаем. $\square$

Глава 2. Равносходимость и оценка разности частичных сумм разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье

В данной главе рассматривается несамосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор L, определяемый на отрезке $[0,1]$ д.в.

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y, \tag{2.1}$$

где $p_j(x) \in L_1[0,1]$, $j = \overline{1,n}$, с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной, и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \big(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\big) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

На протяжении второй главы выполняется основное предположение: краевые условия (2.2) регулярны по Биркгофу.

Определение регулярных по Биркгофу краевых условий в рассматриваемом случае (когда присутствует коэффициент $p_1(x)$ в д.в.) дается, например, в [144, с. 25] и совершенно идентично определению регулярности в [135, с. 66–67], т. е. наличие коэффициента $p_1(x)$ в д.в. никак не влияет на свойство регулярности. В подразделе 2.2 в определении 2.15 вводится понятие регулярных краевых условий для более общего квазидифференциального (к.д.) оператора.

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) или, что то же самое, по корневым функциям (к.ф.) оператора L и в обычный, а также модифицированный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм (или, коротко, скорости равносходимости). Модификация тригонометрического ряда Фурье заключается в применении к обычному тригонометрическому ряду Фурье вполне конкретного ограниченного оператора V, выражающегося через коэффициент $p_1(x)$, а к разлагаемой функции оператора V^{-1}.

Краткая история вопроса изложена во Введении.

Получены оценки разности частичных сумм разложений в терминах общих (интегральных) модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $n-1$-й производной и достаточные условия равномерной внутри интервала (0,1) равносходимости. Из общих оценок разности частичных сумм получаются соответствующие оценки в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями [185] и, в частности, логарифмическими функциями.

Глава состоит из пяти разделов.

В первом разделе вводятся необходимые понятия и основные определения, формулируются полученные результаты о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Также даются оценки разности частичных сумм этих разложений. Теоремы формулируются в терминах общих модулей непрерывности, модулей непрерывности, которые оцениваются сверху медленно меняющимися функциями, и, в частности, логарифмическими функциями. При этом фигурируют частичные суммы обычного тригонометрического ряда Фурье и частичные суммы модифицированного тригонометрического ряда Фурье.

Во втором разделе доказываются вспомогательные результаты, необходимые для получения основных результатов главы. При этом существенно используется результат из первой главы об асимптотике системы решений уравнения $\ell(y) - \lambda y = 0$.

В третьем разделе доказываются теоремы равносходимости и оценки разности частичных сумм разложений в ряды по к.ф. оператора L и в модифицированный тригонометрический ряд Фурье.

В четвертом разделе приводится известная теорема равносходимости Штейнгауза разложений в обычный тригонометрический ряд Фурье и модифицированный тригонометрический ряда Фурье. Формулируются и доказываются аналоги этой теоремы для общих модулей непрерывности, модулей непрерывности, которые оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями.

В пятом разделе на основе аналогов теоремы Штейнгауза и результатов третьего раздела доказываются теоремы равносходимости и оценки разности частичных суммы разложений в ряд по с.п.ф. оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Результаты, изложенные в рассматриваемой главе, опубликованы в разных вариантах в работах автора диссертации [31; 32; 36; 144; 149; 167; 172].

2.1 Основные понятия и определения. Формулировки полученных результатов

Далее будут использоваться следующие модули непрерывности:

$$\omega(f,\delta)_p = \sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int\limits_0^{1-h}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \quad \text{в случае } 1\leqslant p<\infty,$$
$$\omega(f,\delta)_\infty = \sup_{0<h\leqslant\delta}\sup_{t\in[0,1-h]}\big|f(t+h)-f(t)\big|. \tag{2.3}$$

В данной главе удобно под $L_\infty[0,1]$ понимать пространство $C[0,1]$.

Введём следующие пространства функций при $\alpha>0$ и $1\leqslant r\leqslant\infty$:

$$H_r^\alpha[0,1] = \left\{f\in L_r[0,1]:\ \omega(f,\delta)_r = O\left(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta}\right),\ \delta\to+0\right\}.$$

Считаем, что $H_r^0[0,1] = L_r[0,1]$.

Наряду с оператором L вида (2.1)–(2.2) потребуется линейный дифференциальный оператор L_0, порожденный простейшим д.в. и периодическими краевыми условиями

$$\ell_0(y) := y^{(n)},\quad y^{(k-1)}(0)-y^{(k-1)}(1)=0,\quad k=\overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Числа $\lambda_{0\nu} := (2\nu\pi i)^n$, $\nu = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, есть с.з. оператора L_0, а функции $e_\nu(x) := \exp(2\nu\pi ix)$ есть соответствующие собственные функции (с.ф.), т. е. система с.ф. есть обычная тригонометрическая система в экспоненциальной форме.

Пусть λ_ν, $\nu=0,1,2,\ldots$, есть с.з. оператора L. Асимптотика с.з. оператора L может быть получена аналогично тому, как это сделано, например, в [135, с. 74–75], но с использованием асимптотических формул для решений дифференциального уравнения $\ell(y)-\lambda y=0$, даваемых теоремой 1.1 в подразделе 1.1.1 (в теореме 1.1 нужно взять $a_0(x)\equiv1$, $a_j(x)=p_j(x)$ при $j=\overline{1,n}$, $[a,b]=[0,1]$), вместо асимптотических формул [135, с. 58–59] (см. об этом далее теорему 2.16). Главные члены асимптотики с.з. в случае наличия коэффициента $p_1(x)$ в д.в. или его отсутствия одни и те же.

Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ в результате удаления множеств $\bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty}K_\delta(\lambda_\nu)$ и $\bigcup\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}K_\delta(\lambda_{0\nu})$, где используется обозначение $K_\delta(c)=\{\lambda:|\lambda-c|<\delta\}$, $\delta>0$ и достаточно мало.

Из асимптотики с.з. оператора L следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, и контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с некоторого достаточно большого m, лежат в области D_δ. Между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν, начиная с некоторого m. Рассмотрение таких контуров обусловлено структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0, соответственно, а через $G(x,\xi,\lambda)$ и $G_0(x,\xi,\lambda)$ — соответствующие функции Грина. Пусть

$$S_m(f,x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_\lambda f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\, d\xi\, d\lambda,$$

$$\sigma_m(f,x) \equiv S_{0m}(f,x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}\int\limits_0^1 G_0(x,\xi,\lambda)f(\xi)\, d\xi\, d\lambda.$$

Известно [135, с. 92], что $S_m(f,x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν, для которых $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора L_0, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$, для которых $|\nu| \leqslant m$, то есть частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$

$$\sigma_m(f,x) := \sum_{k=-m}^{m} (f,e_k)e_k(x), \quad \text{где} \quad (f,e_k) := \int\limits_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0,1]$ обозначим

$$\Phi_m(x) = S_m(f,x) - V\sigma_m(V^{-1}f,x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f,x) - \sigma_m(f,x), \tag{2.5}$$

где

$$V(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int\limits_0^x p_1(\tau)\, d\tau\right). \tag{2.6}$$

Далее используется условие

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad p_1(x) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая теорема об оценке разности частичных сумм $\Phi_m(x)$ в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функций $f(x)$ и коэффициента $p_1(x)$.

Теорема 2.1. *При условии* (2.7) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и натурального* $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,L,K)A_m, \tag{2.8}$$

где

$$A_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m\, \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{k^2\ln m}{m}\right) \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}.$$

Для формулировки следующей теоремы об оценке разности частичных сумм $\Psi_m(x)$ введем обозначения:
— для функции $h(x) \in C[0,1]$ положим

$$H_q(h,m) := \left(\int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\, h^q(\xi)\, d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при } \ 1 \leqslant q < \infty, \quad H_\infty(h,m) := 1, \tag{2.9}$$

— для функции $g(x) \in L_q[0,1]$ положим

$$\theta_q(g,\delta) := \sup_{\tau\in[0,\delta]} \theta_{1q}(g,\tau) \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty \ \text{ и } \ \theta_\infty(g,\delta) \equiv 1, \tag{2.10}$$

где

$$\theta_{1q}(g,\tau) := \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\!\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \ \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty, \tag{2.11}$$

$$\hat\theta_q(g,\delta) = \sup_{\tau\in[0,\delta]} \hat\theta_{1q}(g,\tau) \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty \ \text{ и } \ \hat\theta_\infty(g,\delta) \equiv 1, \tag{2.12}$$

где

$$\hat\theta_{1q}(g,\tau) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\!\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(g,\frac{1}{k}\right) + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \ \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty. \tag{2.13}$$

Теорема 2.2. *При условии* (2.7) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и натурального* $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,L,K)B_m, \tag{2.14}$$

где

$$B_m =$$
$$= \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m\, \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + 1 + H_q\big(\hat{\theta}_q(p_1,\cdot),m\big) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{k^2\ln m}{m}\right) \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (2.15)$$

Если на $\omega(f,\delta)_r$ и $\omega(p_1,\delta)_q$ наложить такие условия, при которых $A_m \to 0$ или $B_m \to 0$ при $m \to \infty$, можно получить различные достаточные условия равносходимости соответствующих разложений с оценками разности частичных сумм.

Интересные результаты получаются в случае, когда функции $\omega(f,\delta)_r$ и $\omega(p_1,\delta)_q$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями.

Понятие медленно меняющейся функции тесно связано с понятием правильно меняющейся функции. Это понятие было введено И. Караматой [17] в 1930 году (при этом рассматривались непрерывные функции).

Правильно меняющиеся функции примыкают к степенным, хорошо изучены и имеют многочисленные приложения, в основном, благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа. Теорию таких функций можно найти в книгах [5; 22; 30; 185].

Определение 2.3. Положительная непрерывная в проколотой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого} \quad \gamma > 0, \quad (2.16)$$

называется *правильно меняющейся функцией (п.м.ф.) в нуле порядка* $\rho \in \mathbb{R}$. П.м.ф. в нуле порядка $\rho = 0$ называется *медленно меняющейся функцией (м.м.ф.) в нуле.* Функция $\Omega(\delta)$ называется *п.м.ф. в бесконечности порядка* $\rho \in \mathbb{R}$, если функция $\Omega\left(\frac{1}{\delta}\right)$ есть п.м.ф. в нуле того же порядка. □

Замечание 2.4. На самом деле в общем определении п.м.ф. (а, значит, и м.м.ф.) фигурируют измеримые функции, но мы ограничимся только непрерывными п.м.ф. (а, значит, и непрерывными м.м.ф.). □

Приведем наиболее известный (эталонный) пример [185, с. 48–50] медленно меняющейся функции в нуле, которая наиболее часто используются.

Пример 2.5 (**медленно меняющейся функции в 0**)**.** Пусть заданы k вещественных чисел α_1, α_2, ..., α_k. Положим

$$\Omega(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_1}\left(\log\log\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(\log\log\ldots\log\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha_k},$$

где $\log b$ есть логарифм по какому-то основанию $c > 0$, $c \neq 1$. Тогда $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в 0. $\square$

Функции, рассмотренные в этом примере, образуют так называемую логарифмическую мультишкалу, имеющую ряд приложений в теории функциональных пространств.

Далее используется условие

$$\omega(f,\delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1,\delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta \to +0, \tag{2.17}$$

а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2.6 (**медленного изменения (МИ)**)**.** Существует интервал $(0,\varepsilon_0)$, на котором

(а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;

(б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией и обладает свойством $\Omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$;

(в) для любого $\gamma > 0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma) \sim \Omega(\delta)$ при $\delta \to +0$, то есть существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$C_1\Omega(\delta) \leqslant \Omega(\delta^\gamma) \leqslant C_2\Omega(\delta).$$

Замечание 2.7. Предположение (б) вполне естественно, так как модуль непрерывности обладает этим свойством. $\square$

Замечание 2.8. Произвольная м.м.ф., вообще говоря, не обладает свойством (в). Однако наиболее часто используемые на практике м.м.ф. обладают этим свойством. В частности, такая м.м.ф., как в примере 2.5. $\square$

Справедливы следующие теоремы равносходимости.

Теорема 2.9. *Если выполняются условия* (2.7), (2.17), *функции* $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ *удовлетворяют условию МИ и таковы, что*

$$\ln m\,\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty, \tag{2.18}$$

то для любого компакта $K \subset (0{,}1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0,$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\ln m\,\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)+\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right). \tag{2.19}$$

Теорема 2.10. *Пусть выполняются условия (2.7), (2.17), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию МИ. Если, к тому же, выполняются ещё и условия (2.18) и*

$$\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2,m) \to \infty \quad \textit{при} \quad m\to\infty, \tag{2.20}$$

то для любого компакта $K \subset (0{,}1)$ имеет место равносходимость

$$\lim_{m\to\infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0,$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\ln m\,\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)H_q(\Omega_2,m)+\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)+\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right). \tag{2.21}$$

Далее используется условие

$$\omega(f,\delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^{\alpha} 1/\delta}\right), \quad \omega\big(p_1,\delta\big)_q = O\left(\frac{1}{\ln^{\beta} 1/\delta}\right), \quad \delta\to+0, \tag{2.22}$$

т. е. $f(x) \in H_r^{\alpha}[0{,}1]$ и $p_1(x) \in H_q^{\beta}[0{,}1]$.

Следствиями теорем 2.9 и 2.10 являются следующие теоремы.

Теорема 2.11. *Если выполняются условия (2.7), (2.22) и $\alpha+\beta>1$, то для любого компакта $K \subset (0{,}1)$ имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Phi_m(x)\|_{C(K)} = 0,$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\Phi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m}+\frac{1}{\ln^{\alpha} m}+\frac{1}{\ln^{\beta} m}\right). \tag{2.23}$$

Теорема 2.12. *Если выполняются условия* (2.7), (2.22) *и* $\alpha+\beta>1$, *то для любого компакта* $K\subset(0{,}1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty}\|\Psi_m(x)\|_{C(K)}=0,$$

и справедливы следующие оценки при $m\gg 1$:
— *в случае* $\beta q=1$ *и* $1\leqslant q<\infty$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)}\leqslant C(f{,}p_1{,}K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta}m}+\frac{\left(\ln\ln m\right)^{1/q}}{\ln^{\alpha}m}+\frac{1}{\ln^{\beta}m}\right), \tag{2.24}$$

— *а в остальных случаях* ($\beta q\neq 1$ *и* $1\leqslant q<\infty$ *или* $q=\infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)}\leqslant C(f{,}p_1{,}K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta}m}+\frac{1}{\ln^{\alpha}m}+\frac{1}{\ln^{\beta}m}\right). \tag{2.25}$$

Замечание 2.13. В работе автора диссертации [144] рассмотрен простейший линейный дифференциальный оператор вида

$$y''+p_1(x)y',\qquad y(0)=y(1)=0, \tag{2.26}$$

в котором проявляются все трудности общего случая, а именно, такое же влияние свойств коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$ на оценку разности частичных сумм разложений, как и в общем случае. Было показано, что сформулированные выше теоремы точны в следующем смысле:
1) если $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{q}>1$, $q>1$, $r>1$, $r_1>r$, $q_1>q$, но по-прежнему $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{q_1}>1$, то существуют функции $f(x)\in L_r[0{,}1]$ и $p_1(x)\in L_q[0{,}1]$, положительная константа $C(q_1{,}r_1)$ и возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\left|\Psi_{m_k}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant C(q_1{,}r_1)m_k^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}-1}\to+\infty;$$

2) если $r=\infty$, $q=1$ или $r=1$, $q=\infty$, $\alpha+\beta<1$, $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1>\beta$, но по-прежнему $\alpha_1+\beta_1<1$, то существуют функции $f(x)\in H_r^{\alpha}[0{,}1]$, $p_1(x)\in H_q^{\beta}[0{,}1]$, положительная константа $C(\alpha_1{,}\beta_1)$ и некоторая возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\left|\Psi_{m_k}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant C(\alpha_1{,}\beta_1)\frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}m_k}\to+\infty.$$

□

2.2 Вспомогательные результаты

Рассмотрим более широкий класс квазидифференциальных (к.д.) операторов M, определяемых к.д. выражением

$$y^{[n]} \equiv D_n y, \tag{2.27}$$

где

$$\begin{gathered} y^{[k]} \equiv D_k y := i\frac{d}{dx}y^{[k-1]} + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(x)y^{[j]}, \quad k = n, n-1, \dots 1, \\ y^{[0]} \equiv D_0 y := y, \quad p_{kj} \in L[0,1], \end{gathered} \tag{2.28}$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \big(a_{kj}y^{[j]}(0) + b_{kj}y^{[j]}(1)\big) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.29}$$

Квазипроизводные (2.28) есть частный случай квазипроизводных (1.12), в которых $p_{kk}(x) \equiv 1$. Чтобы не вводить излишние обозначения, используем для квазипроизводных (2.28) те же самые обозначения, что и для квазипроизводных (1.12).

Если в (2.27) положить

$$p_{kj}(x) := 0,\ k = \overline{1,n-1},\ j = \overline{0,k-1}; \quad p_{nj}(x) := \frac{i^n}{i^j}p_{n-j}(x),\ j = \overline{0,n-1},$$

то получим $y^{[n]} = i^n \ell(y)$, то есть д.в. (2.1) есть частный случай к.д. выражения (2.27). Следовательно, класс дифференциальных операторов L вида (2.1)–(2.2) содержится в классе к.д. операторов M.

В случае к.д. оператора M роль коэффициента $p_1(x)$ играют коэффициенты $p_{k,k-1}(x)$, $k = \overline{1,n}$.

Далее положим $\lambda = -(i\rho)^n$ и введём угловые области (секторы) S_k, аналогичные тем, которые были введены подразделе 1.1.1, а именно:

$$S_k = \left\{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\pi k}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{\pi(k+1)}{n}\right\}, \quad k = \overline{0,2n-1}.$$

Как и в подразделе 1.1.1, S обозначает любую из областей S_k, а T_c — области, полученные из S сдвигом на вектор $-c$. Через T будем обозначать некоторую область T_c.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ есть различные корни n-й степени из -1. Это корни характеристического уравнения $\omega^n + 1 = 0$ д.в. (2.27), которые будем кратко называть характеристиками. Занумеруем их для $\rho \in T_c$ таким образом, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_1 \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_n. \tag{2.30}$$

Пусть ν есть такой индекс, что

$$\operatorname{Re}(\rho + c)\omega_\nu \leqslant 0 \leqslant \operatorname{Re}(\rho + c)\omega_{\nu+1}.$$

Ясно, что $\nu = \mu$ при $n = 2\mu$ для всех $\rho \in T_c$ и $\nu = \mu - 1$ или $\nu = \mu$ при $n = 2\mu - 1$ в зависимости от того, какой половине области T_c принадлежит ρ (под половинами области T_c понимаются подобласти, на которые делит T_c его биссектриса).

Как и в подразделе 1.1.1, обозначим $\rho_j = \rho\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$.

Кроме того, характеристики $\{\omega_j\}$ для области S_k по необходимости будем обозначать через $\{\omega_j^{(k)}\}$, чтобы подчеркнуть ту область, для которой проведена нумерация характеристик.

Рассмотрим на отрезке [0,1] к.д. уравнение

$$y^{[n]} - \lambda y = 0 \quad \text{или} \quad y^{[n]} + (i\rho)^n y = 0, \tag{2.31}$$

где к.д. выражение $y^{[n]}$ определено формулами (2.27)–(2.28).

Предположим, что $p_{k,k-1} \in L_r[0,1]$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$, $p_{kj} \in L_1[0,1]$ $(k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-2})$.

Далее будут использоваться асимптотические формулы для ф.с.р. уравнения (2.31), даваемые теоремой 1.7 в подразделе 1.1.2. Переформулируем эту теорему для основного отрезка [0,1].

Теорема 2.14. *Во всякой области T, уравнение* (2.31) *имеет n линейно независимых решений $y_1(x,\rho), \ldots, y_n(x,\rho)$, регулярных по $\rho \in T$ при $|\rho| \gg 1$ и имеющих асимптотику при $k = \overline{1,n}$, $m = \overline{0,n-1}$*

$$y_k^{[m]}(x,\rho) = (i\rho\omega_k)^m W(x) e^{\rho\omega_k x}\Big(1 + O(\varphi(\rho))\Big), \tag{2.32}$$

где

$$W(x) := \exp\left(\frac{i}{n}\int\limits_0^x \sum_{\gamma=1}^n p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\,d\xi\right), \quad \varphi(\rho) := \mathsf{g}(\rho) + \frac{1}{|\rho|},$$

$$\mathsf{g}(\rho) := \max_{j\neq s}\max_{\gamma=\overline{1,n}}\left\|\int\limits_{c_{js}}^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\,d\xi\right\|. \tag{2.33}$$

Константа c_{js} равна либо 0, либо 1, в зависимости от условий $j < s$ или $j > s$. При этом

$$\mathsf{g}(\rho) \to 0 \quad \textit{при} \quad |\rho| \to \infty. \tag{2.34}$$

Далее, наряду с ф.с.р.(2.32) для уравнения (2.31), аналитической в области T при $|\rho| \gg 1$, будет использоваться ф.с.р.

$$\tilde{y}_j(x,\lambda), \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.35}$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_k^{[m-1]}(0,\lambda) = \delta_{km}, \quad k,m = \overline{1,n},$$

где δ_{km} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $\tilde{y}_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$, есть целые аналитические функции по λ.

Не нарушает общности, можно считать, что краевые условия (2.29) нормированные [135, с. 65–66], т.е. имеют вид

$$U_m(Y) = U_{m0}(Y) + U_{m1}(Y) = 0,\ m = \overline{1,n}, \tag{2.36}$$

где

$$U_{m0}(Y) = \alpha_m y^{[\varkappa_m]}(0) + \sum_{j=0}^{k_m-1} \alpha_{mj} y^{[j]}(0),$$

$$U_{m1}(Y) = \beta_m y^{[\varkappa_m]}(1) + \sum_{j=0}^{k_m-1} \beta_{mj} y^{[j]}(1),$$

$$n-1 \geqslant \varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n \geqslant 0,\ \varkappa_{m+2} < \varkappa_m,\ \prod_{m=1}^{n} \big(|\alpha_m| + |\beta_m|\big) \neq 0,$$

$$Y = \big(y^{[0]}, \ldots, y^{[n-1]}\big)^T.$$

Суммарный порядок краевых условий (2.36) обозначим

$$\varkappa := \sum_{m=1}^{n} \varkappa_m.$$

На основании теоремы 2.14 среди всевозможных краевых условий (2.36) выделим класс регулярных краевых условий.

Рассмотрим фиксированную область S, для которой справедливы неравенства (2.30) ($c = 0$).

Определение 2.15. Нормированные краевые условия (2.36) назовем регулярными (по Биркгофу), если отличны от нуля числа:

(а) η_0 и η_1 при $n = 2\mu - 1$, где $\eta_0 + s\eta_1 = \det \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, $a_{ij} = \alpha_i\omega_j^{\varkappa_i}$ при $j = \overline{1,\mu-1}$, $a_{i\mu} = \bigl(\alpha_i + sW(1)\beta_i\bigr)\omega_\mu^{\varkappa_i}$, $a_{ij} = \beta_i\omega_j^{\varkappa_i}$ при $j = \overline{\mu+1,n}$;

(б) η_1 и η_{-1} при $n = 2\mu$, где $\eta_{-1}s^{-1} + \eta_0 + \eta_1 s = \det \|b_{ij}\|_{i,j=1}^n$, $b_{ij} = \alpha_i\omega_j^{\varkappa_i}$ при $j = \overline{1,\mu-1}$, $b_{i\mu} = \bigl(\alpha_i + sW(1)\beta_i\bigr)w_\mu^{\varkappa_i}$, $b_{i\mu+1} = \bigl(\alpha_i + s^{-1}W(1)\beta_i\bigr)\omega_{\mu+1}^{\varkappa_i}$, $b_{ij} = \beta_i\omega_j^{\varkappa_i}$ при $j = \overline{\mu+2,n}$. $\square$

Определение 2.15 отличается от традиционного определения [135, с. 66–67] лишь наличием при s и s^{-1} множителя $W(1)$ и, таким образом, не зависит от выбора области S [135, с. 67–69], на основе которой были занумерованы числа $\{\omega_k\}$. Более того, так как $W(1) \neq 0$, то эти определения выделяют один и тот же класс краевых условий.

Обозначим при $n = 2\mu - 1$ через $\zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(0)}$ корни уравнения $\eta_1\zeta + \eta_0 = 0$, отвечающего области S_m с m, соответственно, нечетным или четным, а в случае $n = 2\mu$ через ζ' и ζ'' корни уравнения $\eta_1\zeta^2 + \eta_0\zeta + \eta_{-1} = 0$, отвечающего области S_0.

На основании асимптотики (2.32) и соотношения (2.34) совершенно аналогично тому, как это сделано в [135, с. 73–83], может быть доказана следующая теорема.

Теорема 2.16. *С.з. оператора M, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две последовательности: $\check\lambda_k' = -(i\check\rho_k')^n$, $\check\lambda_k'' = -(i\check\rho_k'')^n$ при натуральных $k \geqslant k_0 \gg 1$, при этом для $\check\rho_k'$ и $\check\rho_k''$ справедливы следующие асимптотические формулы:*

(а) при нечетном n, $n = 2\mu - 1$,

$$\check\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu^{(1)}}\Bigl((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta^{(1)} + o(1)\Bigr),$$

$$\check\rho_k'' = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\Bigl((-1)^{\mu}2k\pi i + \ln_0\zeta^{(0)} + o(1)\Bigr),$$

где $\ln_0\zeta$ обозначает фиксированную ветвь натурального логарифма такую, что $\ln_0 1 = 0$, $o(1) \to 0$ при $k \to \infty$;

(б) для четного n, $n = 2\mu$,

$$\check\rho_k' = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\Bigl((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0\zeta' + o(1)\Bigr),$$

$$\check{\rho}_k'' = \frac{1}{\omega_\mu^{(0)}}\Big((-1)^{\mu+1}2k\pi i + \ln_0 \zeta'' + o(1)\Big).$$

В первом случае все с.з., начиная с некоторого, простые, а во-втором — все с.з., начиная с некоторого, простые или двукратные.

Считаем далее, что $\rho \in \hat{S}$, где $\hat{S} = S_0 \cup S_1$ при $n = 4l - 1$, $4l + 1$, $4l$ и $\hat{S} = S_0 \cup S_{2n-1}$ при $n = 4l + 2$. Обозначим через $\hat{S}(\delta)$ область, получающуюся из $\hat{S}$ в результате удаления всех $\check{\rho}_k'$ и $\check{\rho}_k''$ вместе с круговыми окрестностями достаточно малого раиуса $\delta > 0$.

Пусть $\check{R}_\lambda = (M - \lambda E)^{-1}$ есть резольвента к.д. оператора M. При $\rho \in \hat{S}(\delta)$ резольвента является ограниченным интегральным оператором, отображающим пространство $L_1[0,1]$ в D_M — область определения к.д. оператора M (отметим, что все рассуждения из [135, гл. I], касающиеся оператора L, тривиальным образом переносятся на оператор M).

Ядро резольвенты $\check{R}_\lambda$ или, по-другому, функцию Грина к.д. оператора M обозначим через $\check{G}(x,t,\rho)$. Для функции Грина справедлива следующая формула при $\rho \in \hat{S}$, аналогичная формуле [135, с. 47, формула (34)] для оператора L:

$$\check{G}(x,t,\rho) = \frac{(-1)^n \check{\mathscr{H}}(x,t,\rho)}{\check{\Delta}(\rho)}, \tag{2.37}$$

где

$$\check{\mathscr{H}}(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & \dots & y_n(x,\rho) & \check{g}(x,t,\rho) \\ U_1(Y_1) & \dots & U_1(Y_n) & U_{1x}(\check{J}(x,t,\rho)) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_n(Y_1) & \dots & U_n(Y_n) & U_{nx}(\check{J}(x,t,\rho)) \end{vmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\check{g}(x,t,\rho) = (-1)^{\chi(t-x)} \frac{\check{\mathscr{W}}_1(x,t,\rho)}{2i\check{\mathscr{W}}(t,\rho)}, \tag{2.39}$$

$$\check{\Delta}(\rho) = \det \|U_m(Y_k)\|_{m,k=1}^n, \quad \check{\mathscr{W}}(t,\rho) = \det \|y_k^{[n-m]}(t,\rho)\|_{m,k=1}^n, \tag{2.40}$$

функция $\check{\mathscr{W}}_1(x,t,\rho)$ есть определитель, получающийся из определителя $\check{\mathscr{W}}(t,\rho)$ в результате замены первой строки строкой $\big(y_1(x,\rho),\, y_2(x,\rho),\, \dots,\, y_n(x,\rho)\big)$;

$$\check{J}(x,t,\rho) = \big(D_{0x}\check{g}(x,t,\rho), \dots, D_{n-1,x}\check{g}(x,t,\rho)\big)^T;$$

индекс x у линейных форм U_m и квазипроизводных D_j означает, что они применяются по переменной x; $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$ есть ф.с.р. (2.35) уравнения (2.31);

наконец, $\chi(x)$ есть функция Хевисайда, то есть функция, равная 0 при $x < 0$ и 1 при $x \geqslant 0$.

Обозначим

$$B(x,t,\rho) = \begin{cases} -\dfrac{1}{in(i\rho)^{n-1}} \displaystyle\sum_{s=1}^{\nu} \omega_s \exp\big(\rho\omega_s(x-t)\big), & x \geqslant t, \\ \dfrac{1}{in(i\rho)^{n-1}} \displaystyle\sum_{s=\nu+1}^{n} \omega_s \exp\big(\rho\omega_s(x-t)\big), & x < t. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение квазипроизводные, которые тесно связаны с квазипроизводными (2.28):

$$\begin{gathered} z^{\{k\}} \equiv D_k^* z = -i\frac{d}{dx} z^{\{k-1\}} + \sum_{j=0}^{k-1} r_{kj}(x) z^{\{j\}}, \quad k = n,n-1,\ldots,1, \\ z^{\{0\}} \equiv D_0^* z = z, \quad r_{kj}(x) = p_{n-j,n-k}(x). \end{gathered} \tag{2.41}$$

Лемма 2.17. *Если краевые условия* (2.36) *регулярны и* $\rho \in \hat{S}(d)$*, то в каждом из отрезков* $[0,x]$ *и* $[x,1]$ *функция* $\check{G}_{t^s}^{\{s\}}(x,t,\rho)$ $(s = \overline{0,n-1})$ *непрерывно квазидифференцируема по* t *и*

$$\check{G}_{t^s}^{\{s\}}(x,t,\rho)\Big|_{t=x-0} - \check{G}_{t^s}^{\{s\}}(x,t,\rho)\Big|_{t=x+0} = \delta_{s,n-1}, \quad \check{G}_{t^n}^{\{n\}}(x,t,\rho) = \lambda \check{G}(x,t,\rho), \tag{2.42}$$

где δ_{kj} *есть символ Кронекера* ($\delta_{kj} = 1$ *при* $k = j$ *и* $\delta_{kj} = 0$ *при* $k \neq j$).

Доказательство. Обозначим

$$z_j(t,\rho) = \frac{\check{\mathscr{W}}_{1j}(t,\rho)}{\check{\mathscr{W}}(t,\rho)}, \quad j = \overline{1,n},$$

где $\check{\mathscr{W}}_{kj}(t,\rho)$ — алгебраические дополнения элемента (k,j) в определителе $\check{\mathscr{W}}(t,\rho)$. Непосредственным подсчетом можно убедиться, что справедливы равенства при $s = \overline{0,n-1}$ и $j = \overline{1,n}$

$$z_j^{\{s\}}(t,\rho) = \frac{\check{\mathscr{W}}_{s+1,j}(t,\rho)}{\check{\mathscr{W}}(t,\rho)}, \quad z_j^{\{n\}}(t,\rho) = \lambda z_j(t,\rho). \tag{2.43}$$

Пусть $\check{\mathscr{W}}_s(x,t,\rho)$ — определители, получающиеся из определителя $\check{\mathscr{W}}(t,\rho)$ удалением s-й строки и добавлением в качестве первой строки — строки функций $\big(y_1(x,\rho), y_2(x,\rho), \ldots, y_n(x,\rho)\big)$. Тогда из (2.43) следует при $s = \overline{0,n-1}$

$$\begin{gathered} \check{g}_{t^s}^{\{s\}}(x,t,\rho) = (-1)^{\chi(t-x)} \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} y_j(x) z_j^{\{s\},\rho}(t) = (-1)^{\chi(t-x)+s} \frac{\check{\mathscr{W}}_{s+1,j}(x,t,\rho)}{2i\check{\mathscr{W}}(t,\rho)}, \\ \check{g}_{t^n}^{\{n\}}(x,t,\rho) = \lambda \check{g}(x,t,\rho). \end{gathered} \tag{2.44}$$

Так как t входит в $\check{G}^{\{s\}}_{t^s}(x,t,\rho)$ через $\check{g}^{\{s\}}_{t^s}(x,t,\rho)$ то из (2.44) следуют формулы (2.42). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.18. *Если краевые условия* (2.36) *регулярны по Биркгофу и* $\rho \in \hat{S}(\delta)$, *то имеют место следующие асимптотические формулы при* $|\rho| \to \infty$

$$\begin{gathered}\check{G}^{[k],\{s\}}_{x^k,t^s}(x,t,\rho) = (-1)^s i^{s+k} B^{(k+s)}_{x^k,t^s}(x,t,\rho)\frac{W(x)}{W(t)}+ \\ + O\biggl(\frac{\varphi(\rho)}{|\rho|^{n-1-s-k}}\Bigl(\bigl|e^{\rho_\nu(x-t)}\bigr|\chi(x-t) + \bigl|e^{\rho_{\nu+1}(x-t)}\bigr|\chi(t-x)\Bigr)+ \\ + \frac{1}{|\rho|^{n-1-s-k}}\Bigl(\bigl|e^{\rho_\nu(1+x-t)}\bigr| + \bigl|e^{\rho_{\nu+1}(x-1)+\rho_\nu(1-t)}\bigr|+ \\ + \bigl|e^{\rho_\nu x-\rho_{\nu+1}t}\bigr| + \bigl|e^{\rho_{\nu+1}(x-1-t)}\bigr|\Bigr)\biggr), \quad (2.45)\end{gathered}$$

где $0 \leqslant k+s \leqslant n-1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $x \geqslant t$ и проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям [135, с. 93–97].

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (2.31) возьмем систему решений (2.32).

Из формул (2.37)–(2.40) и (2.44) следует, что если умножить 1-й, 2-й, ..., ν-й столбец определителя (2.38) на $\frac{1}{2}z_1(t,\rho)$, $\frac{1}{2}z_2(t,\rho)$, ..., $\frac{1}{2}z_\nu(t,\rho)$, а $\nu+1$-й, $\nu+2$-й, ..., n-й столбец на $-\frac{1}{2}z_{\nu+1}(t,\rho)$, $\frac{1}{2}z_{\nu+2}(t,\rho)$, ..., $\frac{1}{2}z_n(t,\rho)$, соответственно, сложить с последним столбцом, затем применить операторы D_k по x и D^*_s по t и разложить полученный определитель по последнему столбцу, то получим

$$\begin{gathered}\check{G}^{[k],\{s\}}_{x^k,t^s}(x,t,\rho) = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{\nu} y^{[k]}_j(x,\rho) z^{\{s\}}_j(t,\rho)+ \\ + \sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^l}{\check{\Delta}(\rho)}\left(\sum_{j=1}^{\nu} U_{l1}(Y_j) z^{\{s\}}_j(t,\rho) - \sum_{j=1}^{\nu} U_{l0}(Y_j) z^{\{s\}}_j(t,\rho)\right)\check{\mathscr{A}}^{[k]}_{l,x^k}(x,\rho), \quad (2.46)\end{gathered}$$

где

$$\check{\mathscr{A}}^{[k]}_{l,x^k}(x,\rho) = \begin{vmatrix} y^{[k]}_1(x,\rho) & U_1(Y_1) & \dots & U_{l-1}(Y_1) & U_{l+1}(Y_1) & \dots & U_n(Y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{[k]}_n(x,\rho) & U_1(Y_n) & \dots & U_{l-1}(Y_n) & U_{l+1}(Y_n) & \dots & U_n(Y_n) \end{vmatrix}^T.$$

Если $\rho \in \hat{S}(\delta)$ то из доказательства теоремы 2.16 следует, что

$$|\check{\Delta}(\rho)| \geqslant C(\delta)|\rho|^{\varkappa}, \tag{2.47}$$

где константа $C(\delta) > 0$.

Используя асимптотику (2.32), получим

$$\check{\mathscr{W}}(t,\rho) = W^n(t)(i\rho)^{\frac{(n-1)n}{2}}(-1)^{[\frac{n}{2}]}\Omega\big(1 + O(\varphi(\rho))\big), \tag{2.48}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x,

$$\check{\mathscr{W}}_{s+1,j}(t,\rho) = W^{n-1}(t)(i\rho)^{\frac{(n-1)n}{2}-n+s+1}e^{-\rho\omega_j t}\times \\ \times (-1)^{[\frac{n-1}{2}]+n+1}\Omega_{n-s,j}\big(1 + O(\varphi(\rho))\big), \tag{2.49}$$

где

$$\Omega = \det\left(\omega_m^{l-1}\right)_{l,m=1}^n,$$

а $\Omega_{n-s,j}$ есть алгебраическое дополнение к элементу $(n-s,j)$ в Ω.

Подставляя (2.48)–(2.49) в (2.43) и учитывая, что

$$\frac{\Omega_{n-s,j}}{\Omega} = -\frac{\omega_j^{s+1}}{n},$$

получим

$$z_j^{\{s\}}(t,\rho) = -\frac{1}{W(t)}\,\frac{\omega_j^{s+1}}{n(i\rho)^{n-s-1}}\,e^{-\rho\omega_j t}\big(1 + O(\varphi(\rho))\big). \tag{2.50}$$

Далее, из асимптотики (2.32) следует

$$U_{l0}(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{\varkappa_l}\big(\alpha_l + O(\varphi(\rho))\big),$$

$$U_{l1}(Y_j) = (i\rho\omega_j)^{\varkappa_l}W(1)e^{\rho\omega_j}\big(\beta_l + O(\varphi(\rho))\big),$$

$$\check{\mathscr{A}}^{[k]}_{l,x^k}(x,\rho) = O\left(\frac{|\rho|^{\varkappa+k}}{|\rho|^{\varkappa_l}}\left|e^{\sum\limits_{j=\nu+1}^{n}\rho\omega_j}\right|\left(\left|e^{\rho\omega_\nu x}\right| + \left|e^{\rho\omega_{\nu+1}(x-1)}\right|\right)\right).$$

Из этих оценок, а также из оценки (2.47), асимптотики (2.50), формулы (2.46) следует асимптотика (2.45) при $x \geqslant t$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить асимптотику (2.45) и при $x < t$.

Тем самым лемма 2.18 доказана. $\square$

Обозначим через M_0 к.д. оператор, порожденный к.д. выражением

$$D_{0n}y,$$

где

$$D_{0k}y = i\frac{d}{dx}(D_{0,k-1}y), \quad k = n,n-1,\dots,1, \quad D_{00}y = y,$$

и краевыми условиями

$$D_{0m}y(0) - D_{0m}y(1) = 0, \quad m = \overline{0,n-1}. \tag{2.51}$$

Далее потребуются также квазипроизводные

$$D^*_{0k}z = -i\frac{d}{dx}(D^*_{0,k-1}z), \quad k = n,n-1,\dots,1, \quad D^*_{00}z = z.$$

Очевидно, выражения $D_{0n}y$ и $D^*_{0n}z$ получаются из выражений D_ny и D^*_nz, соответственно, при $p_{kj}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$.

Далее, все объекты, связанные с оператором M_0, будем обозначать теми же буквами, что и в случае оператора M, но с индексом 0.

Аналогично [135, с. 71–72], используя определение 2.15, можно установить, что краевые условия (2.51) регулярны, числа $\check{\rho}'_{0k}$ и $\check{\rho}''_{0k}$ совпадают с первыми слагаемыми выражений для $\check{\rho}'_k$ и $\check{\rho}''_k$ (см. теорему 2.16), $k_0 = 0$.

Непосредственным подсчётом можно убедиться, что разложение по с.п.ф. оператора M_0 есть не что иное, как разложение в обычный тригонометрический ряд Фурье по системе $\{\exp(2k\pi ix)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$.

Асимптотические формулы (2.45) для функции Грина $\check{G}_0(x,t,\rho)$ оператора M_0 очевидным образом упростятся. Так как $p_{kj}(x) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,k-1}$, то $\mathsf{g}_0(\rho) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\varphi_0(\rho) \equiv \frac{1}{|\rho|}.$$

Пусть $\check{\mu}_i$ $(i = 0,1,2,\dots)$ есть числа $\check{\rho}'_k$ и $\check{\rho}''_k$, занумерованные в порядке неубывания их модулей и с учетом кратности с.з. Аналогично, пусть $\check{\mu}_{0i}$ $(i = 0,1,2,\dots)$ есть числа $\check{\rho}'_{0k}$, $\check{\rho}''_{0k}$ $(\check{\mu}_{00} = 0)$, также занумерованные в порядке неубывания их модулей и с учетом кратности с.з.

Рассмотрим в λ-плоскости последовательность круговых контуров $\check{\Gamma}_m$ $(m = 1,2,\dots)$ радиуса $\check{r}_m$, для которых $(2\pi m)^n < \check{r}_m < \big(2\pi(m+1)\big)^n$, а их прообразы $\check{\gamma}_m$ при отображении $\lambda = -(i\rho)^n$ целиком лежат в области $\hat{S}(\delta) \cap \hat{S}_0(\delta)$.

Ясно, что такие контуры существуют в силу асимптотических формул для чисел $\check{\rho}'_k$, $\check{\rho}''_k$, $\check{\rho}'_{0k}$, $\check{\rho}''_{0k}$, которые получены в теореме 2.16.

Кроме того, из тех же асимптотических формул вытекает, что при достаточно большом m между соседними контурами $\check{\Gamma}_m$ и $\check{\Gamma}_{m+1}$ лежат ровно по два с.з. операторов M и M_0. Эти контуры аналогичны контурам Γ_m, введенным в разделе 2.1, но с учетом того, что вместо операторов L и L_0 сейчас рассматриваются операторы M и M_0.

Из тех же самых соображений, что и в разделе 2.1, рассмотрение именно таких контуров обусловлено также еще и структурой обыкновенного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Далее также потребуется результат, который доказан в [202] (аналог классической теоремы Джексона). Сформулируем его в виде следующей леммы.

Лемма 2.19 ([202]). *Если $f(x) \in L_p[0,1]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, то*

$$E_k(f)_p \leqslant \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_p, \tag{2.52}$$

где $E_k(f)_p$ есть наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[0,1]$ алгебраическими многочленами степени не выше k.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.20. *Если $p_{\gamma,\gamma-1} \in L_q[0,1]$, $\gamma = \overline{1,n}$, и выполняется условие (2.7), то для достаточно больших $|\rho|$ $(\rho \in T)$ и любого натурального $k \gg 1$*

$$\varphi(\rho) = O\left(\left(\sum_{\gamma=1}^{n} E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q + \frac{k^2}{|\rho|}\right) \sum_{1 \leqslant j < s \leqslant n} \chi_{js}(\rho,r) + \frac{k^{2/q}}{|\rho|}\right), \tag{2.53}$$

где

$$\chi_{js}(\rho,r) := \left(\frac{1 - \exp(r \operatorname{Re} \rho_{js})}{\operatorname{Re} \rho_{sj}}\right)^{1/r}, \quad 1 \leqslant r < \infty, \quad \chi_{js}(\rho,\infty) := 1. \tag{2.54}$$

Доказательство. Пусть $\rho \in T$. Из определения функции $\varphi(\rho)$, данное в теореме 2.14, следует, что

$$\varphi(\rho) := \mathsf{g}(\rho) + \frac{1}{|\rho|} \tag{2.55}$$

и при этом справедливо представление

$$\mathsf{g}(\rho) = \max_{j<s} \max_{\gamma=\overline{1,n}} \left\{ \left\| \int_0^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\, d\xi \right\|, \left\| \int_x^1 e^{\rho_{sj}(x-\xi)} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\, d\xi \right\| \right\}. \quad (2.56)$$

Будем проводить оценки, например, для первого слагаемого справа в (2.56). Рассуждения для второго слагаемого в (2.56) совершенно аналогичны.

Обозначим

$$f_{js\gamma}(x,\rho) := \int_0^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\, dt.$$

Пусть $P_{\gamma k}(x)$ есть алгебраический многочлен наилучшего приближения степени не выше k функции $p_{\gamma,\gamma-1}(x)$ в метрике пространства $L_q[0,1]$.

Справедливо представление

$$f_{js\gamma}(x,\rho) = \int_0^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} \big(p_{\gamma,\gamma-1}(\xi) - P_{\gamma k}(\xi)\big)\, d\xi + \int_0^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} P_{\gamma k}(t)\, d\xi =$$
$$= A_{1k}(x,\gamma,\rho_{js}) + A_{2k}(x,\gamma,\rho_{js}). \quad (2.57)$$

Оценим слагаемое $A_{1k}(x,\gamma,\rho_{js})$ в (2.57), используя неравенство Гёльдера. Получим

$$|A_{1k}(x,\gamma,\rho_{js})| \leqslant \|p_{\gamma,\gamma-1}(x) - P_{\gamma k}(x)\|_q \left(\int_0^x e^{r \operatorname{Re} \rho_{js}(x-\xi)}\, d\xi \right)^{1/r} =$$
$$= E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q \left(\frac{1-\exp(r \operatorname{Re} \rho_{js} x)}{r \operatorname{Re} \rho_{sj}} \right)^{1/r} \leqslant C E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q \chi_{js}(\rho,r). \quad (2.58)$$

Рассмотрим теперь $A_{2k}(x,\gamma,\rho_{js})$. Выполним один раз интегрирование по частям и воспользуемся оценками а) и б) леммы 1.8. В результате получим

$$A_{2k}(x,\gamma,\rho_{js}) = -\frac{1}{\rho_{js}} \Big(e^{\rho_{js}(x-\xi)} P_{\gamma k}(\xi) \Big)\Big|_{\xi=0}^{\xi=x} + \frac{1}{\rho_{js}} \int_0^x e^{\rho_{js}(x-\xi)} P^{(1)}_{\gamma k}(\xi)\, d\xi =$$
$$= O\left(\frac{1}{|\rho|} \|P_{\gamma k}(x)\|_\infty + \frac{1}{|\rho|} \|P^{(1)}_{\gamma k}(x)\|_q \left(\int_0^x e^{r \operatorname{Re} \rho_{js}(x-\xi)}\, d\xi \right)^{1/r} \right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{|\rho|} k^{2/q} + \frac{1}{|\rho|} k^2 \chi_{js}(\rho,r) \right). \quad (2.59)$$

Утверждение доказываемой леммы следует из соотношений (2.55)–(2.59). □

Лемма 2.21. *Если* $a_1,a_2 \in [1,\infty]$, b_1 *и* b_2 *есть не равные нулю комплексные числа,* $\zeta_R := \{z \in \mathbb{C} : z = R\exp(i\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$, $R > 0$, $\mathrm{Re}(b_1 z) \geqslant 0$ *и* $\mathrm{Re}(b_2 z) \geqslant 0$ *при* $z \in \zeta_R$, *то для интеграла*

$$J_R := \left| \int\limits_{\zeta_R} \prod_{s=1}^{2} \left(\frac{1 - \exp\big(-a_s \,\mathrm{Re}(b_s z)\big)}{\mathrm{Re}(b_s z)} \right)^{1/a_s} |dz| \right|$$

при $R \gg 1$ *справедливы оценки:*

1) $J_R \leqslant C$, *когда* $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} > 1$;

2) $J_R \leqslant C\ln R$, *когда* $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} = 1$;

3) $J_R \leqslant CR^{1-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)}$, *когда* $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} < 1$.

Доказательство. Пусть $b_1 = \beta_1 \exp i\left(\dfrac{\pi}{2} - \psi_1\right)$ и $b_2 = \beta_2 \exp i\left(\dfrac{\pi}{2} - \psi_2\right)$, где β_1, $\beta_2 > 0$. Тогда по условию $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - (\psi_j - \varphi) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ или $0 \leqslant \psi_j - \varphi \leqslant \pi$ при $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, где $j = 1,2$.

Следовательно,

$$J_R := R\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \prod_{s=1}^{2} \left(\frac{1 - \exp\big(-a_s\beta_s R\sin(\psi_s - \varphi)\big)}{\beta_s R\sin(\psi_s - \varphi)} \right)^{\frac{1}{a_s}} d\varphi.$$

Пусть для определенности $\varphi' = \psi_1 - \dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi'' = \psi_2 - \dfrac{\pi}{2}$ таковы, что выполняются неравенства $\varphi_1 \leqslant \varphi' \leqslant \varphi'' \leqslant \varphi_2$ (заметим, что тогда $\psi_1 \leqslant \psi_2$). Если это не так, то дальнейшие рассуждения тривиальным образом видоизменяются.

Справедливо представление

$$J_R = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi'} + \int\limits_{\varphi'}^{\varphi''} + \int\limits_{\varphi''}^{\varphi_2} =: J_{1R} + J_{2R} + J_{3R}. \tag{2.60}$$

В J_{3R} имеем $0 \leqslant \psi_j - \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ для $j = 1,2$. Воспользовавшись неравенствами $\dfrac{2}{\pi}\tau \leqslant \sin\tau \leqslant \tau$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и обозначая $\alpha = \max\{a_1\beta_1, a_2\beta_2\}$, $\beta = \min\{\beta_1,\beta_2\}$, получим

$$J_{3R} := R\int\limits_{\varphi''}^{\varphi_2} \prod_{s=1}^{2} \left(\pi\frac{1 - \exp\big(-\alpha R(\psi_s - \varphi)\big)}{2R\beta(\psi_s - \varphi)} \right)^{\frac{1}{a_s}} d\varphi.$$

Нетрудно заметить, что функция

$$g(\tau) = \frac{1 - \exp\big(-x(\tau - y)\big)}{\tau - y},$$

где $x > 0$ и y — любое вещественное число, является невозрастающей при $\tau \geqslant y$.

Используя этот факт, можно получить

$$J_{3R} \leqslant R \int\limits_{\varphi''}^{\varphi_2} \left(\pi \frac{1 - \exp\big(-\alpha R(\psi_1 - \varphi)\big)}{2R\beta(\psi_1 - \varphi)}\right)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant R \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\pi \frac{1 - \exp\big(-\alpha R\tau\big)}{2R\beta\tau}\right)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} d\tau = C \int\limits_{0}^{\frac{\pi\alpha R}{2}} \left(\pi \frac{1 - \exp(-\xi)}{\xi}\right)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} d\xi =$$

$$= C\left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\frac{\pi\alpha R}{2}}\right) \leqslant C_1 + C \int\limits_1^{\frac{\pi\alpha R}{2}} \xi^{-(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2})}\, d\xi. \quad (2.61)$$

Аналогичные оценки можно получить для J_{1R} и J_{2R} в (2.60).

Тогда из (2.60) следует, что оценка (2.61) будет справедлива и для J_R. Из этой оценки получаются все три утверждения доказываемой леммы.

Тем самым, лемма 2.21 доказана. □

Для доказательства основных теорем также потребуется следующая лемма, доказательство которой не представляет трудностей.

Лемма 2.22. *Если b есть ненулевое комплексное число, $|b| = \beta > 0$, выполняется неравенство $\operatorname{Re} bz \geqslant 0$ на контуре $\zeta_R = \{z \in \mathbb{C} : z = R\exp(i\varphi),\ R > 0,\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$, то при всех $R > 0$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{\zeta_R} e^{-\operatorname{Re} bz}\, |dz| \leqslant C \cdot \frac{1}{\beta} \quad (2.62)$$

при некоторой константе $C > 0$.

2.3 Доказательства теорем 2.1, 2.9 и 2.11 об оценке разности частичных сумм

Пусть, как и выше, $\check{R}_\lambda$ и $\check{R}_{0\lambda}$ есть резольвенты операторов M и M_0, соответственно, а $\check{G}(x,\xi,\rho)$ и $\check{G}_0(x,\xi,\rho)$ — соответствующие функции Грина.

Обозначим

$$\check{S}_m(f,x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\check{\Gamma}_m} \check{R}_\lambda f\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\check{\gamma}_m}\int\limits_0^1 \big(\check{G}(x,\xi,\rho)f(\xi)\, d\xi\big)\, in(i\rho)^{n-1}\, d\rho, \quad (2.63)$$

$$\sigma_m(f,x) \equiv \check{S}_{0m}(f,x) :=$$

$$:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\check{\Gamma}_m} \check{R}_{0\lambda} f\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\check{\gamma}_m}\int\limits_0^1 \big(\check{G}_0(x,\xi,\rho)f(\xi)\, d\xi\big)\, in(i\rho)^{n-1}\, d\rho. \quad (2.64)$$

Как уже было отмечено в разделе 2.1, $\check{S}_m(f,x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора M, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\check{\lambda}_\nu$, для которых $|\check{\lambda}_\nu| < \check{r}_m$, а $\sigma_m(f,x)$ есть частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ (частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.ф. оператора M_0, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\check{\lambda}_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$, для которых $|\nu| \leqslant m$), то есть, как и в разделе 2.1

$$\sigma_m(f,x) := \sum_{k=-m}^{m} (f,e_k)e_k(x), \quad \text{где} \quad (f,e_k) := \int_0^1 f(\xi)e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi.$$

Для $f(x)$ из $L_1[0,1]$ обозначим

$$\check{\Phi}_m(x) = \check{S}_m(f,x) - W(x)\sigma_m(W^{-1}f,x), \quad \check{\Psi}_m(x) = \check{S}_m(f,x) - \sigma_m(f,x), \quad (2.65)$$

где

$$W(x) = \exp\Bigg(\frac{i}{n}\int\limits_0^x \sum_{\gamma=1}^{n} p_{\gamma,\gamma-1}(\xi)\, d\xi\Bigg).$$

Теорема 2.1 есть непосредственное следствие следующей теоремы для более общего оператора, а именно, для к.д оператора M (определённого к.д. выражением (2.27) и краевыми условиями (2.29) или (2.36).

Предположим, что краевые условия (2.36) регулярны по Биркгофу в смысле определения 2.15.

Введём условие

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad p_{\gamma,\gamma-1}(x) \in L_q[0,1] \ (\gamma \in \overline{1,n}), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \quad (2.66)$$

Теорема 2.23. *При условии* (2.66) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и натурального* $m \gg 1$

$$\|\check{\Phi}_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,M,K)\check{A}_m, \tag{2.67}$$

где

$$\check{A}_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \sum_{\gamma=1}^{n} \omega\left(p_{\gamma,\gamma-1},\frac{1}{k}\right)_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(f;\frac{1}{k}\right)_r + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{k^2\ln m}{m}\right) \sum_{\gamma=1}^{n} \omega\left(p_{\gamma,\gamma-1},\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}. \tag{2.68}$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $K = [\delta,1-\delta]$, где $\delta > 0$ и достаточно мало.

Пусть $F_k(x)$ есть алгебраический многочлен наилучшего приближения степени не выше k функции $f(x)$ в метрике пространства $L_r[0,1]$. Обозначим

$$f_k(x) := f(x) - F_k(x).$$

Используя введенные обозначения, получим представление

$$\check{R}(\lambda)f - W\check{R}_0(\lambda)(W^{-1}f) = \int_0^1 \left(\check{G}(x,t,\rho) - W(x)W^{-1}(t)\check{G}_0(x,t,\rho)\right) f(t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 \left(\check{G}(x,t,\rho) - W(x)W^{-1}(t)\check{G}_0(x,t,\rho)\right) f_k(t)\,dt +$$
$$+ \int_0^1 \left(\check{G}(x,t,\rho) - W(x)W^{-1}(t)\check{G}_0(x,t,\rho)\right) F_k(t)\,dt =:$$
$$=: I_{1k}(x,\rho) + I_{2k}(x,\rho). \tag{2.69}$$

Рассмотрим $I_{1k}(x,\rho)$. По лемме 2.18 при $\rho \in \hat{S}(\delta) \cap \hat{S}_0(\delta)$ получим

$$I_{1k}(x,\rho) = \int_0^x O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\varphi(\rho)\exp\Big(\operatorname{Re}\rho_\nu(x-t)\Big)\right) f_k(t)\,dt +$$
$$+ \int_x^1 O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\varphi(\rho)\exp\Big(\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}(x-t)\Big)\right) f_k(t)\,dt +$$
$$+ \int_0^1 O\left(\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\Big(\exp(\operatorname{Re}\rho_\nu x) + \exp\big(\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}(x-1)\big)\Big)\right) f_k(t)\,dt, \tag{2.70}$$

где, как и раньше, $\rho_k := \rho\omega_k$.

Учитывая, что $x \in [\delta,1-\delta]$, и используя леммы 2.19 и 2.20, из (2.70) получим

$$|I_{1k}(x,\rho)| \leqslant C\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\varphi(\rho)E_k(f)_r \left(\left(\int\limits_0^x e^{q\operatorname{Re}\rho_\nu(x-t)}\,dt\right)^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_x^1 e^{q\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}(x-t)}\,dt\right)^{1/q}\right) + C\frac{1}{|\rho|^{n-1}}E_k(f)_r\left(e^{\operatorname{Re}\rho_\nu\delta} + e^{-\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}\delta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\left(\left(\sum_{\gamma=1}^n E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q + \frac{k^2}{|\rho|}\right)\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}\chi_{js}(\rho,r) + \frac{k^{2/q}}{|\rho|}\right)E_k(f)_r\times$$

$$\times\left(\left(\frac{1-\exp(q\operatorname{Re}\rho_\nu x)}{|\operatorname{Re}\rho_\nu|}\right)^{1/q} + \left(\frac{1-\exp(q\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}(x-1))}{|\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}|}\right)^{1/q}\right) +$$

$$+ C\frac{1}{|\rho|^{n-1}}E_k(f)_r\left(e^{\operatorname{Re}\rho_\nu\delta} + e^{-\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}\delta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{|\rho|^{n-1}}\left(\sum_{\gamma=1}^n E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}\chi_{js}(\rho,r) + \frac{k^2}{|\rho|}\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}\chi_{js}(\rho,r) + \frac{k^{2/q}}{|\rho|}\right)\times$$

$$\times E_k(f)_r\varkappa(\rho,q) + C|\rho|^{1-n}E_k(f)_r\left(e^{\operatorname{Re}\rho_\nu\delta} + e^{-\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}\delta}\right), \quad (2.71)$$

где обозначено

$$\varkappa(\rho,q) = \left(\frac{1-\exp(q\operatorname{Re}\rho_\nu)}{|\operatorname{Re}\rho_\nu|}\right)^{1/q} + \left(\frac{1-\exp(-q\operatorname{Re}\rho_{\nu+1})}{|\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}|}\right)^{1/q}. \quad (2.72)$$

На основании формул (2.54), (2.72), предположения (2.66) и лемм 2.21 и 2.22 из (2.71) получим при $x \in [\delta,1-\delta]$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\hat{\gamma}_m} I_{1k}(x,\rho)\left(in(i\rho)^{n-1}\right)d\rho\right| \leqslant C\int\limits_{\hat{\gamma}_m}\left|I_{1k}(x,\rho)\right||\rho|^{n-1}\,|d\rho| \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\ln m\,E_k(f)_r\sum_{\gamma=1}^n E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q + E_k(f)_r\left(\frac{k^2\ln m}{m} + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + 1\right)\right), \quad (2.73)$$

где $C = C(f,M,K)$.

Рассмотри теперь $I_{2k}(x,\rho)$. Обозначая

$$H(x,t,\rho) := \frac{1}{i}\left(\hat{G}^{\{n-1\}}_{t^{n-1}}(x,t,\rho) - W(x)W^{-1}(t)D^*_{0,n-1,t}\hat{G}_0(x,t,\rho)\right),$$

пользуясь леммой 2.17 и затем интегрируя один раз по частям, будем иметь

$$I_{2k}(x,\rho) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^1 \left(\check{G}^{\{n\}}_{t^n}(x,t,\rho) - \frac{W(x)}{W(t)}D^*_{0n,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\right)F_k(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\Bigg(F_k(1)H(x,1,\rho) - F_k(0)H(x,0,\rho) - \int\limits_0^1 H(x,t,\rho)F_k^{(1)}(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 r_{n,n-1}(t)\,\check{G}^{\{n-1\}}_{t^{n-1}}(x,t,\rho)F_k(t)\,dt + \int\limits_0^1 \sum_{j=0}^{n-2} r_{nj}(t)\,\check{G}^{\{j\}}_{t^j}(x,t,\rho)F_k(t)\,dt -$$

$$-\frac{i}{n}\int\limits_0^1 \frac{W(x)}{W(t)}\sum_{\gamma=1}^{n} p_{\gamma\gamma-1}(t)\left(D^*_{0n-1,t}\check{G}_0(x,t,\lambda)\right)F_k(t)\,dt\Bigg). \quad (2.74)$$

Для $\rho \in \hat{S}(\delta)\cap\hat{S}_0(\delta)$ и $x\in[\delta,1-\delta]$ на основании леммы 2.18 справедливы оценки

$$H(x,t,\rho) = O\Bigg(\varphi(\rho)\Big(\exp\big(\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}(x-t)\big)\chi(t-x) +$$

$$+ \exp\big(\operatorname{Re}\rho_\nu(x-t)\big)\chi(x-t)\Big) + \exp\big(\operatorname{Re}\rho_\nu\delta\big) + \exp\big(-\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}\delta\big)\Bigg),$$

$$\check{G}^{\{j\}}_{t^j}(x,t,\rho) = O\Big(|\rho|^{j+1-n}\Big) = O\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad j=\overline{0,n-2}.$$

Теперь, используя леммы 1.8 и 2.20, из равенства (2.74) при $x\in[\delta,1-\delta]$ и $\rho\in\hat{S}(d)\cap\hat{S}_0(d)$ получим

$$|I_{2k}(x,\rho)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\Bigg(\|F_k\|_\infty\Big(\big|H(x,1,\rho)\big| + \big|H(x,0,\rho)\big|\Big) + \|F_k^{(1)}\|_r\|H(x,\cdot,\rho)\|_q +$$

$$+\big|B_{1k}(x,\rho)\big| + \sum_{j=0}^{n-2}\|r_{nj}\|_q\|\check{G}^{\{j\}}_{t^j}(x,\cdot,\rho)\|_\infty + \frac{1}{n}\big|W(x)\big|\big|B_{2k}(x,\rho)\big|\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{|\lambda|}\Bigg(k^{2/r}\Big(e^{\operatorname{Re}\rho_\nu\delta} + e^{-\operatorname{Re}\rho_{\nu+1}\delta}\Big) + k^2\Bigg(\varphi(\rho)\Bigg(\Bigg(\int\limits_0^x e^{q\operatorname{Re}\rho_\nu(x-t)}\,dt\Bigg)^{1/q} +$$

$$+\left(\int\limits_x^1 e^{q\,\mathrm{Re}\,\rho_{\nu+1}(x-t)}\,dt\right)^{1/q}\Bigg)+e^{\mathrm{Re}\,\rho_\nu\delta}+e^{-\mathrm{Re}\,\rho_{\nu+1}\delta}\Bigg)\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{|\lambda|}\Bigg(k^{2/r}\Big(e^{\mathrm{Re}\,\rho_\nu\delta}+e^{-\mathrm{Re}\,\rho_{\nu+1}\delta}\Big)+k^2\Big(\varphi(\rho)\varkappa(\rho,q)+e^{\mathrm{Re}\,\rho_\nu\delta}+e^{-\mathrm{Re}\,\rho_{\nu+1}\delta}\Big)+$$

$$+\sum_{s=1}^{2}|B_{sk}(x,\rho)|+\frac{1}{|\rho|}\Bigg)\Bigg)\leqslant C\frac{1}{|\lambda|}\Bigg(k^2\Big(e^{\mathrm{Re}\,\rho_\nu\delta}+e^{-\mathrm{Re}\,\rho_{\nu+1}\delta}\Big)+$$

$$+k^2\varkappa(\rho,q)\sum_{\gamma=1}^{n}E_k(p_{\gamma\gamma-1})_q\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}\chi_{js}(\rho,r)+\frac{k^4}{|\rho|}\varkappa(\rho,q)\sum_{1\leqslant j<s\leqslant n}\chi_{js}(\rho,r)+$$

$$+\frac{k^{2+2/q}}{|\rho|}\varkappa(\rho,q)+\sum_{s=1}^{2}|B_{sk}(x,\rho)|+\frac{1}{|\rho|}\Bigg),\tag{2.75}$$

где

$$B_{1k}(x,\rho)=\int\limits_0^1 p_{10}(t)\check{G}^{\{n-1\}}_{t^{n-1}}(x,t,\rho)F_k(t)\,dt,$$

$$B_{2k}(x,\rho)=\int\limits_0^1 W^{-1}(t)\sum_{\gamma=1}^{n}p_{\gamma,\gamma-1}(t)\left(D^*_{0,n-1,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\right)F_k(t)\,dt.$$

Оценим слагаемые $B_{1k}(x,\rho)$ и $B_{2k}(x,\rho)$ в (2.75). Так как рассуждения для этих двух интегралов одинаковые, рассмотрим, например, слагаемое $B_{2k}(x,\rho)$, для которого рассуждения более сложные.

Как и до этого, пусть $P_{\gamma s}(t)$ есть алгебраический многочлен наилучшего приближения степени не выше s функции $p_{\gamma,\gamma-1}(t)$ в метрике пространства $L_q[0,1]$. Тогда

$$B_{2k}(x,\rho)=\int\limits_0^1 W^{-1}(t)\sum_{\gamma=1}^{n}\big(p_{\gamma,\gamma-1}(t)-P_{\gamma s}(t)\big)\big(D^*_{0,n-1,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\big)F_k(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^1 W^{-1}(t)\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\gamma s}(t)\big(D^*_{0,n-1,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\big)F_k(t)\,dt=$$

$$=K_{1sk}(x,\rho)+K_{2sk}(x,\rho).\tag{2.76}$$

Используя леммы 2.18 и 1.8, получим

$$K_{1sk}(x,\rho)=O\left(\sum_{\gamma=1}^{n}E_s(p_{\gamma,\gamma-1})_q\right). \tag{2.77}$$

Рассмотрим $K_{2sk}(x,\rho)$. Воспользовавшись леммой 2.17, а затем, интегрируя по частям и опять применяя леммы 2.18 и 1.8, в результате будем иметь

$$K_{2sk}(x,\rho)=-i\bigg(W^{-1}(t)\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\gamma s}(t)\big(D^*_{0,n-2,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\big)F_k(t)\bigg)\bigg|_{t=0}^{t=1}+$$
$$+i\int\limits_0^1 W^{-1}(t)D^*_{0,n-2,t}\check{G}_0(x,t,\rho)\left(-\frac{i}{n}\bigg(\sum_{\gamma=1}^{n}p_{\gamma,\gamma-1}(t)\bigg)\bigg(\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\gamma s}(t)\bigg)F_k(t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\gamma=1}^{n}P^{(1)}_{\gamma s}(t)F_k(t)+\sum_{\gamma=1}^{n}P_{\gamma s}(t)F^{(1)}_k(t)\right)\,dt=$$
$$=O\left(\frac{s^{2/q}k^{2/r}}{|\rho|}+\frac{s^{2/q}}{|\rho|}+\frac{s^2}{|\rho|}+\frac{k^2}{|\rho|}\right)=O\left(\frac{1}{|\rho|}\Big(s^{2/q}k^{2/r}+k^2+s^2\Big)\right). \tag{2.78}$$

Из соотношений (2.76)–(2.78) следует при $s=k$

$$B_{2k}(x,\rho)=O\left(\sum_{\gamma=1}^{n}E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q+\frac{k^2}{|\rho|}\right). \tag{2.79}$$

Аналогичным образом можно получить оценку

$$B_{1k}(x,\rho)=O\left(\sum_{\gamma=1}^{n}E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q+\frac{k^2}{|\rho|}\right). \tag{2.80}$$

Следовательно, учитывая соотношения (2.75), (2.79), (2.80) и используя леммы 2.21 и 2.22, найдём при $x\in[\delta,1-\delta]$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\hat{\gamma}_m}I_{2k}(x,\rho)\left(in(i\rho)^{n-1}\right)\,d\rho\right|\leqslant\frac{n}{2\pi}\int\limits_{\hat{\gamma}_m}\left|I_{2k}(x,\rho)\right|\left|\rho\right|^{n-1}|d\rho|\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{k^2}{m}+\left(\frac{k^2\ln m}{m}+1\right)\sum_{\gamma=1}^{n}E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q+\frac{k^4\ln m}{m^2}+\frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}}\right), \tag{2.81}$$

где $C=C(f,M,K)$.

Объединяя формулы (2.69), оценки (2.73) и (2.81) и учитывая формулы (2.63)–(2.65), в результате получим

$$\hat{\Phi}_m(f) = O\left(\left(\ln m \sum_{\gamma=1}^{n} E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m}\right) E_k(f)_r + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{k^2 \ln m}{m} + 1\right) \sum_{\gamma=1}^{n} E_k(p_{\gamma,\gamma-1})_q + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2}\right). \quad (2.82)$$

Из оценки (2.82) и леммы 2.19 следует утверждение доказываемой теоремы.

Тем самым, теорема 2.23 доказана. □

Теорема 2.9 есть непосредственное следствие соответствующей теоремы для более общего к.д. оператора M, определенного к.д. выражением (2.27) и краевыми условиями (2.29) или после нормировки краевыми условиями (2.36).

Чтобы сформулировать эту теорему, предположим, что краевые условия (2.29) регулярны по Биркгофу в смысле определения 2.15, выполняется условие (2.66), а для функций $\omega(f,\delta)_r$ и $\omega(p_{\gamma,\gamma-1},\delta)_q$ $(\gamma = \overline{1,n})$ имеют место оценки

$$\omega(f,\delta)_r = O\big(\Omega_1(\delta)\big), \quad \omega(p_{\gamma,\gamma-1},\delta)_q = O\big(\Omega_2(\delta)\big) \ (\gamma = \overline{1,n}), \quad \delta \to +0, \qquad (2.83)$$

где функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию 2.6 МИ.

Теорема 2.24. *Если выполняются условия* (2.66) *и* (2.83), *функции* $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ *удовлетворяют условию 2.6 МИ и таковы, что*

$$\ln m\, \Omega_1\Big(\frac{1}{m}\Big)\Omega_2\Big(\frac{1}{m}\Big) \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty, \qquad (2.84)$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\check{\Phi}_m(x)\|_{C(K)} = 0$$

и справедливы следующие оценки при $m \gg 1$

$$\|\check{\Phi}_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\ln m\, \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right). \qquad (2.85)$$

Доказательство. Пусть выполняются предположения (2.66) и (2.83), функции $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию 2.6 МИ. Тогда на основании теоремы 2.23

для любого компакта $K \subset [0,1]$ и натурального $m \gg 1$ имеет место оценка (2.67), где для $\breve{A}_m$ справедливо представление (2.68).

Далее в доказательстве будут использоваться некоторые свойства м.м.ф. из [185, с. 24–25], которые, для удобства, сформулируем в виде леммы.

Лемма 2.25. *Пусть $L(x)$ есть произвольная м.м.ф. в нуле (бесконечности). Тогда*
а) для любого $\gamma > 0$ при $x \to 0$ (∞)

$$x^{\gamma} L(x) \to 0 \ (\infty), \quad x^{-\gamma} L(x) \to \infty \ (0),$$

б) для любого $\kappa \in (-\infty,\infty)$ функция $L^{\kappa}(x)$ является медленно меняющейся в нуле (бесконечности).

С учётом (2.83) будем иметь

$$\breve{A}_m \leqslant C \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \, \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + 1 + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \Omega_1\left(\frac{1}{k}\right) + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m^2} \right\}. \quad (2.86)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно малое фиксированное число и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. В качестве k в (2.86) возьмём $k = [m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}]$, где $[x]$ обозначает целую часть $x \in \mathbb{R}$.

Справедлива очевиднная оценка

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{[m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}]} \leqslant \frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}} - 1} \leqslant \frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon}{4}}}.$$

С учетом этой оценки, монотонности функций $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$, того факта, что эти функции удовлетворяют пункту в) условия 2.6, из неравенства 2.86 получим при некоторых вполне конкретных $\varkappa_1 > 0$ и $\varkappa_2 > 0$

$$\breve{A}_m \leqslant C \left(\left(\ln m \, \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + 1 + \frac{1}{m^{\varkappa_1}} \right) \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m^{\varkappa_2}} \right). \quad (2.87)$$

На основании леммы 2.25, отсюда следует

$$\breve{A}_m \leqslant C \left(\left(\ln m \, \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + 1 \right) \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m^{\varkappa_2}} \Omega_2^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) \right) \right) \leqslant \\ \leqslant C \left(\ln m \, \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right).$$

А из этого неравенства вытекает утверждение доказываемой теоремы.

Тем самым, теорема 2.24 доказана.

□

Доказательство теоремы 2.11. Введем непрерывные неубывающие функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ на отрезке [0,1], которые удовлетворяют условию 2.6 МИ и на некотором достаточно малом отрезке $[0,\varepsilon_0] \subset [0,1]$ справедливы равенства

$$\Omega_1(\delta) = \frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}, \quad \Omega_2(\delta) = \frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}, \quad \delta \to +0 \quad (\Omega_1(0) := 0, \Omega_2(0) := 0). \tag{2.88}$$

Вне отрезка $[0,\varepsilon_0]$ конкретный вид функций $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ не принципиален. Ясно, что таких функций существует бесконечно много.

Так как функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.24 и начиная с некоторого достаточно большого m будет $\dfrac{1}{m} \in [0,\varepsilon_0]$, то, воспользовавшись этой теоремой, получим утверждение доказываемой теоремы.

Тем самым, теорема 2.11 доказана. □

Утверждения теорем 2.2, 2.10 и 2.12 следуют из уже доказанных теорем 2.1, 2.9 и 2.11 и аналогов теоремы Г. Штейнгауза, формулировки и доказательства которых даются в следующем разделе.

2.4 Аналоги теоремы Штейнгауза

2.4.1 Классическая теорема Штейнгауза и постановка задачи

Как и в предыдущих разделах, через $\sigma_m(f)$ будем обозначать m-ю частичную сумму обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке [0,1].

Г. Штейнгауз [50] в 1913 году доказал следующую теорему (формулировка дается по книге [57, с. 111]).

Теорема 2.26 (Г. Штейнгауза)**.** *Если* $f(x) \in L_1[0,1]$, $\mathcal{W}(x)$ *удовлетворяет условию Липшица порядка* 1 *на* [0,1] *и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathcal{W}(x)\sigma_m(f,x) - \sigma_m(\mathcal{W}f,x)\|_{C[0,1]} = 0. \tag{2.89}$$

В работах автора диссертации [142; 144] равносходимость вида (2.89), но в метрике пространства $C(K)$ для любого компакта $K \subset (0,1)$ была установлена при других условиях на функции $f(x)$ и $\mathcal{W}(x)$.

Чтобы сформулировать этот результат, будем использовать для функции $\mathcal{W}(x)$ представление

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_0 + \int\limits_0^x g(t)\,dt, \tag{2.90}$$

где $\mathcal{W}_0$ есть произвольная константа, и обозначение

$$\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f,x) - \sigma_m(\mathcal{W}f,x). \tag{2.91}$$

Функцию $\Theta_m(x)$ будем называть кратко *разностью частичных тригонометрических сумм.*

В [142; 144] доказан следующий аналог теоремы Штейнгауза.

Теорема 2.27. *Пусть функция* $\mathcal{W}(x)$ *имеет вид* (2.90)*, тогда для любого компакта* $K \subset (0,1)$

$$\lim_{m\to\infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0, \tag{2.92}$$

если выполняется хотя бы одно из условий

1) $f \in L_1[0,1]$*,* $g \in L_\infty[0,1]$*;*
2) $f \in L_r[0,1]$*,* $g \in L_q[0,1]$*,* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q} < 1$*;*
3) $f \in H^\alpha_\infty[0,1]$*,* $g \in H^\beta_1[0,1]$*,* $\alpha + \beta > 1$*.*

Если неравенства в условиях 2) – 3) *заменить на противоположные* ($<$ *на* $>$*, а* $>$ *на* $<$)*, то утверждение* (2.92) *станет, вообще говоря, неверным.*

Естественно возникает вопрос об оценке стремления к нулю в (2.92) в зависимости от свойств функций $f(x)$ и $g(x)$.

Далее, в подразделе 2.4.2 доказывается теорема об оценке разности частичных тригонометрических сумм в терминах общих модулей непрерывности (теорема 2.28).

Первоначальные варианты теоремы формулировались и доказывались в работах автора диссертации [31;32;144;148] и в совместной работе [91] с С. Н. Кабановым, в которой аналоги теоремы Штейнгауза полностью получены автором диссертации.

Результат, даваемый теоремой 2.28, практически повторяет результат [148], но отличается методом доказательства и немного другим изложением.

Наиболее близкий результат к теореме 2.28 опубликован автором диссертации в [167].

В подразделе 2.4.3, как следствие теоремы 2.28, формулируется и доказывается аналог теоремы Штейнгауза с оценкой разности частичных тригонометрических сумм в случае, когда модули непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ оцениваются сверху медленно м.м.ф. (теорема 2.32).

Наконец, в подразделе 2.4.4, как следствие теоремы 2.32, формулируется и доказывается аналог теоремы Штейнгауза с оценкой разности частичных тригонометрических сумм в случае, когда модули непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ оцениваются сверху логарифмическими функциями (теорема 2.37). Здесь же дается информация о точности полученных оценок (замечание 2.38).

2.4.2 Теорема об оценке разности частичных тригонометрических сумм в терминах общих модулей непрерывности

Введём условие

$$f(x) \in L_r[0,1], \quad g(x) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{2.93}$$

В формулировке теоремы об оценке разности частичных тригонометрических сумм, которая доказана в [167], используются ранее введенные обозначения (2.9)–(2.10)). Для удобства напомним эти обозначения:
— для $h(x) \in C[0,1]$ обозначим

$$H_q(h,m) := \left(\int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\, h^q(\xi)\, d\xi \right)^{1/q} \quad \text{при} \ \ 1 \leqslant q < \infty, \quad H_\infty(h,m) := 1, \tag{2.94}$$

— для $g(x) \in L_q[0,1]$ обозначим

$$\theta_q(g,\xi) := \sup_{\tau \in [0,\xi]} \theta_{1q}(g,\tau) \ \ \text{при} \ \ 1 \leqslant q < \infty \ \ \text{и} \ \ \theta_\infty(g,\xi) \equiv 1. \tag{2.95}$$

где

$$\theta_{1q}(g,\tau) := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\Big(g, \frac{1}{k}\Big)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \ \ \text{при} \ \ 1 \leqslant q < \infty, \tag{2.96}$$

Теорема 2.28. *Пусть функция* $\mathcal{W}(x)$ *имеет вид* (2.90)*, а функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют условию* (2.93)*. Тогда для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *и* *любого натурального $m \gg 1$ имеет место оценка*

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K)Q_m, \tag{2.97}$$

где

$$Q_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) + \omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \tag{2.98}$$

Доказательство. Пусть $F_k(x)$ и $G_k(x)$ обозначают алгебраические многочлены наилучшего приближения степени не выше k функций $f(x)$ и $g(x)$ в метрике пространств, соответственно, $L_r[0,1]$ и $L_q[0,1]$.

Ясно, что

$$\|F_k(x)\|_r \leqslant C(f), \qquad \|G_k(x)\|_q \leqslant C(g), \tag{2.99}$$

где $C(f)$ и $C(g)$ некоторые константы. Здесь, как и до этого, используется обозначение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,1]}$.

Справедливо представление

$$\begin{aligned}\Theta_m(x) = \mathcal{W}(x)\sigma_m(f,x) - \sigma_m(\mathcal{W}f,x) = \\ = \int\limits_{-x}^{1-x} f(x+t)\left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\right)\frac{\sin 2\pi(m+\frac{1}{2})t}{\sin \pi t}\,dt = \\ = \int\limits_{-x}^{1-x} f_k(x+t)\left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\right)h(t)D_m(t)\,dt + \\ + \int\limits_{-x}^{1-x} F_k(x+t)\left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\right)h(t)D_m(t)\,dt = A_{1k}(x,m) + A_{2k}(x,m),\end{aligned} \tag{2.100}$$

где обозначено

$$D_m(t) = \frac{\sin 2\pi(m+\frac{1}{2})t}{\pi t}, \quad h(t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t}, \quad f_k(x) = f(x) - F_k(x),$$

а $k \in \mathbb{N}$ есть параметр. Непосредственно можно проверить, что $h(t) \in C^2[0,1]$.

Рассмотрим $\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau$ и дадим оценку этого интеграла при $t \to 0$, учитывающую свойства функции $g(x)$.

Лемма 2.29. *Если $g(x) \in L_q[0,1]$, где $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то справедлива оценка*

$$\int\limits_a^b |g(\tau)|\,d\tau \leqslant C(g)\delta^{\frac{1}{r}}\theta_q(g,\delta), \quad \delta := b-a, \tag{2.101}$$

где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, *а функция* $\theta_q(g,\delta)$ *определяется формулой* (2.95). *При этом функция* $\theta_q(g,\delta)$ *в случае* $1 \leqslant q < \infty$ *монотонно стремится к нулю при* $\delta \to +0$.

Доказательство. Так как по неравенству треугольника

$$\int_a^b |g(\tau)|\,d\tau \leqslant \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau)|\,d\tau + \int_a^b |G_k(\tau)|\,d\tau,$$

то, применяя к правой части неравенство Гёльдера и неравенства (2.52), (1.44) и (2.99), получим для любого $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant q < \infty$

$$\int_a^b |g(\tau)|\,d\tau = \int_a^b |g(\tau) - G_k(\tau) + G_k(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b 1^r\,d\tau\right)^{1/r} \|g(\tau) - G_k(\tau)\|_q + \|G_k(\tau)\|_\infty \delta \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{\frac{1}{r}} \left(E_k(g)_q + C(g)\big(k^2\delta\big)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \big(k^2\delta\big)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Так как $k \in \mathbb{N}$ является произвольным, то отсюда будем иметь

$$\int_a^b |g(\tau)|\,d\tau \leqslant C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \big(k^2\delta\big)^{\frac{1}{q}}\right\} =$$

$$= C(g)\delta^{\frac{1}{r}}\theta_{1q}(g,\delta) \leqslant C(g)\delta^{\frac{1}{r}} \sup_{\tau\in[0,\delta]} \theta_{1q}(g,\tau) = C(g)\delta^{\frac{1}{r}}\theta_q(\delta),$$

где функция $\theta_q(g,\delta)$ определяется формулой (2.95).

Таким образом, оценка (2.101) в случае $1 \leqslant q < \infty$ доказана. Совершенно ясно, что в случае $q = \infty$ оценка (2.101) также справедлива, если считать $\theta_\infty(g,\delta) \equiv 1$.

Для завершения доказательства установим следующую лемму.

Лемма 2.30. *Функция* $\theta_q(g,\delta)$ *в случае* $1 \leqslant q < \infty$ *является неубывающей при* $\delta \in (0,1]$ *и* $\theta_q(g,\delta) \to 0$, *когда* $\delta \to +0$.

Доказательство. То, что функция $\theta_q(g,\delta)$ является неубывающей при $\delta \in (0,1]$, следует из её определения.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таким образом, что

$$\omega\left(g,\frac{1}{k_\varepsilon}\right)_q < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.102}$$

Пусть $0 < \tau_\varepsilon < 1$ есть такое число, что

$$\left(k_\varepsilon^2 \tau_\varepsilon\right)^{1/q} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.103}$$

Из (2.102)–(2.103) получим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau_\varepsilon \in (0,1)\ \forall \tau \in [0,\tau_\varepsilon]$

$$\theta_{1q}(g,\tau) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\Big(g,\frac{1}{k}\Big)_q + \left(k^2\tau\right)^{\frac{1}{q}} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \omega\Big(g,\frac{1}{k_\varepsilon}\Big)_q + \left(k_\varepsilon^2\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \omega\Big(g,\frac{1}{k_\varepsilon}\Big)_q + \left(k_\varepsilon^2\tau_\varepsilon\right)^{\frac{1}{q}} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau_\varepsilon \in (0,1)\ \forall \delta \in [0,\tau_\varepsilon]$

$$\theta_q(g,\delta) \leqslant \theta_q(g,\tau_\varepsilon) = \sup_{\tau\in[0,\tau_\varepsilon]} \theta_{1q}(g,\tau) < \varepsilon.$$

А это означает, что $\theta_q(g,\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Тем самым, лемма 2.30 доказана. $\square$

Следовательно и лемма 2.29 полностью доказана. $\square$

Рассмотрим слагаемое $A_{1k}(x,m)$ в (2.100). Справедлива оценка

$$|A_{1k}(x,m)| \leqslant \left| \int_{-x}^{0} f_k(x+t) \left(\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau \right) h(t) D_m(t)\,dt \right| +$$
$$+ \left| \int_{0}^{1-x} f_k(x+t) \left(\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau \right) h(t) D_m(t)\,dt \right| =: A_{1k}^1(x,m) + A_{1k}^2(x,m). \tag{2.104}$$

При $r > 1$ на основании (2.101) и (2.52) получим

$$A_{1k}^1(x,m) \leqslant C(g) \int_{-x}^{0} |f_k(x+t)| (-t)^{\frac{1}{r}} \theta_q(g,-t) |D_m(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant C(g) E_k(f)_r \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{r}} \theta_q^q(g,t) |D_m(t)|^q\,dt \right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant C(f,g)\omega\Big(f,\frac{1}{k}\Big)_r \left(\int_0^1 t^{\frac{q}{r}} \theta_q^q(g,t) |D_m(t)|^q\,dt \right)^{1/q}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для $A^2_{1k}(x,m)$.

С учетом этого из неравенства (2.104) найдем оценку

$$|A_{1k}(x,m)| \leqslant C(f,g)\omega\Big(f,\frac{1}{k}\Big)_r B_m^{\frac{1}{q}}, \tag{2.105}$$

где

$$B_m = \pi^q \int\limits_0^1 \theta_q^q(g,t)t^{\frac{q}{r}}|D_m(t)|^q\,dt =$$
$$= \int\limits_0^1 \theta_q^q(g,t)t^{\frac{q}{r}}\frac{1}{t^q}\big|\sin\pi(2m+1)t\big|^q\,dt = \int\limits_0^1 \frac{1}{t}\theta_q^q(g,t)\big|\sin\pi(2m+1)t\big|^q\,dt.$$

Обозначим $a_m = \dfrac{1}{2m+1}$. Тогда

$$B_m = \int\limits_0^{a_m/2} \frac{1}{t}\theta_q^q(g,t)\big|\sin\pi(2m+1)t\big|^q\,dt + \int\limits_{a_m/2}^{a_m} \frac{1}{t}\theta_q^q(g,t)\big|\sin\pi(2m+1)t\big|^q\,dt+$$
$$+\int\limits_0^{a_m}\big|\sin\pi(2m+1)t\big|^q\sum_{s=1}^{2m}\frac{1}{t+sa_m}\theta_q^q(g,t+sa_m)\,dt = B_{1m}+B_{2m}+B_{3m}. \tag{2.106}$$

На основании леммы 2.30 функция $\theta_q(g,\delta)$ является неубывающей. Учитывая это, а также неравенство $\sin\alpha \leqslant \alpha$ при $\alpha \in \Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]$, получим для B_{1m} оценку

$$B_{1m} \leqslant \theta_q^q\left(g,\frac{a_m}{2}\right)\int\limits_0^{a_m/2}\frac{1}{t}\big(\pi(2m+1)t\big)^q\,dt =$$
$$= \pi^q\theta_q^q\left(g,\frac{1}{4m+2}\right)(2m+1)^q\int\limits_0^{a_m/2} t^{q-1}\,dt =$$
$$= \pi^q\theta_q^q\left(g,\frac{1}{4m+2}\right)(2m+1)^q\frac{t^q}{q}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{1}{4m+2}} \leqslant C\theta_q^q\left(g,\frac{1}{m}\right). \tag{2.107}$$

Далее, на основании леммы 2.30

$$B_{2m} \leqslant \frac{2}{a_m}\theta_q^q(g,a_m)\int\limits_{a_m/2}^{a_m} 1\,dt = \theta_q^q\left(g,\frac{1}{2m+1}\right) \leqslant \theta_q^q\left(g,\frac{1}{m}\right). \tag{2.108}$$

Наконец, учитывая свойства функции $\theta_q(g,\delta)$, получим

$$
\begin{aligned}
B_{3m} &\leqslant a_m \sum_{s=1}^{2m} \frac{1}{sa_m}\theta_q^q\big(g,(s+1)a_m\big) \leqslant \\
&\leqslant 2\sum_{s=2}^{2m-1} \frac{1}{s+1}\theta_q^q\left(g,\frac{s+1}{2m+1}\right) + \theta_q^q\Big(g,\frac{2}{2m+1}\Big) + \frac{1}{2m}\theta_q^q(g,1) \leqslant \\
&\leqslant C\left(\sum_{s=2}^{2m-1} \frac{1}{s+1}\theta_q^q\left(g,\frac{s+1}{2m+1}\right) + \theta_q^q\Big(g,\frac{1}{m}\Big) + \frac{1}{m}\right) \leqslant \\
&\leqslant C\left(\int\limits_2^{2m} \frac{1}{\xi}\,\theta_q^q\Big(g,\frac{1+\xi}{2m+1}\Big)\,d\xi + \theta_q^q\Big(g,\frac{1}{m}\Big) + \frac{1}{m}\right). \qquad (2.109)
\end{aligned}
$$

Преобразуем интеграл в (2.109)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_2^{2m} \frac{1}{\xi}\,\theta_q^q\Big(\frac{1+\xi}{2m+1}\Big)\,d\xi &= \int\limits_{\frac{3}{2m+1}}^{1} \frac{1}{\tilde{\xi} - \frac{1}{2m+1}}\,\theta_q^q(g,\tilde{\xi})\,d\tilde{\xi} \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\frac{3}{2m+1}}^{1} \frac{1}{\frac{1}{2}\tilde{\xi}}\,\theta_q^q(g,\tilde{\xi})\,d\tilde{\xi} \leqslant 2\int\limits_{\frac{1}{m}}^{1} \frac{1}{\xi}\,\theta_q^q(g,\xi)\,d\xi = 2\Big(H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big)\Big)^q, \qquad (2.110)
\end{aligned}
$$

где $H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big)$ определяется формулой (2.94).

Учитывая (2.110) в (2.109), получим оценку

$$
B_{3m} \leqslant C\left(\Big(H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big)\Big)^q + \theta_q^q\left(g,\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m}\right). \qquad (2.111)
$$

Так как $H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) \not\to 0$ при $m\to\infty$, а $\theta_q^q\left(g,\frac{1}{m}\right)\to 0$, то на основании (2.106)–(2.108) и (2.111) получим при $1\leqslant q<\infty$

$$
B_m \leqslant C\Big(H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big)\Big)^q.
$$

С учетом (2.105) отсюда следует

$$
|A_{1k}(x,m)| \leqslant C(f,g)\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big). \qquad (2.112)
$$

Нетрудно заметить, что эта оценка имеет место и при $q=\infty$ (или $r=1$), если считать в этом случае $H_\infty\big(\theta_q(g,\cdot),m\big)=1$.

Рассмотрим теперь $A_{2k}(x.m)$ (это слагаемое определено в (2.100)). Справедливо представление

$$A_{2k}(x,m) = \int\limits_0^{1-x} + \int\limits_{-x}^{0} = A_{2k}^1(x,m) + A_{2k}^2(x,m). \qquad (2.113)$$

Введем следующие контуры

$$\zeta_m' = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) e^{i\varphi},\, m \in \mathbb{N},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0 \right\},$$
$$\zeta_m'' = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right) e^{i\varphi},\, m \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2.31. *При любом $t > 0$ справедливо равенство*

$$\frac{\sin \pi(2m+1)t}{\pi t} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\zeta_m'} i e^{-izt}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\zeta_m''} i e^{izt}\, dz.$$

На основании этой леммы слагаемое $A_{2m}^1(x,s)$ в (2.113) можно представить в виде

$$A_{2k}^1(x,m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\zeta_m'} \int\limits_0^{1-x} F_k(x+t) \left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\, d\tau \right) h(t) i e^{-izt}\, dt\, dz -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\zeta_m''} \int\limits_0^{1-x} F_k(x+t) \left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\, d\tau \right) h(t) i e^{izt}\, dt\, dz =:$$
$$=: I_{1k}(x,m) + I_{2k}(x,m). \qquad (2.114)$$

Рассмотрим слагаемое $I_{1k}(x,m)$. Справедливо представление

$$I_{1k}(x,m) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\zeta_m'} \tilde{I}_{1k}(x,z)\, dz, \qquad (2.115)$$

где обозначено

$$\tilde{I}_{1k}(x,\rho) = \int\limits_0^{1-x} F_k(x+t) \left(\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\, d\tau \right) h(t) i e^{-izt}\, dt.$$

Проведём в $\tilde{I}_{1k}(x,z)$ один раз интегрирование по частям. В результате будем иметь

$$\tilde{I}_{1k}(x,z) = -\frac{1}{iz}F_k(1)\left(\int\limits_1^x g(\tau)\,d\tau\right)h(1-x)e^{iz(1-x)}+$$
$$+\frac{1}{iz}\int\limits_0^{1-x}\left(F_k'(x+1)\left(\int\limits_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau\right)h(t)+F_k(x+1)\left(\int\limits_{x+t}^x g(\tau)\,d\tau\right)h'(t)-\right.$$
$$\left.-F_k(x+t)g(x+t)h(t)\right)e^{-izt}dt=\sum_{j=1}^4 K_{jk}(x,z). \quad (2.116)$$

Далее считаем, что $x\in K$, где $K\subset(0,1)$ есть произвольный компакт. Не нарушая общности, можно считать, что $K\subset[\delta,1-\delta]$ при достаточно малом $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

На основании леммы 1.8, неравенств (2.99) и леммы 2.22 получим

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta_m'}K_{1k}(x,z)\,dz\right|\leqslant|F_k(1)|\|g\|_q\|h\|_\infty\int\limits_{\zeta_m'}\frac{1}{|z|}e^{-\operatorname{Re}zi\delta}\,|dz|\leqslant$$
$$\leqslant C(f,g)\|F_k\|_\infty\frac{1}{m}\int\limits_{\zeta_m'}e^{-\operatorname{Re}zi\delta}\leqslant C(f,g,\delta)\frac{k^{\frac{2}{r}}}{m}. \quad (2.117)$$

Аналогичные рассуждения, но с использованием леммы 2.21 вместо леммы 2.22, приводят к оценкам

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta_m'}K_{2k}(x,z)\,dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|F_k'\|\|g\|_q\|h\|_\infty\int\limits_{\zeta_m'}\frac{1}{|z|}\int\limits_0^{1-x}e^{-\operatorname{Re}zit}\,dt\,|dz|\leqslant$$
$$\leqslant C(g)k^2\|F_k\|_\infty\frac{1}{m}\int\limits_{\zeta_m'}\frac{1}{\operatorname{Re}iz}\int\limits_0^{1-x}e^{-\operatorname{Re}zit}\,d\operatorname{Re}izt\,|dz|\leqslant$$
$$\leqslant C(f,g)\frac{k^{2+\frac{2}{r}}}{m}\int\limits_{\zeta_m'}\frac{1-e^{-\operatorname{Re}iz}}{\operatorname{Re}iz}\,|dz|\leqslant C(f,g)\frac{k^{2+\frac{2}{r}}\ln m}{m}. \quad (2.118)$$

Рассуждая подобным образом, можно получить оценку

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta_m'}K_{3k}(x,z)\,dz\right|\leqslant C(f,g)\frac{k^{\frac{2}{r}}\ln m}{m}. \quad (2.119)$$

Наконец, рассмотрим $K_{4k}(x.\rho)$. Обозначим $g_l(x) = g(x) - G_l(x)$, где $G_l(x)$, как и раньше, есть многочлен наилучшего приближения степени не выше l функции $g(x)$ в метрике пространства $L_q[0,1]$.

Тогда

$$K_{4k}(x,z) = \frac{1}{zi}\int\limits_0^{1-x} e^{-izt}F_k(x+t)g_l(x+t)h(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{zi}\int\limits_0^{1-x} e^{-izt}F_k(x+t)G_l(x+t)h(t)\,dt =: L_{1ml}(x,\rho) + L_{2ml}(x,\rho). \quad (2.120)$$

В силу неравенств (2.52) и (2.99) будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta'_m} L_{1kl}(x,\rho)\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta'_m}\frac{1}{|z|}\|F_k\|_r\|g_l\|_q\,|dz| \leqslant$$

$$\leqslant C\|F_k\|_r E_l(g)_q \leqslant C(f,g)\omega\left(g,\frac{1}{l}\right)_q. \quad (2.121)$$

В $L_{2kl}(x,z)$ проводим один раз интегрирование по частям

$$L_{2kl}(x,z) = \frac{1}{(zi)^2}e^{-iz(1-x)}F_k(1)G_l(1)h(1-x) - \frac{1}{(zi)^2}F_k(x)G_l(x)h(1) -$$

$$-\frac{1}{(zi)^2}\int\limits_0^{1-x}\Big(F'_k(x+t)G_l(x+t)h(t) + F_k(x+t)G'_l(x+t)h(t)+$$

$$+F_k(x+t)G_l(x+t)h'(t)\Big)e^{-izt}\,dt.$$

Отсюда на основании неравенств (1.44)–(1.45) и (2.99) будем иметь

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta'_m} L_{2kl}(x,z)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{1}{m}\Big(\|F_k\|_\infty\|G_l\|_\infty + \|F'_k\|_\infty\|G_l\|_\infty + \|F_k\|_\infty\|G'_l\|_\infty\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C(f,g)\frac{1}{s}\Big(k^{2+\frac{2}{r}}l^{\frac{2}{q}} + k^{\frac{2}{r}}l^{2+\frac{2}{q}}\Big). \quad (2.122)$$

Из (2.120)–(2.122) при $l = k$ следует

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta'_m} K_{4k}(x,z)\,dz\right| \leqslant C(f,g)\left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4}{m}\right). \quad (2.123)$$

На основании формул и оценок (2.115)-(2.119) и (2.123) получим при всех $x \in K$ и $k \in \mathbb{N}$

$$|I_{1k}(x,m)| \leqslant C(f,g,K)\left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4}{m}\right). \tag{2.124}$$

Рассуждения для $I_{2m}(x,s)$ проводятся совершенно аналогично и, таким образом, имеет место следующая оценка при всех $x \in K$ и $k \in \mathbb{N}$

$$|I_{2k}(x,m)| \leqslant C(f,g,K)\left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4}{m}\right). \tag{2.125}$$

Из оценок (2.124)–(2.125) следует, что при всех $x \in K$ и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|A^1_{2k}(x,m)| \leqslant C(f,g,K)\left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m}\right).$$

Аналогично получается такая же оценка и для $A^2_{2k}(x,m)$.

Следовательно, с учетом формулы (2.113), слагаемое $A_{2k}(x,m)$ в (2.100) при всех $x \in K$ и $k \in \mathbb{N}$ будет удовлетворять неравенству

$$|A_{2k}(x,m)| \leqslant C(f,g,K)\left(\omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m}\right).$$

Из этого неравенства и из неравенства (2.112) на основании равенства (2.100) получим следующую оценку при всех $x \in K$ и m, $k \in \mathbb{N}$

$$|\Theta_m(x)| \leqslant C(f,g,K)\left(\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) + \omega\left(g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m}\right).$$

Отсюда в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ следует утверждение теоремы.

Тем самым, теорема 2.28 полностью доказана. $\square$

Накладывая на модули непрерывности $\omega(f,\delta)_r$ и $\omega(g,\delta)_q$ такие требования, при которых $Q_m \to 0$ при $m \to \infty$, на основании теоремы 2.28 можно получать различные достаточные условия равносходимости (2.92) и оценку разности соответствующих тригонометрических частичных сумм. Это составляет содержание следующих двух подразделов.

2.4.3 Аналог теоремы Штейнгауза в случае медленно меняющихся модулей непрерывности

Пусть по-прежнему выполняется условие (2.93) и, кроме того, имеют место оценки

$$\omega(f,\delta)_r = O\big(v(\delta)\big), \quad \omega\big(g,\delta\big)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \to +0, \tag{2.126}$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ удовлетворяют условию МИ 2.6.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.32. *Пусть функция* $\mathcal{W}(x)$ *имеет вид* (2.90), *выполняются условия* (2.93) *и* (2.126). *Тогда, если*

$$v\Big(\frac{1}{m}\Big)H_q(w,m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty, \tag{2.127}$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0. \tag{2.128}$$

При этом справедлива следующая оценка при $m \gg 1$

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w,m) + w\left(\frac{1}{m}\right)\right). \tag{2.129}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $1 \leqslant q < \infty$. Чтобы доказать теорему в этом случае, докажем предварительно две леммы.

Лемма 2.33. *Если* $1 \leqslant q < \infty$, *то при всех достаточно малых* $\xi > 0$ *справедлива оценка*

$$\theta_q(g,\xi) = O\big(w(\xi)\big). \tag{2.130}$$

Доказательство. С учетом условия (2.126) в рассматриваемом случае имеем

$$\theta_{1q}(g,\tau) \leqslant C \inf_{k\in\mathbb{N}}\left(w\left(\frac{1}{k}\right) + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right), \tag{2.131}$$

где $\tau > 0$ и достаточно мало.

Положим справа в (2.131)

$$k = \left[\tau^{-\frac{3}{8}}\right], \tag{2.132}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Справедливы неравенства

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}}\right]} \leqslant \frac{1}{\tau^{-\frac{3}{8}} - 1} = \frac{1}{\tau^{-\frac{1}{4}}\left(\tau^{-\frac{1}{8}} - \tau^{\frac{1}{4}}\right)} < \frac{\tau^{\frac{1}{4}}}{2-1} = \tau^{\frac{1}{4}}, \tag{2.133}$$

при $\tau < 2^{-8}$ с учетом того, что $\tau \leqslant 1$.

Отсюда, а также из (2.131) и (2.132), ввиду монотонного неубывания функции $w(\delta)$, получим при достаточно малых $\tau > 0$

$$\theta_{1q}(g,\tau) \leqslant C\left(w\left(\frac{1}{\left[\tau^{-\frac{3}{8}}\right]}\right) + \left(\left[\tau^{-\frac{3}{8}}\right]^2\tau\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant \\ \leqslant C\left(w\left(\tau^{\frac{1}{4}}\right) + \tau^{\frac{1}{4q}}\right) \leqslant C\left(w(\tau) + \tau^{\frac{1}{4q}}\right) \leqslant Cw(\tau), \tag{2.134}$$

причем в предпоследнем неравенстве мы воспользовались тем, что функция $w(\delta)$ удовлетворяет свойству (в) в условии 2.6 МИ, а в последнем неравенстве — леммой 2.25.

Используя монотонность функции $w(\delta)$, из оценки (2.134) найдем

$$\theta_q(g,\xi) = \sup_{\tau\in[0,\xi]} \theta_{1q}(g,\tau) \leqslant C \sup_{\tau\in[0,\xi]} w(\tau) \leqslant Cw(\xi),$$

где $\xi > 0$ и достаточно мало.

Тем самым лемма 2.33 доказана. $\square$

Лемма 2.34. *Если $1 \leqslant q < +\infty$, то справедлива следующая оценка*

$$H_q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) = O\big(H_q(w,m)\big) \quad \text{при} \quad m \to \infty \tag{2.135}$$

и функция $H_q(w,m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m.

Доказательство. С учетом предыдущей леммы

$$H_q^q\big(\theta_q(g,\cdot),m\big) = \int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\,\theta_q^q(g,\xi)\,d\xi = O\left(\int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\,w^q(\xi)\,d\xi\right) = O\left(H_q^q(w,m)\right), \tag{2.136}$$

т. е. оценка (2.135) установлена.

Преобразуем интеграл, фигурирующий в соотношении (2.136), делая замену переменной интегрирования $\xi = \dfrac{1}{x}$. Будем иметь

$$H_q^q(w,m) = \int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\, w^q(\xi)\, d\xi = \int\limits_{1}^{m} \frac{1}{x}\, w^q\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \int\limits_{1}^{m} \frac{1}{x}\, \tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right)\, dx, \qquad (2.137)$$

где обозначено $\tilde{w}(\xi) = w^q(\xi)$.

Так как функция $w(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле, то на основании свойства б) леммы 2.25 получим, что и $\tilde{w}(\xi)$ есть м.м.ф. в нуле. А тогда по определению 2.3 функция $\tilde{w}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ будет м.м.ф. в бесконечности.

Тогда заключительное утверждение доказываемой леммы 2.34 следует из результата, который установлен в [26] и приведен в качестве упражнения в [185, упражнение 2.2, с. 82]. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 2.35. *Если функция $L(x)$ есть м.м.ф. в бесконечности, то такова же и функция*

$$\int\limits_{A}^{x} \frac{1}{t}\, L(t)\, dt,$$

где $A > 0$ есть константа.

На основании утверждения этой леммы $H_q^q(w,m)$ есть м.м.ф. в бесконечности как функция от m. Но тогда, используя свойство б) леммы 2.25, получим, что и $H_q(w,m)$ есть м.м.ф. в бесконечности.

Тем самым лемма 2.34 доказана. $\square$

Используя оценки (2.126) и (2.135), из (2.97)–(2.98) получим при $m \to \infty$

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ v\left(\frac{1}{k}\right) H_q(w,m) + w\left(\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \qquad (2.138)$$

Зафиксируем достаточно малые положительные ε и ε_1 такие, что выполняются неравенства $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Полагая в (2.138) $k = \left[m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}\right]$, проводя рассуждения, аналогичные тем, что использовались в (2.133), пользуясь монотонностью функций $v(\delta)$ и $w(\delta)$ и тем фактом, что функции $v(\delta)$ и $w(\delta)$

удовлетворяют свойству (в) условия 2.6 МИ, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant \\
&\leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{\left[m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}\right]}\right)H_q(w,m)+w\left(\frac{1}{\left[m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}\right]}\right)+\left[m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}\right]^4\frac{\ln m}{m}\right)\leqslant \\
&\leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}-1}\right)H_q(w,m)+w\left(\frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}-1}\right)+\frac{\ln m}{m^{\varepsilon_1}}\right)\leqslant \\
&\leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon}{4}}}\right)H_q(w,m)+w\left(\frac{1}{m^{\frac{1-\varepsilon}{4}}}\right)+\frac{\ln m}{m^{\varepsilon_1}}\right)\leqslant \\
&\leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w,m)+w\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{\ln m}{m^{\varepsilon_1}}\right). \qquad (2.139)
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 2.32 потребуются еще некоторые свойства м.м.ф. из [185, с. 25]. Сформулируем эти свойства в виде следующей леммы.

Лемма 2.36. *Если функции $L_1(x)$, $L_2(x)$ есть м.м.ф. в бесконечности, то функции $L_1(x)+L_2(x)$ и $L_1(x)L_2(x)$ также есть м.м.ф. в бесконечности.*

На основании того, что функции $v(\delta)$ и $w(\delta)$ есть м.м.ф. в нуле, и с учетом лемм 2.34 и 2.36 сумма первых двух слагаемых в оценке (2.139) есть м.м.ф. при $m\to\infty$. Вынося эту сумму за скобку и применяя лемму 2.25, получим в результате оценку

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,g,K)\left(v\left(\frac{1}{m}\right)H_q(w,m)+w\left(\frac{1}{m}\right)\right) \qquad (2.140)$$

и, тем самым, устанавливаем оценку разности частичных тригонометрических сумм (2.129) в случае $1\leqslant q<\infty$. Из этой оценки вытекает условие равносходимости (2.127) в случае $1\leqslant q<\infty$.

В случае $q=\infty$ доказательство теоремы упрощается, ввиду того, что в (2.98) будет $H_\infty\big(\theta_\infty(g,\cdot),m\big)=1$ для всех $m\in\mathbb{N}$.

С учетом этого и в результате рассуждений, аналогичных предыдущим, получим равносходимость (2.128) без дополнительного условия (2.127), так как в случае $q=\infty$ это условие выполняется автоматически, и оценку разности частичных тригонометрических сумм (2.129), в которой $H_\infty(w,m)=1$ для всех m, в случае $q=\infty$.

Тем самым, теорема 2.32 полностью доказана. □

2.4.4 Аналог теоремы Штейнгауза в случае логарифмических модулей непрерывности

Пусть по-прежнему выполняется условие (2.93) и имеют место оценки

$$\omega(f,\delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \omega\bigl(g,\delta\bigr)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right) \text{ при } \delta \to +0,\ \alpha, \beta > 0. \quad (2.141)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.37. *Пусть функция* $\mathcal{W}(x)$ *имеет вид* (2.90) *и выполняются предположения* (2.93) *и* (2.141)*. Тогда для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = 0, \quad (2.142)$$

1) *в случае* $1 \leqslant q < \infty$ *при условии* $\alpha + \beta > \dfrac{1}{q}$*, при этом, если* $\beta q \neq 1$*, то*

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right), \quad (2.143)$$

а если $\beta q = 1$*, то*

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{(\ln\ln m)^{\frac{1}{q}}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right), \quad (2.144)$$

2) *в случае* $q = \infty$ *при любых* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$*, при этом*

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right).$$

Доказательство. Введем непрерывные неубывающие функции $\hat{v}(\delta)$ и $\hat{w}(\delta)$ на отрезке $[0,1]$, которые удовлетворяют условию 2.6 МИ и на некотором достаточно малом отрезке $[0,\varepsilon_0] \subset [0,1)$ выполняются равенства

$$\hat{v}(\delta) = \frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}, \quad \hat{w}(\delta) = \frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}, \quad (\hat{v}(0) := 0,\, \hat{w}(0) := 0). \quad (2.145)$$

Вне отрезка $[0,\varepsilon_0]$ конкретный вид функций $\hat{v}(\delta)$ и $\hat{w}(\delta)$ не принципиален. Ясно, что таких функций существует бесконечно много.

Таким образом, в силу (2.141) и по построению имеют место оценки

$$\omega(f,\delta)_r = O\bigl(\hat{v}(\delta)\bigr), \quad \omega\bigl(g,\delta\bigr)_q = O(\hat{w}(\delta)), \quad \delta \to +0, \quad (2.146)$$

где $\hat{v}(\delta)$ и $\hat{w}(\delta)$ удовлетворяют условию МИ и для них верны равенства (2.145).

Воспользуемся далее теоремой 2.32.

Из определения функций $\hat{v}(\delta)$ и $\hat{w}(\delta)$ сразу получим при $m \gg 1$

$$\hat{v}\left(\frac{1}{m}\right) \leqslant C\frac{1}{\ln^{\alpha} m}, \quad \hat{w}\left(\frac{1}{m}\right) \leqslant C\frac{1}{\ln^{\beta} m}. \tag{2.147}$$

В случае $1 \leqslant q < \infty$ из определения (2.94) функции $H_q(\hat{w},m)$ и соотношений (2.145) для $\hat{w}(\delta)$ будем иметь

$$H_q^q(\hat{w},m) = \int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\,\hat{w}^q(\xi)\,d\xi = \int\limits_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi}\,\hat{w}^q(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\varepsilon_0}^{1} \frac{1}{\xi}\,\hat{w}^q(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi}\,\frac{1}{\ln^{\beta q}\frac{1}{\xi}}\,d\xi + C = \int\limits_{1/\varepsilon_0}^{m} \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\ln^{\beta q}\tau}\,d\tau + C = \int\limits_{1/\varepsilon_0}^{m} \frac{1}{\ln^{\beta q}\tau}\,d\ln\tau + C.$$

Отсюда следуют оценки:

если $\beta q \neq 1$

$$H_q^q(\hat{w},m) \leqslant C\left(\frac{\ln m}{\ln^{\beta q} m} + 1\right),$$

а при $\beta q = 1$

$$H_q^q(\hat{w},m) \leqslant C(\ln\ln m + 1) \leqslant C\ln\ln m.$$

Таким образом, в случае $1 \leqslant q < \infty$ получим:

если $\beta q \neq 1$

$$H_q(\hat{w},m) \leqslant C\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1\right), \tag{2.148}$$

а если $\beta q = 1$

$$H_q(\hat{w},m) \leqslant C\big(\ln\ln m\big)^{1/q}. \tag{2.149}$$

Если же $q = \infty$, то

$$H_\infty(\hat{w},m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.150}$$

Из оценок (2.147)–(2.149) в случае $1 \leqslant q < \infty$ и соотношений (2.150) в случае $q = +\infty$ на основании теоремы 2.32 получим утверждение доказываемой теоремы.

Тем самым, теорема 2.37 доказана. □

Замечание 2.38. В работах автора диссертации [144; 148; 167] показано, что теорема 2.37 точна в следующем смысле:
1) если $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{q}>1$, $q>1$, $r>1$, $r_1>r$, $q_1>q$, но по-прежнему $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{q_1}>1$, то существуют функции $f(x)\in L_r[0,1]$ и $g(x)\in L_q[0,1]$, положительная константа $C(q_1,r_1)$ и возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\left|\mathcal{W}\left(\frac{1}{2}\right)\sigma_{m_k}\left(f,\frac{1}{2}\right)-\sigma_{m_k}\left(\mathcal{W}f,\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant C(q_1,r_1)m_k^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}-1}\to+\infty;$$

2) если $q=1$, $\alpha+\beta<1$, $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1>\beta$, но по-прежнему $\alpha_1+\beta_1<1$, то существуют функции $f(x)\in H_\infty^\alpha[0,1]$ и $g(x)\in H_1^\beta[0,1]$, константа $C(\alpha_1,\beta_1)>0$ и некоторая возрастающая подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{N}$ такие, что

$$\left|\mathcal{W}\left(\frac{1}{2}\right)\sigma_{m_k}\left(f,\frac{1}{2}\right)-\sigma_{m_k}\left(\mathcal{W}f,\frac{1}{2}\right)\right|\geqslant C(\alpha_1,\beta_1)\frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}m_k}\to+\infty.$$

2.5 Доказательства теорем 2.2, 2.10 и 2.12 об оценке разности частичных сумм

Доказательство теоремы 2.2. Справедливость теоремы 2.2 в случае общих модулей непрерывности следует из теоремы 2.1 и теоремы 2.28 об оценке разности частичных тригонометрических сумм на основании соотношения

$$\begin{gathered}\Psi_m(x)=S_m(f,x)-\sigma_m(f,x)=\\ =S_m(f,x)-V(x)\sigma_m(f,x)+V(x)\Big(\sigma_m(V^{-1}f,x)-V^{-1}(x)\sigma_m(f,x)\Big)=\\ =\Phi_m(x)+V(x)\Big(\sigma_m(V^{-1}f,x)-V^{-1}(x)\sigma_m(f,x)\Big)=\\ =\Phi_m(x)-V(x)\Big(\tilde{\mathcal{W}}(x)\sigma_m(f,x)-\sigma_m(\tilde{\mathcal{W}}f,x)\Big)=:\Phi_m(x)-V(x)\tilde{\Theta}_m(x),\end{gathered}\tag{2.151}$$

где используются обозначения (2.5), $V(x)$ определяется формулой (2.6), $\tilde{\mathcal{W}}(x):=V^{-1}(x)$ и функция $\tilde{\Theta}_m(x)$ есть аналог функции $\Theta_m(x)$, определенной формулой (2.91), в которой вместо функции $\mathcal{W}(x)$ стоит функция $\tilde{\mathcal{W}}(x)$.

Для функции $\tilde{\mathcal{W}}(x)$ справедлива формула

$$\tilde{\mathcal{W}}(x)=V^{-1}(x)=\exp\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^x p_1(\tau)\,d\tau\right)=1+\int\limits_0^x\tilde{g}(t)\,dt,\tag{2.152}$$

где

$$\tilde g(t) := \frac{1}{n}\, p_1(t)V^{-1}(t). \tag{2.153}$$

Ясно, что если $p_1(t) \in L_q[0,1]$, то и $\tilde g(t) \in L_q[0,1]$ и наоборот.

Следовательно, функция $\tilde{\mathcal{W}}(x) \equiv V^{-1}(x)$ есть аналог функции $\mathcal{W}(x)$ в теореме 2.28 для случая общих модулей непрерывности и для нее вместо формулы (2.90) справедлива формула (2.152) с $\tilde g(t) \in L_q[0,1]$.

Тогда на основании теоремы 2.28 получим оценку

$$\|\tilde\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,\tilde g,K)\tilde Q_m, \tag{2.154}$$

где

$$\tilde Q_m = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r H_q\bigl(\theta_q(\tilde g,\cdot),m\bigr) + \omega\left(\tilde g,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}; \tag{2.155}$$

$$H_q\bigl(\theta_q(\tilde g,\cdot),m\bigr) = \left(\int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\, \theta_q^q(\tilde g,\xi)\, d\xi \right)^{1/q} \quad (1 \leqslant q < \infty),\ H_\infty\bigl(\theta_\infty(\tilde g,\cdot),m\bigr) = 1; \tag{2.156}$$

$$\theta_q(\tilde g,\xi) = \sup_{\tau\in[0,\xi]} \theta_{1q}(\tilde g,\tau) \ \text{ при } \ 1 \leqslant q < \infty \ \text{ и } \ \theta_\infty(\tilde g,\xi) = 1, \tag{2.157}$$

$$\theta_{1q}(\tilde g,\tau) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \omega\Bigl(\tilde g,\frac{1}{k}\Bigr)_q + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \text{ при } 1 \leqslant q < \infty \tag{2.158}$$

Оценим все объекты, содержащие функцию $\tilde g(x)$, через аналогичные объекты, содержание только функцию $p_1(x)$.

Если обозначить $v^* := \max\limits_{t\in[0,1]} |V^{-1}(t)|$, то на основании (2.153) получим

$$\omega(\tilde g,\delta)_q = \frac{1}{n} \sup_{0<h\leqslant\delta} \left(\int\limits_0^{1-h} |p_1(t+h)V^{-1}(t+h) - p_1(t)V^{-1}(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \left(\sup_{0<h\leqslant\delta} \left(\int\limits_0^{1-h} |p_1(t+h) - p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h)|^q\, dt \right)^{1/q} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0<h\leqslant\delta} \left(\int\limits_0^{1-h} |p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{v^*}{n}\,\omega(p_1,\delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0<h\leqslant\delta}\sup_{t\in[0,1-h]} |V^{-1}(t+h)-V^{-1}(t)| =$$

$$= \frac{v^*}{n}\,\omega(p_1,\delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0<h\leqslant\delta}\sup_{t\in[0,1-h]} \left|\int\limits_0^{1-h} \tilde g(\tau)\,d\tau\right|. \qquad (2.159)$$

Так как по условию $p_1(x)\in L_q[0,1]$, то из равенства (2.153) и леммы 2.29 следует

$$\int\limits_t^{t+h} |\tilde g(\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{v^*}{n}\int\limits_t^{t+h} |p_1(\tau)|\,d\tau \leqslant C(p_1)h^{\frac{1}{r}}\theta_q(p_1,h), \qquad (2.160)$$

где $\theta_q(p_1,h)$ определяется формулами (2.10)–(2.11).

Из (2.159)–(2.160) будем иметь

$$\omega(\tilde g,\delta)_q \leqslant C(p_1)\left(\omega(p_1,\delta)_q + \delta^{\frac{1}{r}}\theta_q(p_1,\delta)\right). \qquad (2.161)$$

Учитывая эту оценку в (2.158), получим

$$\theta_{1q}(\tilde g,\tau) \leqslant C(p_1)\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\omega\!\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right) + (k^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right\} =$$

$$= C(p_1)\hat\theta_{1q}(p_1,\tau), \quad (2.162)$$

где используется обозначение (2.13).

На основании этой оценки из (2.157) найдем

$$\theta_q(\tilde g,\xi) \leqslant C(p_1)\sup_{\tau\in[0,\xi]}\hat\theta_{1q}(p_1,\tau) = C(p_1)\hat\theta_q(p_1,\xi), \qquad (2.163)$$

где используется обозначение (2.12).

Наконец, из (2.156) и (2.163) получим

$$H_q\big(\theta_q(\tilde g,\cdot),m\big) \leqslant C(p_1)\left(\int\limits_{1/m}^{1}\frac{1}{\xi}\,\hat\theta_q^q(p_1,\xi)\,d\xi\right)^{1/q} = C(p_1)H_q\big(\hat\theta_q(p_1,\cdot),m\big). \quad (2.164)$$

Таким образом, из (2.154), (2.155), (2.161), (2.164), следует

$$\tilde Q_m \leqslant C(f,p_1,K)\hat Q_m, \qquad (2.165)$$

где

$$\hat Q_m = \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{H_q\big(\hat\theta_q(p_1,\cdot),m\big)\,\omega\left(f,\frac{1}{k}\right)_r + \omega\left(p_1,\frac{1}{k}\right)_q + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right) + \frac{k^4\ln m}{m}\right\}. \quad (2.166)$$

Следовательно, из соотношений (2.151), (2.154), (2.165), (2.166), а также из теоремы 2.1 получим утверждение доказываемой теоремы.

Тем самым, теорема 2.2 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 2.10. Предположим теперь, что выполняется условие (2.17), а функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию 2.6 МИ.

Учитывая условие (2.17) в теореме 2.2, получим

$$
\begin{gathered}
B_m \leqslant C(f,p_1)\times \\
\times \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\left(\ln m\,\Omega_2\left(\frac{1}{k}\right)+1+H_q\big(\hat{\theta}_q(p_1,\cdot),m\big)+\frac{k^{2/q}}{m^{1/q}}+\frac{k^2\ln m}{m}\right)\Omega_1\left(\frac{1}{k}\right)+\right. \\
\left.+\left(1+\frac{k^2\ln m}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k^{1/r}}\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right)+\frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}}+\frac{k^4\ln m}{m}\right\}. \qquad (2.167)
\end{gathered}
$$

На основании леммы 2.33 и условия (2.17), при $1\leqslant q<\infty$ справедлива оценка

$$
\theta_q\left(p_1,\frac{1}{k}\right)=O\left(\Omega_2\left(\frac{1}{k}\right)\right) \qquad (2.168)
$$

Если же $q=\infty$, то

$$
\theta_\infty\left(p_1,\frac{1}{k}\right)=1 \text{ при всех } k\in\mathbb{N}. \qquad (2.169)
$$

С использованием рассуждений, аналогичных тем, которые использовались при доказательстве леммы 2.33, при $1\leqslant q<\infty$ получается оценка

$$
\hat{\theta}_q(p_1,\xi)=O\big(\Omega_2(\xi)\big).
$$

На освнове этой оценки аналогично лемме 2.34 доказывается следующая лемма. Доказательство опускаем.

Лемма 2.39. *Если* $1\leqslant q<+\infty$, *то справедлива следующая оценка*

$$
H_q\big(\hat{\theta}_q(p_1,\cdot),m\big)=O\big(H_q\big(\Omega_2,m\big)\big) \quad \text{при} \quad m\to\infty \qquad (2.170)
$$

и функция $H_q\big(\Omega_2,m\big)$ *есть м.м.ф. в бесконечности как функция от* m.

Используя эту лемму, оценки (2.167), (2.168), (2.170), свойства м.м.ф., даваемых леммами 2.36 и 2.25, получаем оценку (2.21) в случае $1\leqslant q<\infty$.

В случае $q=\infty$ рассуждения тривиальным образом видоизменяются и также получается оценка (2.21).

Из оценки (2.21) вытекают достаточные условия равносходимости (2.18) и (2.20).

Тем самым теорема 2.10 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 2.12. Предположим, что выполняется условие (2.22).

Для доказательства теоремы 2.12 воспользуемся теоремой 2.10.

Введем непрерывные неубывающие функции $\hat\Omega_1(\delta)$ и $\hat\Omega_2(\delta)$ на отрезке [0,1], которые удовлетворяют условию 2.6 МИ и на некотором достаточно малом отрезке $[0,\varepsilon_0] \subset [0,1)$ выполняются равенства

$$\hat\Omega_1(\delta) = \frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}, \quad \hat\Omega_2(\delta) = \frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}, \quad (\hat\Omega_1(0) := 0, \hat\Omega_2(0) := 0). \tag{2.171}$$

Вне отрезка $[0,\varepsilon_0]$ конкретный вид функций $\hat\Omega_1(\delta)$ и $\hat\Omega_2(\delta)$ не принципиален. Ясно, что таких функций существует бесконечно много.

С учетом соотношений (2.171) из оценок (2.21) теоремы 2.10 для любого компакта $K \subset (0,1)$ при $m \gg 1$ следуют оценки

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} H_q(\hat\Omega_2,m) + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m}\right). \tag{2.172}$$

Для оценки $H_q(\hat\Omega_2,m)$ проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при получении оценок (2.148)–(2.150).

В случае $1 \leqslant q < \infty$ из формулы (2.9) для функции $H_q(h,m)$ и равенства (2.171) для функции $\hat\Omega_2(\delta)$, будем иметь

$$H_q^q(\hat\Omega_2,m) = \int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi}\,\hat\Omega_2^q(\xi)\,d\xi = \int\limits_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi}\,\hat\Omega_2^q(\xi)\,d\xi + \int\limits_{\varepsilon_0}^{1} \frac{1}{\xi}\,\hat\Omega_2^q(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int\limits_{1/m}^{\varepsilon_0} \frac{1}{\xi}\,\frac{1}{\ln^{\beta q}\frac{1}{\xi}}\,d\xi + C = \int\limits_{1/\varepsilon_0}^{m} \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{\ln^{\beta q}\tau}\,d\tau + C = \int\limits_{1/\varepsilon_0}^{m} \frac{1}{\ln^{\beta q}\tau}\,d\ln\tau + C.$$

Отсюда следуют оценки:

если $\beta q \neq 1$

$$H_q^q(\hat\Omega_2,m) \leqslant C\left(\frac{\ln m}{\ln^{\beta q} m} + 1\right),$$

а при $\beta q = 1$

$$H_q^q(\hat\Omega_2,m) \leqslant C(\ln\ln m + 1) \leqslant C\ln\ln m.$$

Таким образом, в случае $1 \leqslant q < \infty$ получим:
если $\beta q \neq 1$, то

$$H_q(\hat{\Omega}_2,m) \leqslant C\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1\right), \tag{2.173}$$

а если $\beta q = 1$, то

$$H_q(\hat{\Omega}_2,m) \leqslant C\big(\ln\ln m\big)^{1/q}. \tag{2.174}$$

Если же $q = \infty$, то

$$H_\infty(\hat{\Omega}_2,m) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.175}$$

Учитывая оценки (2.173)–(2.174) в (2.172), будем иметь при $1 \leqslant q < \infty$:
если $\beta q \neq 1$, то

$$\begin{aligned}\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leqslant \\ &\leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m}\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}} m}{\ln^{\beta} m} + 1\right) + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right) = \\ &\leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right),\end{aligned} \tag{2.176}$$

а если $\beta q = 1$, то

$$\begin{aligned}\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} &\leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{\big(\ln\ln m\big)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right) = \\ &\leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{\big(\ln\ln m\big)^{1/q}}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right).\end{aligned} \tag{2.177}$$

Если же $q = \infty$, то учитывая равенство (2.175) в (2.172), будем иметь

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K)\left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^{\alpha} m} + \frac{1}{\ln^{\beta} m}\right). \tag{2.178}$$

Из оценок (2.176)–(2.178) следует утверждение теоремы 2.12.
Тем самым теорема 2.12 полностью доказана. □

Глава 3. Кратная полнота системы корневых функций некоторых классов обыкновенных дифференциальных оператор-функций

Основным объектом, рассматриваемым в данной главе, является обыкновенная дифференциальная оператор-функция (о.-ф.) $L(\lambda)$ (часто используется также термин «пучок»), порожденная дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, p_{n0} \neq 0, p_{0n} \neq 0, \tag{3.1}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами.

Исследуется вопрос об n- и m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) полноте в пространстве $L_2[0,1]$ собственных и присоединённых функций (с.п.ф.) или, кратко, корневых функций (к.ф.) оператор-функции $L(\lambda)$ вида (3.1)–(3.2) в ранее не исследованных случаях.

Краткая история вопроса изложена во Введении.

Глава состоит из семи разделов.

В первом разделе вводятся необходимые для дальнейшего обозначения и приводятся основные определения.

Во втором разделе дается классификация о.-ф. $L(\lambda)$ по степени усиления их нерегулярности по аналогии с [207]. Так как д.в. (3.1) однородное, то классификация становится конечной, в отличие от [207], где рассматривались произвольные д.в.

В третьем разделе дается схема доказательства кратной полноты к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ и обсуждается важная роль при этом так называемых порождающих (или производящих) (п.ф.) функций для системы к.ф. $L(\lambda)$, как уже давно используемых «классических» п.ф., так и введённых автором диссертации обобщённых п.ф. Изучаются свойства обобщённых п.ф. и доказываются некоторые вспомогательные результаты.

В четвертом разделе доказываются общие теоремы о достаточных условиях кратной полноты к.ф. в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом с использованием обобщённых п.ф.

В пятом разделе рассматриваются три конкретных примера сильно нерегулярных о.-ф. третьего порядка с нераспадающимися краевыми условиями, для которых классические п.ф. не позволяют исследовать кратную полноту к.ф. в $L_2[0,1]$, а обобщённые п.ф. позволяют установить, соответственно, одно-, двух- и трехкратную полноту к.ф. в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

В шестом разделе, в случае распадающихся краевых условий и расположения характеристик на двух лучах, исходящих из начала, доказываются достаточные условия кратной полноты к.ф. в $L_2[0,1]$ в тех случаях, когда это можно сделать с помощью классических п.ф., и выявляется случай, когда кратная полнота не может быть установлена с помощью классических п.ф. Использование обобщённых п.ф. и в этом случае позволяет получить достаточные условия кратной полноты. Приводятся примеры, иллюстрирующие доказанные теоремы.

Наконец, в седьмом разделе с использованием обобщённых п.ф. полностью исследуется вопрос о полноте к.ф. обыкновенного дифференциального оператора 5-го порядка, порожденного простейшим д.в. и двучленными двухточечными краевыми условиями.

Результаты, изложенные в рассматриваемой главе, опубликованы в разных вариантах в работах автора диссертации [37; 38; 40–45; 47; 156; 159; 160; 164; 166; 170; 171].

3.1 Основные обозначения и определения

Не нарушая общности, можно считать краевые условия (3.2) нормированными (в смысле определения из [207]), то есть

$$U_i(y,\lambda) \equiv U_{i0}(y,\lambda) + U_{i1}(y,\lambda) :=$$
$$:= \sum_{j+s\leqslant \varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3.3)$$

где α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i$ есть порядок i-го краевого условия ($\varkappa_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$). Суммарный порядок краевых условий (3.3) обозначим буквой $\varkappa$, т. е.

$$\varkappa := \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n.$$

Д.в. $\ell(y,\lambda)$ является *однородным*, так как в (3.1) присутствуют $p_{js} \neq 0$ только при $j + s = n$. Если в (3.1) есть $p_{js} \neq 0$ при $j + s < n$, то такое д.в. по аналогии будем называть *неоднородным*. Аналогично, будем называть i-е краевое условие (3.3) *однородным*, если есть отличные от нуля коэффициенты α_{ijs} или β_{ijs} при $j + s = \varkappa_i$, а $\alpha_{ijs} = \beta_{ijs} = 0$ при $j + s < \varkappa_i$, и, соответственно, *неоднородным*, если есть $\alpha_{ijs} \neq 0$ или $\beta_{ijs} \neq 0$ при $j + s < \varkappa_i$.

Далее будем использовать известные определения с.з., к.ф., производных (по М. В. Келдышу) цепочек из [92; 93; 135; 207].

Определение 3.1. Те значения $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых краевая задача $L(\lambda)y = 0$ имеет нетривиальные решения $y(x)$, называются *собственными значениями* краевой задачи или о.-ф. $L(\lambda)$, а соответствующие нетривиальные решения $y(x)$ — её *собственными функциями* (с.ф.). $\square$

Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. $L(\lambda)$. Предполагается, что множество Λ счётное.

Определение 3.2. Пусть $\lambda_\nu \in \Lambda$ и $y_{\nu 0}(x)$ — соответствующая с.ф. Система функций $y_{\nu 1}(x)$, $y_{\nu 2}(x)$, ..., $y_{\nu, s_\nu}(x)$ называется *цепочкой функций, присоединенных к с.ф.* $y_{\nu 0}(x)$ (с.п.ф.), если эти функции являются решениями следующих краевых задач

$$L(\lambda_\nu)y_{\nu q} + \frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_\nu)}{\partial \lambda}y_{\nu,q-1} + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q L(\lambda_\nu)}{\partial \lambda^q}y_{\nu 0} = 0, \quad q = \overline{0,s_\nu}.$$

$\square$

Определение 3.3. Пусть $\lambda_\nu \in \Lambda$ и $y_{\nu 0}(x)$, $y_{\nu 1}(x)$, $y_{\nu 2}(x)$, ..., $y_{\nu, s_\nu}(x)$ есть соответствующая система с.п.ф. или, кратко, к.ф. Обозначим

$$\psi^\nu_{jq}(x) = \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda_\nu t}\left(y_{\nu q}(x) + \frac{t}{1!}y_{\nu,q-1}(x) + \ldots + \frac{t^q}{q!}y_{\nu 0}(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0},$$
$$j = \overline{0,n-1},\ q = \overline{0,s_\nu}.$$

Для $1 \leqslant m \leqslant n$ система m-вектор-функций

$$\left(\psi^\nu_{0q}(x), \psi^\nu_{1q}(x), \ldots, \psi^\nu_{m-1,q}(x)\right)^T, \quad q = \overline{0,s_\nu},$$

называется *производной m-цепочкой* (по М. В. Келдышу), соответствующей системе к.ф. $y_{\nu 0}(x)$, $y_{\nu 1}(x)$, $\ldots$, $y_{\nu,s_\nu}(x)$. $\square$

Пусть $Y := \{y_k(x)\}$ — множество всех к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 3.4. Система Y корневых функций $L(\lambda)$ называется m-кратно полной в пространстве $L_2[0,1]$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, если из условия ортогональности вектор-функции (в.-ф.) $h(x) \in L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. Y, следует равенство $h(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Здесь

$$L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}.$$

$\square$

Обозначим через $\mathfrak{M}^m$ замыкание в метрике пространства $L_2^m[0,1]$ системы производных m-цепочек, соответствующих системе Y, а через $\mathfrak{N}^m$ — его ортогональное дополнение в пространстве $L_2^m[0,1]$, т. е.

$$\mathfrak{N}^m := L_2^m[0,1] \ominus \mathfrak{M}^m.$$

Определение 3.5. Подпространство $\mathfrak{N}^m$ называется *дефектным подпространством* системы производных m-цепочек, соответствующих системе Y, а его размерность — *дефектом* в пространстве $L_2^m[0,1]$ этой системы. $\square$

К понятию n-кратной полноты приводит, например, решение следующей начально-граничной задачи

$$\ell\left(u, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 \quad (u = u(x,t)), \tag{3.4}$$

$$U_i\left(u, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^s}{\partial t^s} u(x,0) = h_{s+1}(x), \quad s = \overline{0,n-1}. \tag{3.6}$$

Как известно, функции

$$u_{\nu q}(x,t) = e^{\lambda_\nu t}\left(y_{\nu q}(x) + \frac{t}{1!} y_{\nu,q-1}(x) + \ldots + \frac{t^q}{q!} y_{\nu 0}(x)\right), \quad q = \overline{0,s_\nu},$$

являются элементарными решениями задачи (3.4)–(3.6). Если искать решение этой начально-граничной задачи в виде

$$u(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{s_\nu}c_{\nu q}u_{\nu q}(x,t),$$

то попытка удовлетворить начальные условия (3.6) и приводит к понятию n-кратной полноты. Соответствующим образом обстоит дело и с понятием m-кратной полноты, когда $1 \leqslant m \leqslant n$.

3.2 Классификация дифференциальных оператор-функций с постоянными коэффициентами по Шкаликову

При исследовании кратной полноты к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ важную роль играет то, к какому классу принадлежит $L(\lambda)$ (классу регулярных о.-ф. или нерегулярных). От этого существенно зависят методы исследования этих о.-ф. Поэтому, предварительно необходимо дать классификацию о.-ф. Удобно использовать при этом подход, предложенный в [207].

Рассмотрим уравнение $\ell(y,\lambda)=0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^{n}$ его характеристического уравнения (кратко называем их характеристиками)

$$\sum_{j+s=n}p_{js}\omega^j=0$$

попарно различны и отличны от нуля. Система функций

$$y_j(x,\lambda)=e^{\lambda\omega_j x},\quad j=\overline{1,n}, \tag{3.7}$$

является фундаментальной системой решений (ф.с.р.) уравнения $\ell(y,\lambda)=0$ при $\lambda\neq 0$.

В [207] классификация о.-ф. проводится для самых общих о.-ф., коэффициенты д.в. которых могут зависеть от x. Для проведения этой классификации требуется накладывать дополнительные условия гладкости на коэффициенты о.-ф., чтобы получить достаточное число членов уточнённой асимптотики ф.с.р. по спектральному параметру.

В случае д.в. (3.1) ф.с.р. имеет самый простой вид (3.7). Поэтому классификация сильно упрощается и становится конечной, в отличие от классификации в [207].

Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,n}$

$$U_j(\lambda) = (u_{1j}(\lambda), \ldots, u_{nj}(\lambda))^T := (U_1(y_j,\lambda), \ldots, U_n(y_j,\lambda))^T, \tag{3.8}$$

$$V_j(\lambda) = (v_{1j}(\lambda), \ldots, v_{nj}(\lambda))^T := (U_{10}(y_j,\lambda), \ldots, U_{n0}(y_j,\lambda))^T, \tag{3.9}$$

$$W_j(\lambda) = (w_{1j}(\lambda), \ldots, w_{nj}(\lambda))^T := e^{-\lambda\omega_j} (U_{11}(y_j,\lambda), \ldots, U_{n1}(y_j,\lambda))^T. \tag{3.10}$$

При необходимости для краткости аргумент λ у функций и в.-ф. будем опускать в тех случаях, когда это не мешает пониманию формул.

С использованием этих обозначений характеристический определитель (х.о.) оператор-функции $L(\lambda)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \det (U_i(y_j,\lambda))_{i,j=1}^n = \left|U_1(\lambda), U_2(\lambda), \ldots, U_n(\lambda)\right| = \\ &= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1} W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2} W_2(\lambda), \ldots, V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n} W_n(\lambda)\right| = \\ &= \lambda^{\varkappa} \left|\hat{V}_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1} \hat{W}_1(\lambda), \hat{V}_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2} \hat{W}_2(\lambda), \ldots, \hat{V}_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n} \hat{W}_n(\lambda)\right|, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где векторы с крышками определяются формулами при $j = \overline{1,n}$

$$\hat{V}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} v_{1j}(\lambda), \ldots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} v_{nj}(\lambda)\right)^T, \hat{W}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} w_{1j}(\lambda), \ldots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} w_{nj}(\lambda)\right)^T.$$

$\Delta(\lambda)$ есть целая функция по λ. Хорошо известно [135, с. 26–27], что отличные от нуля с.з. λ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, о.-ф. $L(\lambda)$ являются нулями этой функции. Известными методами (см., например, [207, лемма 1.1, с. 197]) можно найти асимптотику этих с.з. при $|\lambda|$ достаточно больших ($|\lambda| \gg 1$). Но эта асимптотика в данном разделе не потребуется.

Обозначим через Ω множество, состоящее из 0 и всевозможных сумм различных чисел ω_j, $j = \overline{1,n}$, по одному, по два и так далее до n слагаемых. Далее совпадающие точки $\omega \in \Omega$, но полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω.

Тогда, раскладывая определитель (3.11) на сумму определителей, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\varkappa} \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{F}^{\omega}(\lambda) e^{\lambda\omega}, \tag{3.12}$$

где

$$\mathrm{F}^{\omega}(\lambda) = \mathrm{F}_0^{\omega} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{F}_1^{\omega} + \cdots + \frac{1}{\lambda^{\varkappa}}\mathrm{F}_{\varkappa}^{\omega}.$$

Ясно, что если $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \dots + \omega_{j_k}$, то справедлива формула

$$\mathrm{F}^{\omega}(\lambda) := $$
$$:= \left| \hat{V}_1(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_1-1}(\lambda), \hat{W}_{j_1}(\lambda), \hat{V}_{j_1+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_{j_k-1}(\lambda), \hat{W}_{j_k}(\lambda), \hat{V}_{j_k+1}(\lambda), \dots, \hat{V}_n(\lambda) \right|.$$

Положим $M = \operatorname{conv}\{\Omega\}$ (может случиться, что M — отрезок). Точки $\omega \in \Omega$, которые оказались на границе многоугольника M, назовем *граничными*, а точки, лежащие в вершинах M, — *угловыми*.

В дальнейшем будет использоваться следующее обозначение

$$[\eta(x,\lambda)]_r = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r}, \quad r \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

для функции

$$\eta(x,\lambda) = \eta_0(x) + \frac{\eta_1(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^r} + \frac{\eta_r(x)}{\lambda^{r+1}} + \ldots.$$

Для $r \in \{0,1,\dots,\varkappa\}$ через $(M_\Delta)_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω, для которых $[\mathrm{F}^{\omega}(\lambda)]_r \not\equiv 0$. Ясно, что

$$(M_\Delta)_0 \subset (M_\Delta)_1 \subset \ldots \subset (M_\Delta)_\varkappa \subset M.$$

Многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ будем кратко обозначать M_Δ и называть *характеристическим многоугольником* (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

Отметим, что из представления (3.12) видно, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), т. е. первого порядка и нормального типа. Х.м. M_Δ есть в точности сопряженная диаграмма (с.д.) $\bar{I}_\Delta$ функции $\Delta(\lambda)$ в соответствии с определением из [109, с. 113–117]. Для удобства соответствующие определения и результаты из [109] приведены в приложении А.

По аналогии с [207] дадим следующие определения.

Определение 3.6. О.-ф. $L(\lambda)$ назовем *регулярной* (по Биркгофу-Тамаркину), если $(M_\Delta)_0 = M$. $\square$

Определение 3.7. О.-ф. $L(\lambda)$ назовем *почти регулярной* (регулярной по Стоуну), если $(M_\Delta)_\varkappa = M$. $\square$

Определение 3.8. О.-ф. $L(\lambda)$ назовём *слабо нерегулярной* (или *нормальной* по терминологии [207]), если многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам M, на которых лежат точки касания (если точка касания — угловая, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то о.-ф. $L(\lambda)$ назовём *слабо нерегулярной*, когда $(M_\Delta)_\varkappa = M$. $\square$

То есть о.-ф. $L(\lambda)$ слабо нерегулярна, если имеются по крайней мере три луча в λ-плоскости, которые разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$ и на которых резольвента $L(\lambda)$ имеет не более чем степенной рост.

Из определений следует, что регулярная и почти регулярная о.-ф. является в то же время слабо нерегулярной.

Определение 3.9. О.-ф. $L(\lambda)$, которая не удовлетворяет предыдущему определению, назовём *сильно нерегулярной* (см. рисунок 3.1). $\square$

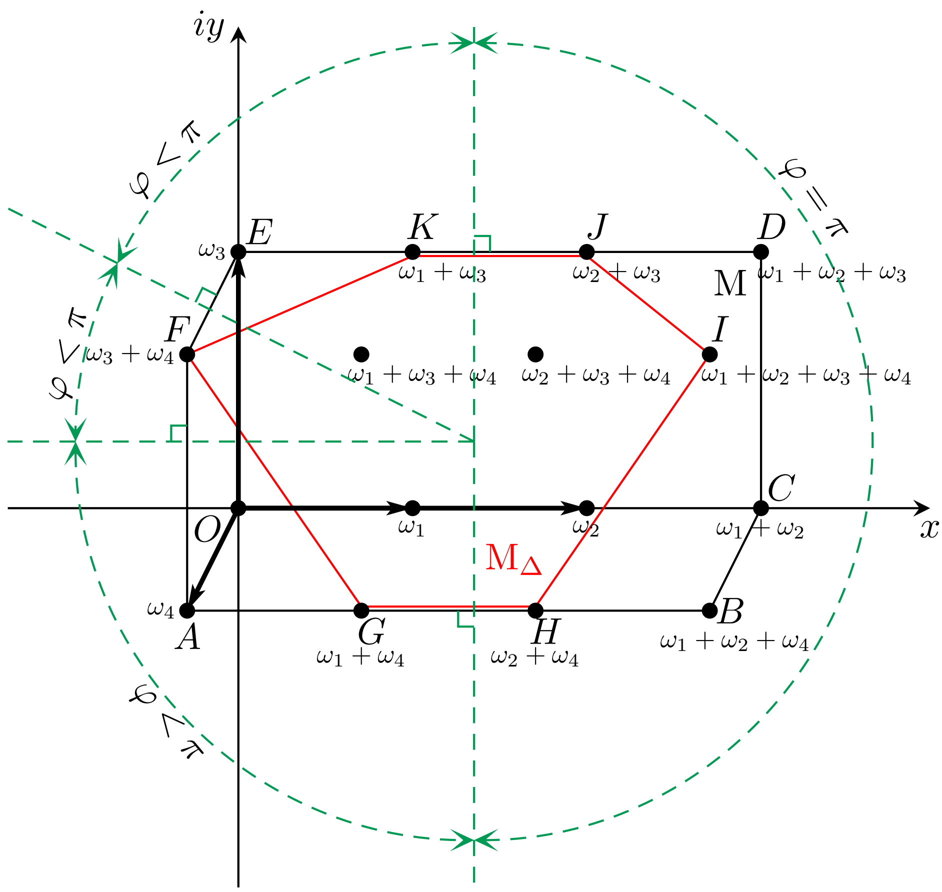

Рисунок 3.1 — Многоугольники M и M_Δ. Сильно нерегулярная о.-ф.

На рисунке 3.1 приведен пример (чисто иллюстративный) о.-ф. 4-го порядка с характеристиками ω_j, $j = 1{,}2{,}3{,}4$, изображенными соответствующими векторами. Многоугольник M есть многоугольник $ABCDEF$, характеристический многоугольник M_Δ есть многоугольник $GHIJKF$. Многоугольник M_Δ

касается сторон AB, DE, EF и AF многоугольника M. Перпендикуляры из внутренней точки M_Δ к этим сторонам изображены штриховыми лучами. Из рисунка видно, что рассматриваемая о.-ф. не является слабо нерегулярной, т. е., в соответствии с определением 3.9, является сильно нерегулярной.

Таким образом, о.-ф. $L(\lambda)$ сильно нерегулярна, если ее резольвента имеет экспоненциальный рост в λ-плоскости не менее, чем в полуплоскости.

В [207] было отмечено, что определение регулярности 3.6 о.-ф. $L(\lambda)$ эквивалентно определению регулярности в [187] и, естественно, называть такие о.-ф. регулярными по Тамаркину. В частном случае обыкновенных дифференциальных операторов эта регулярность совпадает с регулярностью по Биркгофу [135].

О.-ф., которые в определении 3.7 названы почти регулярными, являются обобщением одного класса обыкновенных дифференциальных операторов, которые для порядка $n = 2$ изучались М. Стоуном [52], а в общем случае А. П. Хромовым [192] и Г. Е. Бенцингером [3; 4] (в [3] такие операторы были названы регулярными по Стоуну).

Класс слабо нерегулярных о.-ф. $L(\lambda)$, даваемых определением 3.8, был введен А. А. Шкаликовым в [207] и назван классом нормальных о.-ф. Этот класс существенно шире первых двух классов. Из результатов [207] следует, что если о.-ф. $L(\lambda)$ из этого класса, то система её к.ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$.

Исследование кратной полноты для о.-ф. из класса сильно нерегулярных о.-ф. представляет наибольшую трудность и проведено лишь для отдельных множеств о.-ф. $L(\lambda)$.

Предлагается новый подход для исследования кратной полноты к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, использующий понятие порождающей функции.

3.3 Порождающие функции и схема доказательства кратной полноты системы корневых фуекций

Далее потребуется определение, аналогичное определению производящего полинома для цепочки к.-ф. оператор-функции общего вида из [127]

Определение 3.10. Функцию $\mathrm{g}(x,\lambda)$, определенную для всех $x \in [0,1]$ и $\lambda \in D$, где $D \subset \mathbb{C}$ есть некоторое множество такое, что $\Lambda \cap D \neq \varnothing$, будем называть *порождающей* (или *производящей*) *функцией* (п.ф.) для системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, соответствующих тем с.з., которые лежат в D, если функции

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^k \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad k=\overline{\tau_\nu,s_\nu}, \quad 0\leqslant\tau_\nu\leqslant s_\nu \quad \lambda_\nu\in\Lambda\cap D,$$

являются к.ф. $L(\lambda)$, соответствующими с.з. λ_ν кратности $s_\nu+1$. Здесь τ_ν определяется условием

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^k \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^k}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}\equiv 0, \quad k=\overline{0,\tau_\nu-1}, \quad \frac{1}{\tau_\nu!}\frac{\partial^{\tau_\nu} \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^{\tau_\nu}}\bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}\not\equiv 0.$$

□

В случае простых с.з., когда все с.ф. $L(\lambda)$ однократны, функция $\mathrm{g}(x,\lambda)$ будет порождающей для системы с.ф. $L(\lambda)$, соответствующих тем с.з., которые лежат в D, если система $\{\mathrm{g}(x,\lambda_\nu)\}_{\lambda_\nu\in D}$, является системой с.ф. $L(\lambda)$.

Далее будем рассматривать только случай, когда $D=\mathbb{C}$ и п.ф. есть решения уравнения $\ell(y,\lambda)=0$.

В этом случае п.ф. являются ц.ф.э.т. по λ и можно воспользоваться теорией, изложенной в [109, с. 113–117] (см. Приложение A). Согласно этой теории, для каждого фиксированного $x\in[0,1]$ можно построить сопряженную диаграмму $M_{\mathrm{g}(x,\lambda)} := \bar{I}_{\mathrm{g}(x,\lambda)}$, которая является многоугольником.

Дадим следующее определение.

Определение 3.11. Многоугольник

$$M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)} := \mathrm{conv}_{x\in[0,1]}\, M_{\mathrm{g}(x,\lambda)}, \tag{3.13}$$

назовём *характеристическим многоугольником* п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$ (кратко обозначаем его M_{g}, если не возникает разночтения). □

С точки зрения схемы доказательства кратной полноты к.ф., предпочтительнее п.ф. с наиболее компактным х.м. в следующем смысле.

Определение 3.12. Будем говорить, что п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначаем $\mathrm{g}(x,\lambda)\in(\alpha)$), если M_Δ имеет не менее двух точек касания с $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$, причем перпендикуляры, проведенные из некоторой фиксированной внутренней точки к сторонам $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$, на которых лежат точки касания M_Δ (если точка касания — угловая, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $<\pi$ (см. рисунок 3.2). □

На рисунке 3.2, который соответствует той же самой о.-ф. 4-го порядка, которая иллюстрировалась рисунком 3.1, дополнительно штриховой линией изображен х.м. $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$ п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$, который в данном случае есть многоугольник $ABCIJEF$. Многоугольник M_Δ касается сторон AB, CI, IJ, JE, EF и AF многоугольника $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$. Перпендикуляры к этим сторонам из внутренней точки M_Δ изображены штриховыми лучами (эти перпендикуляры уже фигурировали на рисунке 3.1) и пунктирными лучами (появившиеся новые перпендикуляры). Из рисунка видно, что все углы между соседними перпендикулярами $< \pi$, т. е. $\mathrm{g}(x,\lambda) \in (\alpha)$.

Распространим определение 3.12 на любые выпуклые многоульники.

Определение 3.13. Будем говорить, что выпуклый многоугольник N удовлетворяет условию (α) (обозначаем $N \in (\alpha)$), если для него выполняется то же условие, что и для многоугольника $M_{\mathrm{g}(\cdot,\lambda)}$ в предыдущем определении. $\square$

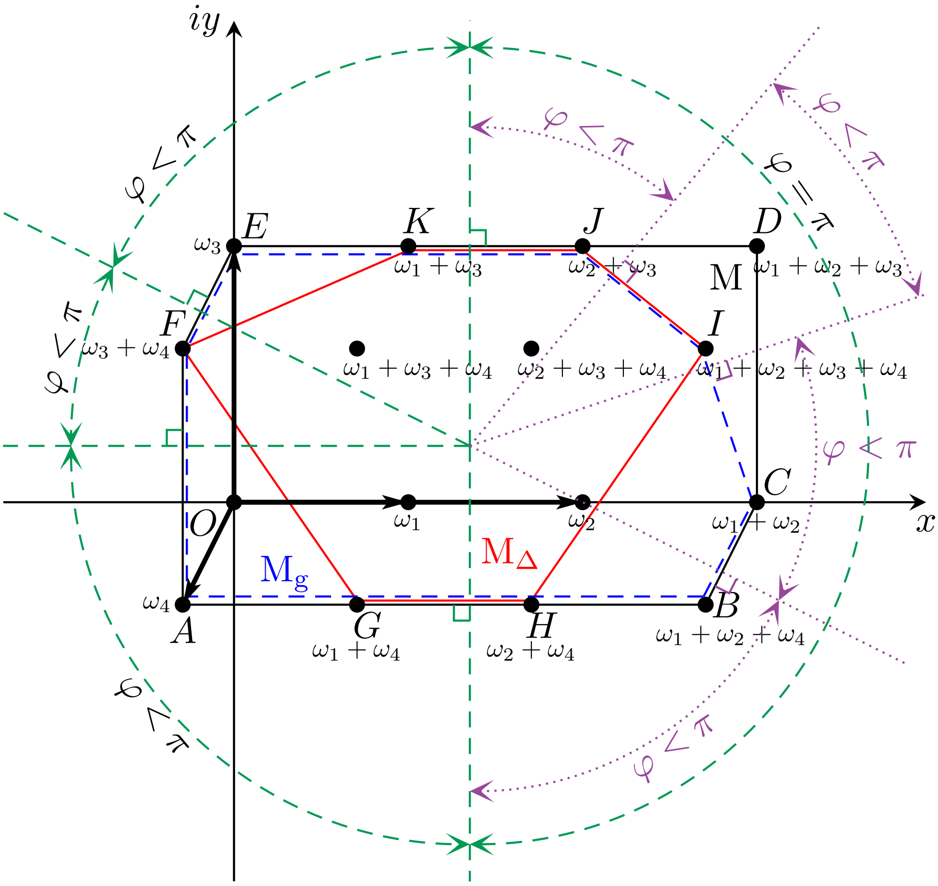

Рисунок 3.2 — Сильно нерегулярная о.-ф., $\mathrm{g}(x,\lambda) \in (\alpha)$

В основе стандартной схемы доказательства кратной полноты (сокращенно будем говорить: схема ДКП) лежит следующая лемма.

Лемма 3.14. *Если* $\mathrm{g}(x,\lambda) \in (\alpha)$ *и* $h(x) = (h_1(x),h_2(x),\ldots,h_m(x))^T$ *ортогональна всем производным* m*-цепочкам, соответствующим системе к.ф.* Y*, то при дополнительном условии ортогональности* $h(x)$ *некоторому конечному набору в.-ф. справедливо равенство*

$$H_m(\mathrm{g},\lambda) \equiv 0, \tag{3.14}$$

где

$$H_m(\mathrm{g},\lambda) := \int\limits_0^1 \mathrm{g}(x,\lambda)\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx, \quad \mathrm{h}_m(x,\lambda) := \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\bar{h}_j(x). \tag{3.15}$$

Доказательство. Из определения п.ф. следует [60; 93; 205], что векторы

$$\left(\frac{\partial^q \mathrm{g}(x,\lambda)}{\partial\lambda^q},\frac{\partial^q(\lambda \mathrm{g}(x,\lambda))}{\partial\lambda^q},\ldots,\frac{\partial^q(\lambda^{m-1}\mathrm{g}(x,\lambda))}{\partial\lambda^q}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad q=\overline{\tau_\nu,s_\nu},\ \lambda_\nu \in \Lambda, \tag{3.16}$$

являются производными m-цепочками для к.ф. $L(\lambda)$, соответствующих с.з. λ_ν кратности $s_\nu + 1$.

Так как в.-ф. $h(x)$ ортогональна всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. Y, то $h(x)$ ортогональна всем векторам 3.16. Из этой ортогональности следует, что с.з. λ_ν, имеющее кратность $s_\nu + 1$, является нулем функции $H_m(\mathrm{g},\lambda)$ кратности не меньше $s_\nu + 1$. Ясно, что функция $H_m(\mathrm{g},\lambda)$ является ц.ф.э.т.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\mathcal{H}_m(\mathrm{g},\lambda) := \frac{H_m(\mathrm{g},\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{3.17}$$

которая формально имеет полюса в точках $\lambda_\nu \in \Lambda$, но, как это было отмечено выше, все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda = 0$ является нулем $\Delta(\lambda)$, но не является с.з. или является с.з. меньшей кратности. Такая ситуация может иметь место, так как используемая ф.с.р. не является таковой при $\lambda = 0$. В этом случае дополнительное предположение об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ конечному набору в.-ф. из $L_2^m[0,1]$, позволяет сделать вывод о том, что $\mathcal{H}_m(\mathrm{g},\lambda)$ есть ц.ф.э.т.

Так как п.ф. $\mathrm{g}(x,\lambda)$ удовлетворяет условию (α), то на основании принципа Фрагмена-Линделефа [109] получим, что

$$\mathcal{H}_m(\mathrm{g},\lambda) \equiv P(\lambda),$$

где $P(\lambda)$ есть вполне конкретный полином по λ, определяемый функцией $g(x,\lambda)$.

Требуя дополнительную ортогональность $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., устанавливаем, что $\mathcal{H}_m(\mathrm{g},\lambda) \equiv 0$, откуда следует тождество (3.14) при условии, что в.-ф. $h(x)$ ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.

Тем самым, лемма 3.14 доказана. □

Схема ДКП системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ предполагает наличие некоторого набора п.ф. $\mathrm{g}_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,r}$, удовлетворяющих условию (α). Тогда на основании леммы 3.14 получим

$$H_m(\mathrm{g}_i,\lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{1,r}, \tag{3.18}$$

при условии ортогональности в.ф. $h(x)$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф.

Если набор п.ф. достаточен для того, чтобы из (3.18) получить соотношения

$$h_1(x) = h_2(x) = \ldots = h_m(x) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in [0,1], \tag{3.19}$$

то это означает, что имеет место m-кратная полнота к.ф. $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Существенным условием описанной схемы ДКП системы к.ф. является наличие достаточного количества п.ф. $\mathrm{g}_i(x) \in (\alpha)$.

При исследовании спектральных свойств дифференциальных о.-ф. обычно используются (см., например, [60; 62; 135; 205; 206]) п.ф. вида

$$g_i(x,\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1,\lambda) & U_1(y_2,\lambda) & \ldots & U_1(y_n,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{i-1}(y_1,\lambda) & U_{i-1}(y_2,\lambda) & \ldots & U_{i-1}(y_n,\lambda) \\ y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ U_{i+1}(y_1,\lambda) & U_{i+1}(y_2,\lambda) & \ldots & U_{i+1}(y_n,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_n(y_1,\lambda) & U_n(y_2,\lambda) & \ldots & U_n(y_n,\lambda) \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.20}$$

где $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ есть ф.с.р. (3.7) уравнения $\ell(x,\lambda) = 0$.

Такие порождающие функции будем называть *классическими* п.ф. (или, кратко, к.п.ф.). Они являются ц.ф.э.т. по λ.

Далее потребуется следующее свойство этого семейства п.ф., которое сформулируем в виде леммы. Используется обозначение $\Lambda_0 := \Lambda \cup \{0\}$.

Лемма 3.15. *При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ функции $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, линейно независимы по переменной $x \in [0,1]$, то есть образуют ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.*

Доказательство. В самом деле, если бы, например,

$$g_n(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(\lambda) g_i(x,\lambda),$$

то это противоречило бы тому, что левая часть в этом равенстве удовлетворяет последнему краевому условию (3.3) лишь в нулях $\Delta(\lambda)$ и, возможно, в точке $\lambda = 0$, а правая часть равенства — тождественно. Тем самым, лемма доказана. □

П.ф. вида (3.20) удачно применялись при рассмотрении о.-ф. $L(\lambda)$ с распадающимися или полураспадающимися краевыми условиями при некоторых дополнительных предположениях на характеристики [60; 62; 205; 206].

Проведение описанной выше схемы доказательства кратной полноты к.ф. $L(\lambda)$ сильно усложняется или вообще не проходит, если либо $g_i(x),\lambda) \notin (\alpha)$ для всех $i = \overline{1,n}$, то есть функции $\mathcal{H}_m(\mathrm{g}_i,\lambda)$ имеют экспоненциальный рост по крайней мере в полуплоскости λ-плоскости, либо из набора соотношений (3.18) проблематично вывести равенства (3.19). Следуя описанной схеме, в этих ситуациях не удается получить m-кратную полноту к.ф. в $L_2[0,1]$.

Чтобы расширить возможности описанной схемы ДКП системы к.ф., автор диссертации предлагает [35; 37; 38; 166] использовать обобщённые п.ф. (или, кратко, о.п.ф.) вида

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \gamma_1(\lambda) g_1(x,\lambda) + \gamma_2(\lambda) g_2(x,\lambda) \cdots + \gamma_n(\lambda) g_n(x,\lambda), \tag{3.21}$$

где $\Gamma(\lambda) = \big(\gamma_1(\lambda),\gamma_2(\lambda),\ldots,\gamma_n(\lambda)\big)^T \not\equiv (0,0,\ldots,0)^T$ есть вектор-параметр (в.-п.).

Так как $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \neq 0$ и эти функции по лемме 3.15 линейно независимы, то о.п.ф.(3.21) включают в себя все порождающие функции, являющиеся решениями уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$.

Для $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ удобно также использовать следующее представление

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ -\Gamma(\lambda) & U_1(\lambda) & \ldots & U_n(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{3.22}$$

где вектор-столбцы $U_j(\lambda)$ определяются формулами (3.8).

В частности, из формул (3.20) и (3.21) следует, что к.п.ф. есть частный случай о.п.ф., а именно:

$$g_i(x,\lambda) = g(x,\lambda,E_i), \quad i = \overline{1,n}$$

где $E_i = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})^T$, $i = \overline{1,n}$, есть единичные векторы. Здесь δ_{ik} обозначает символ Кронекера.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.16. *При любом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы по переменной $x \in [0,1]$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ тогда и только тогда, когда линейно-независимы в.-ф. $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,m}$, по λ.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы по $x \in [0,1]$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_0$. Предположим противное, а именно, что при некотором $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ существуют константы $(c_1,c_2,\ldots,c_m) \neq (0,0,\ldots,0)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \Gamma_j(\lambda) = 0.$$

Тогда будем иметь

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ -\sum_{j=1}^m c_j\Gamma_j(\lambda) & U_1(\lambda) & \ldots & U_n(\lambda) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{m} c_j g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda)).$$

Это означает, что функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,m}$, линейно зависимы по x при $x \in [0,1]$ при этом значении λ, что противоречит сделанному предположению.

Таким образом, векторы $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы при любом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ и необходимость доказана.

2. *Достаточность.* Пусть при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ векторы $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,m}$, линейно независимы. Предположим противное, т. е. при этом значении λ функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,m}$, линейно зависимы по $x \in [0,1]$, то есть справедливо следующее равенство при $x \in [0,1]$ и некоторых константах c_j, $j = \overline{1,m}$, таких, что

$(c_1,c_2,\ldots,c_m)\neq(0,0,\ldots,0)$:

$$0=\sum_{j=1}^{m}c_jg(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))=$$
$$=\begin{vmatrix}0 & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda)\\ -\sum_{j=1}^{m}c_j\Gamma_j(\lambda) & U_1(\lambda) & \ldots & U_n(\lambda)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\gamma_{ij}(\lambda)\right)g(x,\lambda,E_i). \tag{3.23}$$

Так как по лемме 3.14 при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda_0$ функции $y(x,\lambda,E_i)\equiv g_i(x,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы по $x\in[0,1]$, то из (3.23) следует, что

$$\sum_{j=1}^{m}c_j\gamma_{ij}(\lambda)=0,\ i=\overline{1,n},\quad \text{или}\quad \sum_{j=1}^{m}c_j\Gamma_j(\lambda)=0. \tag{3.24}$$

Но векторы $\Gamma_j(\lambda)$, $j=\overline{1,m}$, линейно независимы по условию. Поэтому, из 3.24 вытекает, что $c_1=c_2=\cdots=c_m=0$, а это противоречит предположению от противного.

Таким образом, функции $y(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j=\overline{1,m}$, линейно независимы по $x\in[0,1]$ при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda_0$.

Следовательно, достаточность, а тем самым, и сама лемма доказаны. □

Далее, через Ω_j обозначим подмножество тех точек из Ω, которые представляются в виде $\omega_j+\ldots$, т. е. содержат в качестве слагаемого число ω_j. Через Ω^j обозначим множество $\Omega\setminus\Omega_j$, т. е. те точки из Ω, которые не содержат в качестве слагаемого число ω_j.

Раскрывая определитель (3.22) по первой строке, получим

$$g(x,\lambda,\Gamma)=\sum_{k=1}^{n}y_k(x,\lambda)\Big|U_1,\ldots,U_{k-1},\Gamma,U_{k+1},\ldots,U_n\Big|=\lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n}e^{\lambda\omega_kx}\times$$
$$\times\Big|\hat V_1+e^{\lambda\omega_1}\hat W_1,\ldots,\hat V_{k-1}+e^{\lambda\omega_{k-1}}\hat W_{k-1},\hat\Gamma,\hat V_{k+1}+e^{\lambda\omega_{k+1}}\hat W_{k+1},\ldots,\hat V_n+e^{\lambda\omega_1}\hat W_n\Big|=$$
$$=\lambda^{\varkappa}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\omega\in\Omega^k}\mathrm{G}_k^{\omega}(\lambda)e^{\lambda(\omega_kx+\omega)}, \tag{3.25}$$

где $\mathrm{G}_k^{\omega}(\lambda)$ есть определители, составленные из столбцов $\hat V_j$, $\hat W_j$, определенных равенствами (3.9)–(3.10), и столбца

$$\hat\Gamma(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}}\gamma_1(\lambda),\ldots,\frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}}\gamma_n(\lambda)\right)^T. \tag{3.26}$$

Далее удобно считать, что вектор $\Gamma(\lambda)$ есть вектор-полином по λ вида $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda),\ldots,\gamma_n(\lambda))^T$, где

$$\gamma_j(\lambda) = \gamma_{j\varkappa_j}\lambda^{\varkappa_j} + \gamma_{j,\varkappa_j-1}\lambda^{\varkappa_j-1} + \ldots + \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.27}$$

Тогда справедливы оценки $\mathrm{G}_k^\omega(\lambda) = O(1)$ по λ.

Из формулы (3.25) видно, что п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ есть ц.ф.э.т. по λ. Для такой функции уже был ранее введен х.м. (см. определение 3.11). Так как для фиксированной о.-.ф. $L(\lambda)$ вид этого многоугольника определяется лишь в.-п. $\Gamma(\lambda)$, то дадим следующее определение.

Определение 3.17. *Характеристическим многоугольником* $M(\Gamma(\lambda))$ в.-п. $\Gamma(\lambda)$ назовем характеристический многоугольник обобщённой п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$, т. е.

$$M(\Gamma(\lambda)) := M_{g(\cdot,\lambda,\Gamma(\lambda))}. \tag{3.28}$$

□

Аргумент λ при необходимости будем опускать, т.е. будем писать $M(\Gamma)$.

Так как вектор-параметры $\Gamma(\lambda)$ и $\hat{\Gamma}(\lambda)$ связаны взаимно однозначно в силу (3.26)–(3.27), то считаем также, что $M(\hat{\Gamma}(\lambda)) := M(\Gamma(\lambda))$.

Для нахождения х.м. вектор-параметра $\Gamma(\lambda)$ имеет место более простая формула, которая будет использоваться далее и дается следующей леммой.

Лемма 3.18. *Справедливо равенство*

$$M(\Gamma(\lambda)) = \mathrm{conv}\{M_{g(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{g(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Из определения х.м. $M(\Gamma(\lambda))$ (см. формулу (3.28)) и определения х.м. $M_{g(\cdot,\lambda,\Gamma(\lambda))}$ (см. формулу (3.13) имеем

$$M(\Gamma(\lambda)) = \mathrm{conv}_{x\in[0,1]}\, M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} \supset \mathrm{conv}\{M_{g(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{g(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}. \tag{3.30}$$

С другой стороны, из формулы (3.25) получим

$$M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} = \mathop{\mathrm{conv}}_{\omega\in\Omega^k,\ G_k^\omega\neq 0,\ k=\overline{1,n}} \{\omega_k x + \omega\}.$$

Но так как

$$\omega_k x + \omega \in \mathrm{conv}\{\omega,\omega_k + \omega\},$$

то для любого $x \in [0,1]$ имеем

$$M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} = \underset{\omega\in\Omega^k,\ G_k^\omega\not\equiv 0,\ k=\overline{1,n}}{\mathrm{conv}} \Big\{ \mathrm{conv}\{\omega,\omega_k+\omega\}\Big\} \subset$$

$$\subset \mathrm{conv}\Big\{ \underset{\omega\in\Omega^k,\ G_k^\omega\not\equiv 0,\ k=\overline{1,n}}{\mathrm{conv}}\{\omega\}, \mathrm{conv}_{\omega\in\Omega^k,\ G_k^\omega\not\equiv 0,\ k=\overline{1,n}}\{\omega_k+\omega\}\Big\} =$$

$$= \mathrm{conv}\Big\{M_{y(0,\lambda,\Gamma(\lambda))},M_{y(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\Big\}.$$

Следовательно,

$$M_{g(\cdot,\lambda,\Gamma(\lambda))} = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{conv}}\, M_{g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))} \subset \mathrm{conv}\{M_{g(0,\lambda,\Gamma(\lambda))}, M_{g(1,\lambda,\Gamma(\lambda))}\}. \tag{3.31}$$

Из включений (3.30) и (3.32) получаем равенство (3.29).

Тем самым, лемма доказана. □

Из определений M_Δ, $M(\Gamma(\lambda))$ и M следует

$$M_\Delta \subset M(\Gamma(\lambda)) \subset M. \tag{3.32}$$

Определение 3.19. Будем говорить, что $\Gamma(\lambda)$ (или $\hat\Gamma(\lambda)$) *удовлетворяет условию* (α) и писать $\Gamma(\lambda)$ (или $\hat\Gamma(\lambda)$)$\in(\alpha)$, если $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) \in (\alpha)$. □

Таким образом, из схемы ДКП системы к.ф. $L(\lambda)$ следует, что если в.-п. $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, то при условии ортогональности в.-ф. $h(x)$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе к.ф. и, возможно, некоторому дополнительному конечному множеству в.-ф. из $L_2[0,1]$ на основании леммы 3.14 получим тождество

$$H_m(g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)),\lambda) \equiv 0. \tag{3.33}$$

Из вышеизложенного и, в частности, из (3.32) видно, что при выборе в.-п. $\Gamma(\lambda)$ нужно руководствоваться тем, чтобы многоугольник $M(\Gamma)$ был как можно «компактнее» (как можно «ближе» к M_Δ).

3.4 Достаточные условия кратной полноты системы корневых функций в терминах обобщённых порождающих функций

Перед тем как переходить к достаточным условиям кратной полноты к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ в терминах вектор-параметров, отметим важную роль, которую при этом играет следующая лемма, аналогичная [205, лемма 1.1] (см. также [62, лемма 2.1, с. 49]).

Лемма 3.20. *В случае $\varkappa_i \leqslant n-1$, $i=\overline{1,n}$, либо система к.ф. $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$, либо соответствующая система производных n-цепочек, построенная по системе к.ф. $L(\lambda)$, имеет бесконечный дефект в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям из [62, лемма 2.1, с. 49].

Линеаризуем о.-ф. $L(\lambda)$, делая замену

$$y_k(x) = \lambda^{k-1} y, \quad k=\overline{1,n}.$$

В результате получим линейный оператор $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}Y - \lambda Y, \quad \mathcal{U}_i(Y)=0, \quad i=\overline{1,n},$$

действующий в пространстве n-вектор-функций $L_2^n[0,1]$, где

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T,$$

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{p_{0n}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ p_{n0}d_x^n & p_{n-1,1}d_x^{n-1} & p_{n-2,2}d_x^{n-2} & \ldots & p_{1,n-1}d_x \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx},$$

$$\mathcal{U}_i(Y) := \sum_{j+s\leqslant\varkappa_i} \left(\alpha_{ijs} y_{s+1}^{(j)}(0) + \beta_{ijs} y_{s+1}^{(j)}(1)\right), \quad i=\overline{1,n}.$$

К оператору $\mathcal{L}$ применяем утверждение [77, с. 384] о том, что дефект системы к.ф. дискретного оператора в банаховом пространстве либо равен нулю, либо бесконечен. Но указанный дефект для $\mathcal{L}$ как раз и является дефектом системы производных n-цепочек о.-ф. $L(\lambda)$.

Тем самым, лема доказана. $\square$

Справедливо следующее достаточное условие n-кратной полноты.

Теорема 3.21. *Если существуют n линейно независимых в.-п. $\Gamma_1(\lambda)$, $\Gamma_2(\lambda)$, $\ldots$, $\Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$, то система к.ф. $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с нулевым дефектом в случае $\varkappa_i \leqslant n-1$, $i=\overline{1,n}$, и с возможным конечным дефектом в противном случае.*

Доказательство. Предположим, что система Y всех к.ф. $L(\lambda)$ n-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_n(x))^T \in L_2^n[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^n[0,1]$ всем производным n-цепочкам, построенным по системе к.ф. $L(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предположении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^n[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф. получим (3.33) при $\Gamma(\lambda) = \Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, т. е.

$$H_n(\Gamma_j(\lambda),\lambda) \equiv \int_0^1 g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))\mathrm{h}_n(x,\lambda)\,dx \equiv 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.34}$$

где $\mathrm{h}_n(x,\lambda)$ определяется формулой (3.15).

На основании леммы 3.16 функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda))$, $j = \overline{1,n}$, образуют ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\Lambda_0$, так как по условию векторы $\Gamma_j(\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, линейно независимы.

Таким образом, из (3.34) получим $\forall\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$

$$\int_0^1 y_j(x,\lambda)\mathrm{h}_n(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.35}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\ell^*(z,\lambda) = \bar{\mathrm{h}}_n(x,\lambda)\Big(= \sum_{j=1}^n h_j(x)\bar{\lambda}^{j-1}\Big), \quad z(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0, \tag{3.36}$$

где $\ell^*(z,\lambda)$ есть сопряженное, по Лагранжу, д.в. к $\ell(y,\lambda)$.

Известно, что если $z(x,\lambda)$ есть решение задачи (3.36), то $\bar{z}(x,\lambda)$ есть целая функция по λ, для которой имеет место следующее представление при $\lambda \neq 0$

$$\bar{z}(x,\lambda) = \int_0^x \sum_{j=1}^n \bar{z}_j(x,\lambda)y_j(\xi,\lambda)\mathrm{h}_n(\xi,\lambda)\,d\xi, \tag{3.37}$$

где

$$\bar{z}_j(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^{n-1}}\frac{W_{nj}}{W}e^{-\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.38}$$

есть решения уравнения $\bar{\ell}^*(z,\lambda) = 0$. Здесь обозначено $W = \det(\omega_j^{i-1})_{i,j=1}^n$, а W_{nj} есть алгебраические дополнения к элементам (n,j) в определителе W.

Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \gg 1$ из (3.37) следует

$$\bar{z}(x,\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{\operatorname{Re}\lambda\omega_j<0} \bar{z}_j(x,\lambda)y_j(\xi,\lambda)\mathrm{h}_n(\xi,\lambda)\,d\xi + \int\limits_0^x \sum_{\operatorname{Re}\lambda\omega_j\geqslant 0} \bar{z}_j(x,\lambda)y_j(\xi,\lambda)\mathrm{h}_n(\xi,\lambda)\,d\xi -$$
$$- \int\limits_x^1 \sum_{\operatorname{Re}\lambda\omega_j<0} \bar{z}_j(x,\lambda)y_j(\xi,\lambda)\mathrm{h}_n(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Отсюда, с учетом тождеств (3.35) и формул (3.38), получим оценку $\bar{z}(x,\lambda) = O(1)$ при $|\lambda| \gg 1$. Из этой оценки по теореме Лиувилля будем иметь $\bar{z}(x,\lambda) \equiv C$. А так как начальные условия (3.36) нулевые, то $C = 0$, т.е. $\bar{z}(x,\lambda) \equiv 0$.

Тогда из дифференциального уравнения (3.36) получим $\mathrm{h}_n(x,\lambda) \equiv 0$ по λ для п.в. $x \in [0,1]$. Следовательно,

$$h_j(x) = 0 \text{ для п.в. } x \in [0,1], \quad j = \overline{1,n}.$$

Тем самым установлено, что система к.ф. рассматриваемой о.-ф. n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом. Но, в силу леммы 3.20 этот дефект равен нулю.

Следовательно, теорема 3.21 доказана. □

В случае $\Gamma(\lambda) = V_j(\lambda)$ или $\Gamma(\lambda) = W_j(\lambda)$ в формуле (3.25) для о.п.ф. очень много экспонент зануляется из-за обращения в нуль соответствующих коэффициентов, что обусловлено наличием в определяющих их определителях одинаковых столбцов. Поэтому, при поиске в.-п. $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$ для о.п.ф. естественными кандидатами на эту роль являются именно векторы $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$.

При проверке условия (α) для в.-п. $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$ удобно пользоваться довольно просто проверяемыми достаточными условиями, даваемыми следующими двумя леммами.

Лемма 3.22. *Справедливы включения*

$$M(V_j) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_j\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Из формулы (3.25) следует, что

$$g(x,\lambda,V_j) = \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x} \times$$
$$\times \left| \hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{V}_j, \hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n \right|.$$

На основании леммы 3.18 для доказательства требуемого утверждения достаточно рассмотреть $g(0,\lambda,V_j)$ и $g(1,\lambda,V_j)$.

1. Рассмотрим вначале $g(0,\lambda,V_j)$:

$$g(0,\lambda,V_j) = \lambda^{\varkappa}\times$$
$$\times\sum_{s=1}^{n}\left|\hat{V}_1+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1}+e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1}+e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1},\ldots,\hat{V}_n+e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $g(0,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat{V}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1}\ldots,\hat{V}_n|$, $s=\overline{1,n}$. Только в случае $s=j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае этот определитель формально входит слагаемым в $\Delta(\lambda)$ (здесь и далее — с точностью до множителя, являющегося степенью λ).

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $j\neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

   1.1а) $j\neq m$;

   1.1б) $j=m$.

   Слагаемые в случае б) соответствуют тем точкам ω, которые входят в Ω_j. В случае а) числа j, m, $s_1,\ldots$, s_{n-2} есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемые слагаемые формально является слагаемыми х.о. $\Delta(\lambda)$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одинаковых столбца). Мы имеем два возможных случая:

   1.2а) $j\neq m$ и $j\neq k$;

   1.2б) $j=m$ или $j=k$.

   Слагаемые в случае б) соответствует тем точкам ω, которые входят в Ω_j. В случае а) числа j, m, k, $s_1,\ldots$, s_{n-3} есть все различные числа от 1 до n и рассматриваемые слагаемые формально является слагаемым х.о. $\Delta(\lambda)$.

1.3) …

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут либо, формально, слагаемыми из $\Delta(\lambda)$, либо им будет соответствовать точки ω, входящие в Ω_j.

2. Рассмотрим теперь $g(1,\lambda,V_j)$:

$$g(1,\lambda,V_j) = \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s}\times$$
$$\times\left|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1},\ldots,\hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Аналогично предыдущему пункту, разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $g(1,\lambda,V_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat{V}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1},\hat{V}_j,\hat{V}_{s+1}\ldots,\hat{V}_n|$, $s=\overline{1,n}$. Только в случае $s=j$ мы имеем, возможно, отличный от нуля определитель. Но в этом случае таким слагаемым, формально, соответствуют числа $\omega\in\Omega_j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одинаковых столбца), $s\neq m$, $s\neq s_l$. Возможны следующие два случая:

2.1а) $j\neq m$;

2.1б) $j=m$.

Слагаемые в случае б) соответствуют тем точкам ω, которые входят в Ω_j. В случае а) числа j, m, $s_1,\ldots$, s_{n-2} есть все различные числа от 1 до n. А так как $s\neq s_l$ и $s\neq m$, то $s=j$. Таким образом, и здесь получим слагаемые, которым, формально, соответствуют числа $\omega\in\Omega_j$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat{V}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m\neq s_l$, $k\neq s_l$, $m\neq k$, $j\neq s_l$ (иначе будем иметь два одинаковых столбца), $s\neq m$, $s\neq k$, $s\neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

2.2а) $j\neq m$ и $j\neq k$;

2.2б) $j=m$ или $j=k$.

Слагаемые в случае б) соответствуют тем точкам ω, которые входят в Ω_j. В случае а) числа j, m, k, $s_1,\ldots$, s_{n-3} есть все различные числа от 1 до n. А так как $s\neq m$, $s\neq k$, $s\neq s_l$, то $s=j$. Таким образом, и здесь мы получаем слагаемые, которым, формально, соответствуют числа $\omega \in \Omega_j$

2.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать числа ω, входящие в Ω_j.

Тем самым, лемма 3.16 доказана. $\square$

Лемма 3.23. *Справедливы включения*

$$M(W_j) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta,\Omega^j\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Из формулы (3.25) следует, что

$$g(x,\lambda,W_j) = \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s x} \times$$
$$\times \left|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{k+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

На основании леммы 3.18 для доказательства требуемого утверждения достаточно рассмотреть $g(0,\lambda,W_j)$ и $g(1,\lambda,W_j)$.

1. Рассмотрим вначале $g(0,\lambda,W_j)$:

$$g(0,\lambda,W_j) =$$
$$= \lambda^{\varkappa} \sum_{s=1}^{n} \left|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1}, \ldots, \hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Если мы разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю, то получим, что $g(0,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

1.0) $|\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_{s-1}, \hat{W}_j, \hat{V}_{s+1} \ldots, \hat{V}_n|$, $s = \overline{1,n}$. Каждому такому слагаемому соответствует точка $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.1) $e^{\lambda\omega_m}|\hat{W}_j, \hat{W}_m, \hat{V}_{s_1}, \hat{V}_{s_2} \ldots, \hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \neq s_l$. Мы имеем два возможных случая:

1.1а) $j \neq m$;

1.1б) $j = m$.

В случае б) получим определители, имеющие два одинаковых столбца, и, таким образом, эти слагаемые равны нулю. А в случае а) рассматриваемые слагаемые, формально, соответствуют числам $\omega \in \Omega^j$.

1.2) $e^{\lambda(\omega_m+\omega_k)}|\hat{W}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $k \neq s_l$, $m \neq k$. Мы имеем два возможных случая:

1.2а) $j \neq m$ и $j \neq k$;

1.2б) $j = m$ или $j = k$.

В случае б) получим равные нулю слагаемые, так как в этих определителях будут два одинаковых столбца. А в случае а) рассматриваемые слагаемые, формально, соответствуют числу $\omega = 0 \in \Omega^j$.

1.3) $\ldots$

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И этим слагаемым будут, формально, соответствовать точки ω, входящие в Ω^j.

2. Рассмотрим теперь

$$g(1,\lambda,W_j) = \lambda^{\varkappa}\sum_{s=1}^{n} e^{\lambda\omega_s}\times$$

$$\times\left|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1} + e^{\lambda\omega_{s-1}}\hat{W}_{s-1},\hat{W}_j,\hat{V}_{s+1} + e^{\lambda\omega_{s+1}}\hat{W}_{s+1},\ldots,\hat{V}_n + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_n\right|.$$

Аналогично предыдущему пункту, разложим каждый определитель под знаком суммы на сумму определителей и воспользуемся тем, что определитель, имеющий одинаковые столбцы, равен нулю. Получим, что $g(1,\lambda,W_j)$ есть алгебраическая сумма следующих слагаемых (без учета не играющих никакой роли множителей, являющихся степенями λ):

2.0) $e^{\lambda\omega_s}|\hat{V}_1,\ldots,\hat{V}_{s-1},\hat{W}_j,\hat{V}_{s+1}\ldots,\hat{V}_n|$, $s = \overline{1,n}$. Мы имеем только два возможных случая:

2.0а) $j \neq s$;

2.0б) $j = s$.

В случае б) получим слагаемые, которые, формально, являются слагаемыми х.о. $\Delta(\lambda)$. А в случае а) рассматриваемые слагаемые, формально, соответствуют числам $\omega \in \Omega^j$.

2.1) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m)}|\hat{W}_j,\hat{W}_m,\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-2}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $s \neq m$, $s \neq s_l$. Мы имеем только два возможных случая:

2.1.1) $j \neq m$;

2.1.2) $j = m$.

В случае 2.1.2) получим равные нулю слагаемые равное, так как в определителях будут два одинаковых столбца. Случай 2.1.1) разобьём еще на два возможных подслучая:

2.1.1а $j = s_l$ при некотором l;

2.1.1б $j \neq s_l$.

В случае а) будем иметь $s \neq j$, $m \neq j$ и, таким образом, данным слагаемым соответствуют числа $\omega \in \Omega^j$. В случае б) получим, что числа j, m, $s_1, \ldots, s_{n-2}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq s_l$, то $s = j$ и рассматриваемые слагаемые, формально, являются слагаемыми х.о. $\Delta(\lambda)$.

2.2) $e^{\lambda(\omega_s+\omega_m+\omega_k)}|\hat{W}_j,\hat{W}_m,\hat{W}_k\hat{V}_{s_1},\hat{V}_{s_2}\ldots,\hat{V}_{s_{n-3}}|$. Здесь $m \neq s_l$, $k \neq s_l$, $m \neq k$, $s \neq m$, $s \neq k$, $s \neq s_l$. Возможны только следующие два случая:

2.2.1) $j \neq m$;

2.2.2) $j = m$.

В случае 2.2.2) получим равное нулю слагаемые, так как в определителях будут два одинаковых столбца. Случай 2.2.1) разобьём еще на два возможных подслучая:

2.2.1а) $j = s_l$ при некотором l;

2.2.1б) $j \neq s_l$.

В случае а) будем иметь $s \neq j$, $m \neq j$, $k \neq j$ и, таким образом, данным слагаемым соответствуют числа $\omega \in \Omega^j$. В случае б) получим, что числа j, m, k, $s_1, \ldots, s_{n-3}$ есть все различные числа от 1 до n. А так как $s \neq m$, $s \neq k$ $s \neq s_l$, то $s = j$ и рассматриваемые слагаемые, формально, являются слагаемыми х.о. $\Delta(\lambda)$.

2.3) ...

Рассуждая далее аналогично, мы можем подобным образом рассмотреть все другие слагаемые. И эти слагаемые будут, формально, соответствовать либо слагаемым, входящим в функцию $\Delta(\lambda)$, либо числам ω, входящим в Ω^j.

Тем самым, лемма доказана. □

Следовательно, с учётом этих двух лемм, для проверки выполнения условий $V_j(\lambda) \in (\alpha)$ и $W_j(\lambda) \in (\alpha)$ достаточно проверить выполнение условий

$\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_j\} \in (\alpha)$ и $\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^j\} \in (\alpha)$, соответственно. Такая проверка, как правило, намного более простая.

Так как естественными кандидатами на роль в.-п. $\Gamma(\lambda)$ являются векторы $V_j(\lambda)$ и $W_j(\lambda)$, а для проверки выполнения условия $V_j(\lambda)$, $W_j(\lambda) \in (\alpha)$ можно воспользоваться леммами 3.22 и 3.23, то важное значение при использования в качестве $\Gamma(\lambda)$ вектор-параметров $V_i(\lambda)$ и $W_i(\lambda)$ имеет следующее следствие из теоремы 3.21.

Теорема 3.24. *Если $V_{i_s}(\lambda) \in (\alpha)$, $s = \overline{1,k}$, $W_{j_r}(\lambda) \in (\alpha)$, $r = \overline{1,l}$, $k + l \geqslant n$ и*

$$\operatorname{rank}(V_{i_1}(\lambda),V_{i_2}(\lambda),\ldots,V_{i_k}(\lambda),W_{j_1}(\lambda),W_{j_2}(\lambda),\ldots,W_{j_l}(\lambda)) = n,$$

то система к.ф. $L(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с нулевым дефектом в случае $\varkappa_i \leqslant n-1$, $i = \overline{1,n}$, и с возможным конечным дефектом в противном случае.

Специфическая структура функции $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$, определяемая формулой (3.22) через определитель специального вида, дает возможность доказать следующую теорему.

Теорема 3.25. *Если существуют m пар векторов $\{V_{j_s}(\lambda),W_{j_s}(\lambda)\}$, $s = \overline{1,m}$, таких, что $V_{j_s}(\lambda)$, $W_{j_s}(\lambda) \in (\alpha)$, то имеет место m-кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.ф. $L(\lambda)$ с возможным конечным дефектом.*

Доказательство. Предположим, что система Y всех к.ф. $L(\lambda)$ m-кратно не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется такая в.-ф. $h(x) = (h_1(x),\ldots,h_m(x))^T$ из $L_2^m[0,1]$, $h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам, построенным по системе к.ф. $L(\lambda)$.

Из вышеизложенного следует, что при возможном дополнительном предположении об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф., получим тождества (3.33) для в.-п. $\Gamma(\lambda) = V_{j_s}(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda) = W_{j_s}(\lambda)$, $s = \overline{1,m}$, т. е. будем иметь при $s = \overline{1,m}$

$$H_m(g(x,\lambda,V_{j_s}),\lambda) := \int_0^1 g(x,\lambda,V_{j_s})\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0,$$

$$H_m(g(x,\lambda,W_{j_s}),\lambda) := \int_0^1 g(x,\lambda,W_{j_s})\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx \equiv 0.$$

Отсюда сразу следует

$$H_m(g(x,\lambda,V_{j_s}),\lambda)+e^{\lambda\omega_{j_s}}H_m(g(x,\lambda,W_{j_s}),\lambda)\equiv$$
$$\equiv\int\limits_0^1\big(g(x,\lambda,V_{j_s})+e^{\lambda\omega_{j_s}}g(x,\lambda,W_{j_s})\big)\,\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx\equiv 0,\quad s=\overline{1,m}. \quad (3.39)$$

Из (3.22) при $s=\overline{1,m}$ имеем на основании свойств определителей

$$g(x,\lambda,V_{j_s})+e^{\lambda\omega_{j_s}}g(x,\lambda,W_{j_s})=$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda)\\ -U_{j_s} & U_1 & \dots & U_n\end{vmatrix}=$$
$$=y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3}\,|U_{j_s},U_1,\dots,U_{j_s-1},U_{j_s+1},\dots,U_n|=$$
$$=y_{j_s}(x,\lambda)(-1)^{j_s+3}(-1)^{j_s-1}\Delta(\lambda)=y_{j_s}(x,\lambda)\Delta(\lambda).$$

С учётом этого из (3.39) получим

$$\int\limits_0^1 y_{j_s}(x,\lambda)\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx\equiv 0,\quad s=\overline{1,m}. \quad (3.40)$$

Далее рассуждаем по схеме работы [62, с. 63–64].

Так как $y_j(x,\lambda)=e^{\lambda\omega_j x}$, то раскладывая эти экспоненты в ряды Тейлора по λ и подставляя эти ряды в (3.40), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k!}\omega_{j_s}^k\lambda^{k+j-1}\int\limits_0^1 x^k\bar{h}_j(x)\,dx\equiv 0,\quad s=\overline{1,m}.$$

Делая замену $N=k+j-1$, преобразуем эти ряды к виду

$$\sum_{N=0}^{\infty}\lambda^N\sum_{j=1}^{\min\{N+1,m\}}\frac{1}{(N+1-j)!}\omega_{j_s}^{N+1-j}\int\limits_0^1 x^{N+1-j}\bar{h}_j(x)\,dx\equiv 0,\quad s=\overline{1,m}.$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\sum_{j=1}^{\min\{N+1,m\}}\frac{1}{(N+1-j)!}\omega_{j_s}^{N+1-j}\int\limits_0^1 x^{N+1-j}\bar{h}_j(x)\,dx=0,\ N=0,1,\dots,\ s=\overline{1,m}.$$

При любом фиксированном $N \geqslant m-1$ отсюда получим систему m уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(N+1-j)!}\omega_{j_s}^{N+1-j} \int_0^1 x^{N+1-j}\bar{h}_j(x)\,dx = 0, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{3.41}$$

с m неизвестными

$$\frac{1}{N!}\int_0^1 x^N \bar{h}_1(x)\,dx,\ \ldots\ \frac{1}{(N+1-m)!}\int_0^1 x^{N+1-m}\bar{h}_m(x)\,dx, \tag{3.42}$$

являющимися последовательными моментами функций $\bar{h}_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, когда $N = m-1,\ m,\ m+1,\ \ldots$

Определитель однородной системы (3.41) оnличен от нуля

$$\begin{vmatrix} \omega_{j_1}^N & \ldots & \omega_{j_1}^{N+2-m} & \omega_{j_1}^{N+1-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{j_m}^N & \ldots & \omega_{j_m}^{N+2-m} & \omega_{j_m}^{N+1-m} \end{vmatrix} = \left(\omega_{j_1}\omega_{j_2}\ldots\omega_{j_m}\right)^{N+1-m} \begin{vmatrix} \omega_{j_1}^{m-1} & \ldots & \omega_{j_1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{j_m}^{m-1} & \ldots & \omega_{j_m} & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

как определитель Вандермонда попарно различных и отличных от нуля чисел.

Следовательно, система (3.41) имеет только тривиальное решение, т. е. при любом $N = m-1,\ m,\ m+1,\ldots$

$$\int_0^1 x^N \bar{h}_1(x)\,dx = 0,\ \int_0^1 x^{N-1}\bar{h}_2(x)\,dx = 0,\ \ldots\ \int_0^1 x^{N+1-m}\bar{h}_m(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, все достаточно большие по номеру моменты функций $h_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, равны нулю. Следовательно, по теореме Мюнца [56]

$$h_1(x) = h_2(x) = \cdots = h_m(x) = 0 \ \text{ для п.в. } \ x \in [0{,}1].$$

А это и означает, что система к.ф. $L(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0{,}1]$ с возможным конечным дефектом.

Тем самым, теорема 3.25 полностью доказана. □

Далее рассматриваются некоторые классы сильно нерегулярных обыкновенных дифференциальных о.-ф., кратная полнота систем к.ф. которых ранее в $L_2[0{,}1]$ не была исследована, и показывается, как с использованием классических и обобщённых п.ф. можно установить эту кратную полноту.

3.5 Кратная полнота системы корневых функций конкретных оператор-функций третьего порядка

В данном разделе рассматриваются три конкретных примера сильно нерегулярных о.-ф. третьего порядка вида (3.1)–(3.2) с нераспадающимися краевыми условиями, для которых классические п.ф. не позволяют исследовать кратную полноту, а обобщённые п.ф. позволяют установить 1-, 2- и 3-кратную полноту к.ф. с возможным конечным дефектом. При этом используются достаточные условия кратной полноты, даваемые теоремами 3.24 и 3.25.

Рассматриваемые далее примеры конкретных о.-ф. идентичны по структуре: все они порождаются однородными д.в. третьего порядка, краевые условия нераспадающиеся двучленные, двухточечные и также однородные. Но, тем не менее, кратность полноты у этих о.-ф. различна.

3.5.1 Пример оператор-функции с однократной полнотой системы корневых функций

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенную дифференциальную о.-ф. $\mathscr{L}_1(\lambda)$ третьего порядка, являющуюся частным случаем оператор-функции $L(\lambda)$ вида (3.1)–(3.2),

$$\ell_1(y,\lambda) := y''' - \lambda y'' + \lambda^2 y' - \lambda^3 y, \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} U_1^1(y) &:= y(0) + y(1) = 0, \\ U_2^1(y) &:= y'(0) + iy'(1) = 0, \\ U_3^1(y) &:= y''(0) - y''(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Рассматриваемая о.-ф. имеет нераспадающиеся краевые условия и, как будет показано далее, является сильно-нерегулярной. Данная о.-ф. исследовалась в статье [35] на основе предложенной автором диссертации схемы ДКП с использованием обобщённых п.ф.

Характеристики данной о.-ф. есть члса $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_1(y,\lambda) = 0$ (см. (3.7)) состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{i\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем (используются введенные в разделе 3.2 понятия и обозначения)

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{3.45}$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Для характеристического определителя о.-ф. (3.43)–(3.44) справедливо представление

$$\begin{aligned}\Delta^1(\lambda) := \det\big(U_i^1(y_j)\big)_{ij=1}^3 = \big|U_1(\lambda),U_2(\lambda),U_3(\lambda)\big| = \\ = \lambda^3\big|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\hat{V}_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2,\hat{V}_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat{W}_3\big| = \lambda^3\big(\Delta_0 + e^{\lambda\omega_1}\Delta_1 + \\ + e^{\lambda\omega_2}\Delta_2 + e^{\lambda\omega_3}\Delta_3 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}\Delta_{12} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}\Delta_{13} + \\ + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}\Delta_{12} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\Delta_{123}\big),\end{aligned} \tag{3.47}$$

где на основании (3.45)–(3.46)

$$\begin{aligned} &\Delta_0 = |\hat{V}_1,\hat{V}_2,\hat{V}_3| = -4i, && \Delta_1 = |\hat{W}_1,\hat{V}_2,\hat{V}_3| = 0, \\ &\Delta_2 = |\hat{V}_1,\hat{W}_2,\hat{V}_3| = 0, && \Delta_3 = |\hat{V}_1,\hat{V}_2,\hat{W}_3| = 4, \\ &\Delta_{12} = |\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{V}_3| = 0, && \Delta_{13} = |\hat{W}_1,\hat{V}_2,\hat{W}_3| = 0, \\ &\Delta_{23} = |\hat{V}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3| = 4i, && \Delta_{123} = |\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3| = -4. \end{aligned} \tag{3.48}$$

С учетом этих значений из (3.47) получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3\big(- 4i - 4e^{\lambda} + 4e^{i\lambda} + 4ie^{(1+i)\lambda}\big) =: \lambda^3\hat{\Delta}^1(\lambda). \tag{3.49}$$

На рисунке 3.3 изображены х.м. M_Δ и многоугольник M для данного примера. Эти многоугольники были введены в разделе 3.2. Чтобы не загромождать рисунки, пишем на них «i» вместо «ω_i», «$i+j$» вместо «$\omega_i+\omega_j$», $\ldots$.

Следовательно, рассматриваемая о.-ф. является сильно нерегулярной. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому к о.-ф. $\mathscr{L}_1(\lambda)$ не применимы теоремы о кратной полноте к.ф. из [60; 62; 207].

На рисунке 3.4 штриховыми линиями изображены многоугольники $\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_j\}$, $j = 1,2,3$, а на рисунке 3.5 штриховыми линиями изображены многоугольники $\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^j\}$, $j = 1,2,3$. Эти многоугольники фигурируют в леммах 3.22 и 3.23.

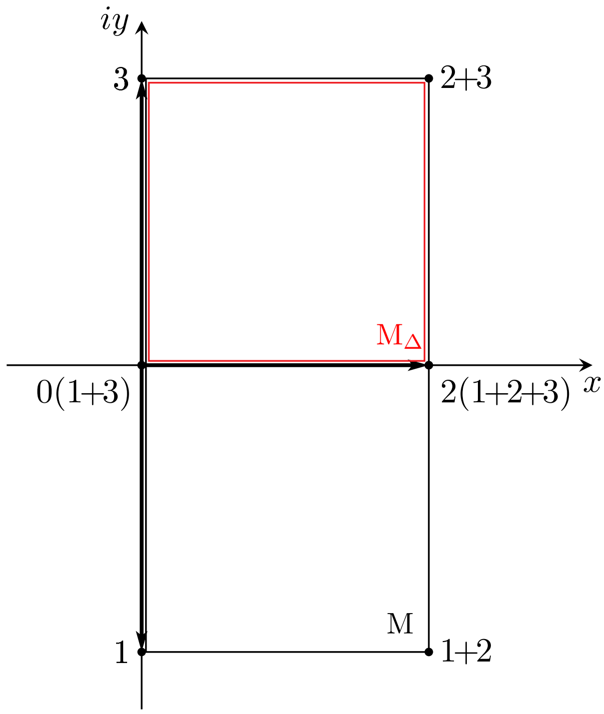

Рисунок 3.3 — Многоугольники M и M_Δ для первого примера

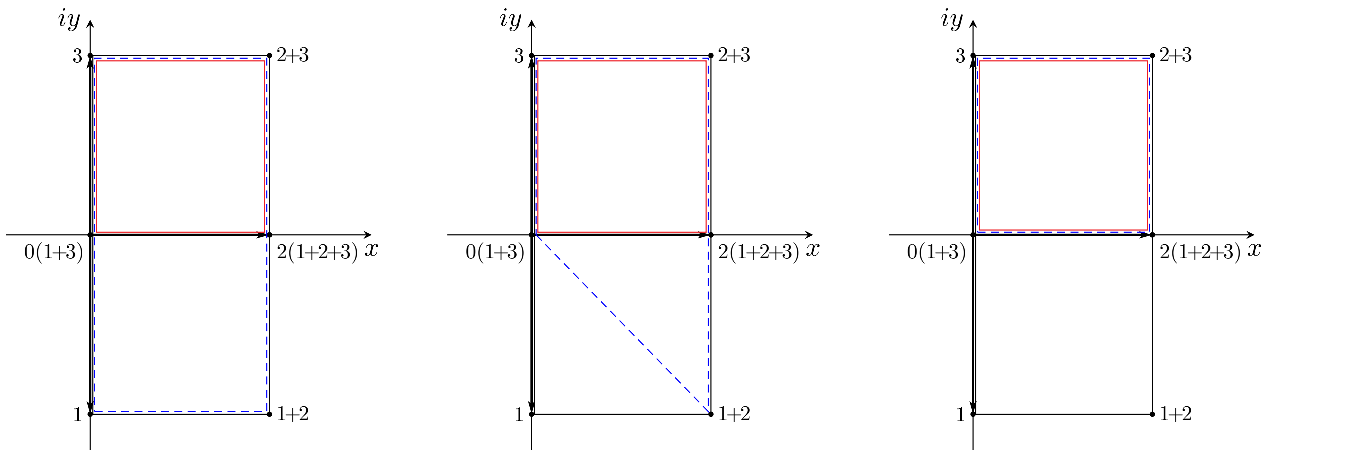

Рисунок 3.4 — Многоугольники conv$\{M_\Delta,\Omega_1\}$, conv$\{M_\Delta,\Omega_2\}$, conv$\{M_\Delta,\Omega_3\}$

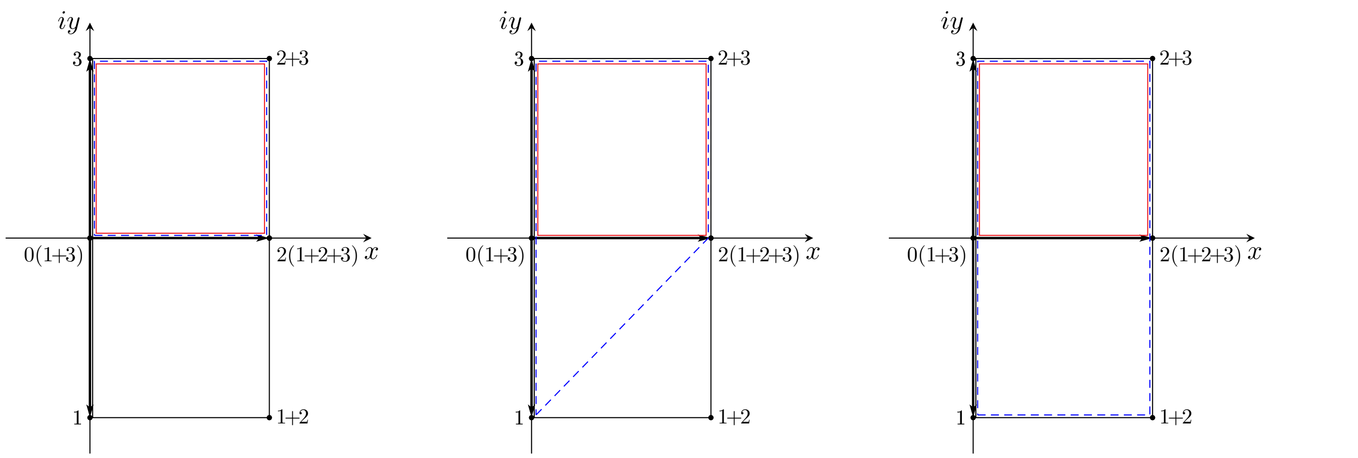

Рисунок 3.5 — Многоугольники conv$\{M_\Delta,\Omega^1\}$, conv$\{M_\Delta,\Omega^2\}$, conv$\{M_\Delta,\Omega^3\}$

В отличие от многоугольников $M(V_j)$ и $M(W_j)$, многоугольники $\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_j\}$ и $\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^j\}$ легко строятся для рассматриваемого примера и из их вида на основании определения 3.13 следует

$$\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_1\} \notin (\alpha), \quad \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_2\} \in (\alpha), \quad \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega_3\} \in (\alpha),$$
$$\operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^1\} \in (\alpha), \quad \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^2\} \in (\alpha), \quad \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^3\} \notin (\alpha). \quad (3.50)$$

Используя леммы 3.22 и 3.23, отсюда сразу получим

$$\hat{V}_2 \in (\alpha), \quad \hat{V}_3 \in (\alpha), \quad \hat{W}_1 \in (\alpha), \quad \hat{W}_2 \in (\alpha).$$

Леммы 3.22 и 3.23 — это только достаточные условия, то из (3.50) вывод о том, удовлетворяют ли $M(V_1)$ и $M(W_3)$ условию (α) или нет, сделать нельзя. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $M(V_1)$, $M(W_3) \notin (\alpha)$.

Так как

$$\operatorname{rank}\{\hat{V}_2,\hat{V}_3,\hat{W}_1,\hat{W}_2\} = 2 < 3 = n,$$

то воспользоваться теоремой 3.24 о трёхкратной полноте системы к.ф. для рассматриваемой в этом примере о.-ф. $\mathscr{L}_1(\lambda)$ нельзя. Но так как имеется пара с одинаковым индексами $\{\hat{V}_2,\hat{W}_2\}$ такая, что $\hat{V}_2$, $\hat{W}_2 \in (\alpha)$, то на основании теоремы 3.25 можно заключить, что система к.ф. данной о.-ф. 1-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Ввиду того, что $\operatorname{rank}\{\hat{V}_2,\hat{W}_2\} = 2$, то в соответствии с леммой 3.16 имеем две линейно независимые п.ф. $g(x,\lambda,V_2(\lambda))$ и $g(x,\lambda,W_2(\lambda))$, удовлетворяющие условию (α), т. е. для которых $V_2(\lambda) \in (\alpha)$ и $W_2(\lambda) \in (\alpha)$.

Покажем, что других п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ с $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, линейно независимых от $g(x,\lambda,V_2(\lambda))$ и $g(x,\lambda,W_2(\lambda))$, нет.

Так как $\operatorname{rank}\{V_2(\lambda),W_2(\lambda),W_3(\lambda)\} = 3$, то можно искать в.п. $\Gamma(\lambda)$ со свойством $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$ в виде

$$\Gamma(\lambda) = c_1 V_2(\lambda) + c_2 W_2(\lambda) + c_3 W_3(\lambda), \quad (3.51)$$

где c_1, c_2, c_3 — пока неизвестные числа.

Запишем функцию $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ подробнее, воспользовавшись формулой (3.22):

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) = \lambda^3 \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) \\ -\hat{\Gamma} & \hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1 & \hat{V}_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2 & \hat{V}_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat{W}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3\Big(y_1(x,\lambda)\big|\hat{\Gamma},\hat{V}_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2,\hat{V}_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat{W}_3\big| + y_2(x,\lambda)\big|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\hat{\Gamma},\hat{V}_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat{W}_3\big| +$$
$$+ y_3(x,\lambda)\big|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1,\hat{V}_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2,\hat{\Gamma}\big|\Big) = \lambda^3\Big(y_1(x,\lambda)\Big(\big|\hat{\Gamma},\hat{V}_2,\hat{V}_3\big| + e^{\lambda\omega_2}\big|\hat{\Gamma},\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| +$$
$$+ e^{\lambda\omega_3}\big|\hat{\Gamma},\hat{V}_2,\hat{W}_3\big| + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}\big|\hat{\Gamma},\hat{W}_2,\hat{W}_3\big|\Big) + y_2(x,\lambda)\Big(\big|\hat{V}_1,\hat{\Gamma},\hat{V}_3\big| + e^{\lambda\omega_1}\big|\hat{W}_1,\hat{\Gamma},\hat{V}_3\big| +$$
$$+ e^{\lambda\omega_3}\big|\hat{V}_1,\hat{\Gamma},\hat{W}_3\big| + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}\big|\hat{W}_1,\hat{\Gamma},\hat{W}_3\big|\Big) + y_3(x,\lambda)\Big(\big|\hat{V}_1,\hat{V}_2,\hat{\Gamma}\big| + e^{\lambda\omega_1}\big|\hat{W}_1,\hat{V}_2,\hat{\Gamma}\big| +$$
$$+ e^{\lambda\omega_2}\big|\hat{V}_1,\hat{W}_2,\hat{\Gamma}\big| + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{\Gamma}\big|\Big)\Big). \quad (3.52)$$

Чтобы выполнялось условие $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, нужно потребовать выполнения условий

$$\big|\hat{\Gamma},\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| = \big|\hat{W}_1,\hat{\Gamma},\hat{V}_3\big| = \big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{\Gamma}\big| = 0 \quad (3.53)$$

или

$$\big|\hat{\Gamma},\hat{V}_2,\hat{V}_3\big| = \big|\hat{W}_1,\hat{\Gamma},\hat{V}_3\big| = \big|\hat{W}_1,\hat{V}_2,\hat{\Gamma}\big| = 0. \quad (3.54)$$

Пусть выполняются условия (3.53). С учетом (3.51) эти условия приводят к следующей алгебраической системы относительно неизвестных c_1, c_2, c_3

$$\begin{cases} c_1\big|\hat{V}_2,\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| + c_2\big|\hat{W}_2,\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| + c_3\big|\hat{W}_3,\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| & = 0, \\ c_1\big|\hat{W}_1,\hat{V}_2,\hat{V}_3\big| + c_2\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{V}_3\big| + c_3\big|\hat{W}_1,\hat{W}_3,\hat{V}_3\big| & = 0, \\ c_1\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{V}_2\big| + c_2\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_2\big| + c_3\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3\big| & = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Учитывая, что в данном примере $\hat{V}_2 = \hat{W}_1$, $\hat{V}_3 = \hat{W}_2$ и справедливы равенства (3.48), получим эквивалентное последней системе уравнение

$$c_3\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3\big| = 0.$$

А так как $\big|\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3\big| \neq 0$, то решение системы (3.55) есть: $c_3 = 0$, а c_1 и c_2 — произвольные комплексные числа.

Аналогично обстоит дело и в случае (3.54).

Таким образом, никаких других п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ с $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$ помимо линейных комбинаций п.ф. $g(x,\lambda,V_2(\lambda))$ и $g(x,\lambda,W_2(\lambda))$ у рассматриваемой о.-ф. нет.

Покажем, что система к.ф. данной о.-ф. 2-кратно не полна в $L_2[0,1]$ и имеет бесконечный дефект.

Пусть в.-ф. $h(x) = (\bar{h}_1(x),\bar{h}_2(x))^T \in L_2^2[0,1]$ ортогональна всем производным 2-цепочкам, построенным по системе к.ф. $\mathscr{L}_1(\lambda)$. Воспользовавшись теперь леммой 3.14, получим

$$\int_0^1 g(x,\lambda,V_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad \int_0^1 g(x,\lambda,W_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \tag{3.56}$$

где $h_2(x,\lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x)$, при возможном дополнительном предположении ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^2[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.

Принимая во внимания формулу (3.52) и учитывая конкретный вид $\Gamma(\lambda)$, будем иметь

$$g(x,\lambda,V_2(\lambda)) = \lambda^3\Big(- 4e^{(1+i)\lambda}y_1(x,\lambda) + \big(4e^{i\lambda} - 4i\big)y_2(x,\lambda) + 4ie^{\lambda}y_3(x,\lambda)\Big), \tag{3.57}$$

$$g(x,\lambda,W_2(\lambda)) = \lambda^3\Big(4e^{i\lambda}y_1(x,\lambda) + \big(4ie^{i\lambda} - 4\big)y_2(x,\lambda) - 4iy_3(x,\lambda)\Big). \tag{3.58}$$

Если обозначить

$$Y_j^2(\lambda) = \int_0^1 y_j(x,\lambda)h_2(x,\lambda)\,dx, \quad j = \overline{1,3}, \tag{3.59}$$

то из (3.56)–(3.58) следует

$$-4e^{(1+i)\lambda}Y_1^2(\lambda) + \big(4e^{i\lambda} - 4i\big)Y_2^2(\lambda) + 4ie^{\lambda}Y_3^2(\lambda) \equiv 0, \tag{3.60}$$

$$4e^{i\lambda}Y_1^2(\lambda) + \big(4ie^{i\lambda} - 4\big)Y_2^2(\lambda) - 4iY_3^2(\lambda) \equiv 0. \tag{3.61}$$

Умножая (3.61) на e^{λ} и складывая с (3.60), получим

$$\hat{\Delta}^1(\lambda)Y_2^2(\lambda) \equiv 0.$$

А учитывая, что $\hat{\Delta}^1(\lambda) = 0$ только при $\lambda \in \Lambda_0$, окончательно будем иметь

$$Y_2^2(\lambda) \equiv 0. \tag{3.62}$$

Из (3.62) и (3.61) следует

$$e^{i\lambda}Y_1^2(\lambda) - iY_3^2(\lambda) \equiv 0. \tag{3.63}$$

При $\lambda = 0$ из (3.62) получим

$$\int\limits_0^1 h_1(x)\,dx = 0. \tag{3.64}$$

С учетом этого (3.62) можно представить, интегрируя один раз по частям, в виде

$$\int\limits_0^1 e^{\lambda x}\left(\int\limits_0^x h_1(t)\,dt - h_2(x)\right)dx \equiv 0.$$

Отсюда получим

$$h_2(x) = \int\limits_0^x h_1(t)\,dt \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1]. \tag{3.65}$$

Интегрируя по частям в (3.63) и используя (3.65) и (3.64), найдем

$$\int\limits_0^1 e^{i\lambda x}\big(h_1(x) + h_1(1-x)\big)\,dx \equiv 0,$$

что дает

$$h_1(x) = -h_1(1-x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1]. \tag{3.66}$$

Следовательно, условия (3.65)–(3.66) дают линейное многообразие всех функций $h(x) = (h_1(x),h_2(x))^T$, ортогональных всем производным 2-цепочкам, соответствующим к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_1(\lambda)$ и, возможно, некоторому фиксированному конечному множеству в.-ф. из $L_2^2[0,1]$. Очевидно, это линейное многообразие имеет бесконечную размерность.

Нетрудно показать обратное, что если в.-ф. $h(x)$ удовлетворяет соотношениям (3.65)–(3.66), то $h(x)$ ортогональна в пространстве $L_2^1[0,1]$ производным 2-цепочкам, построенным по системе к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_1(\lambda)$.

Таким образом, установлено, что система к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_1(\lambda)$ однократно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом и двукратно не полна в $L_2[0,1]$ (имеет бесконечный дефект относительно 2-кратной полноты).

Как уже было отмечено, впервые этот пример был исследован несколько другим методом с таким же результатом в [35].

3.5.2 Пример оператор-функции с двукратной полнотой системы корневых функций

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенную дифференциальную о.-ф. $\mathscr{L}_2(\lambda)$ третьего порядка, являющуюся частным случаем о.-ф. $L(\lambda)$,

$$\ell_2(y,\lambda) := y''' - (1+i)\lambda y'' + (2+i)\lambda^2 y' - 2\lambda^3 y, \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} U_1^2(y) &:= y(0) - 5y(1) = 0,\\ U_2^2(y) &:= y'(0) - (2+6i)y'(1) = 0,\\ U_3^2(y) &:= y''(0) + 10y''(1) = 0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Рассматриваемая о.-ф. имеет нераспадающиеся краевые условия и, как будет показано далее, является сильно-нерегулярной.

Характеристики данной о.-ф. есть числа $\omega_1 = -i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_2(y,\lambda) = 0$ (см. (3.7)) состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{2i\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -4 \end{pmatrix},$$
$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6+2i \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2-6i \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \hat{W}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 12-4i \\ -40 \end{pmatrix}.$$

Для характеристического определителя о.-ф. (3.67)–(3.68) справедливо следующее представление, которое получается аналогично тому, как было получено представление (3.49),

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = \lambda^3\big(-(3+9i) + (6+18i)e^{\lambda} - (69+27i)e^{2i\lambda} - (120-90i)e^{i\lambda} + \\ + (30+540i)e^{(1+2i)\lambda} + (2400-1800i)e^{(1+i)\lambda}\big) =: \lambda^3\hat{\Delta}^2(\lambda). \end{aligned}$$

На рисунке 3.6 изображены х.м. M_Δ и многоугольник M для данного примера.

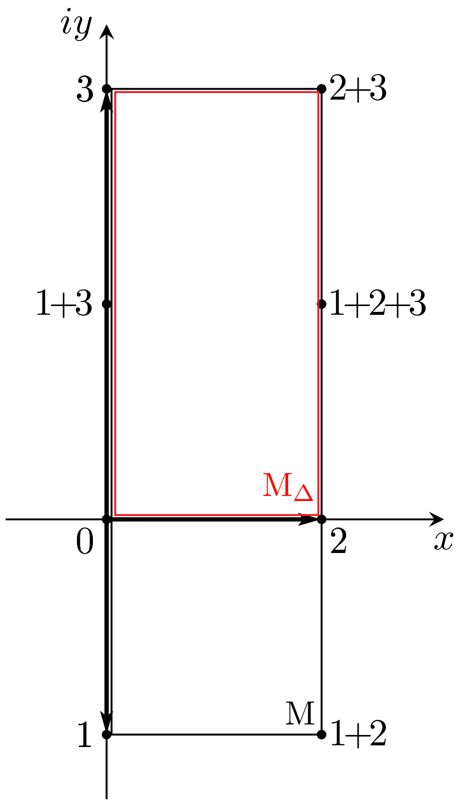

Рисунок 3.6 — Многоугольники M и M_Δ для второго примера

Следовательно, рассматриваемая о.-ф. является сильно нерегулярной. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому, как и в предыдущем примере, к о.-ф. $\mathscr{L}_2(\lambda)$ не применимы теоремы о кратной полноте к.ф. из [60; 62; 207].

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, на основании лемм 3.22 и 3.23, а также определений 3.13, 3.17 и 3.19 можно установить, что

$$\hat{V}_1 \notin (\alpha), \quad \hat{V}_2 \in (\alpha), \quad \hat{V}_3 \in (\alpha), \quad \hat{W}_1 \in (\alpha), \quad \hat{W}_2 \in (\alpha), \quad \hat{W}_3 \notin (\alpha).$$

Так как

$$\operatorname{rank}\{\hat{V}_2,\hat{V}_3,\hat{W}_1,\hat{W}_2\} = 2 < 3 = n,$$

то воспользоваться теоремой 3.24 о трёхкратной полноте к.ф. для рассматриваемой в этом примере о.-ф. $\mathscr{L}_2(\lambda)$ нельзя. Но так как имеется пара с одинаковым индексами $\{V_2,W_2\}$ такая, что V_2, $W_2 \in (\alpha)$, то на основании теоремы 3.25 можно заключить, что система к.ф. данной о.-ф. однократно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Ввиду того, что $\operatorname{rank}\{\hat{V}_2,\hat{W}_2\} = 2$, то в соответствии с леммой 3.16 имеем две линейно независимые п.ф. $g(x,\lambda,V_2(\lambda))$ и $g(x,\lambda,W_2(\lambda))$, удовлетворяющие условию (α), т.е. $V_2(\lambda) \in (\alpha)$ и $W_2(\lambda) \in (\alpha)$.

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, можно показать, что других п.ф. $g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))$ с $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$, линейно независимых от $g(x,\lambda,V_2(\lambda))$ и $g(x,\lambda,W_2(\lambda))$, нет.

Покажем, что система к.ф. рассматриваемой о.-ф. $\mathscr{L}_2(\lambda)$ двукратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Пусть $h(x) = (\bar{h}_1(x),\bar{h}_2(x))^T \in L_2^2[0,1]$ ортогональна всем производным 2-цепочкам, построенным по системе к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$. Так же, как и в предыдущем примере, воспользовавшись леммой 3.14, получим

$$\int\limits_0^1 g(x,\lambda,V_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad \int\limits_0^1 g(x,\lambda,W_2(\lambda))h_2(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \tag{3.69}$$

где, как и перед этим, $h_2(x,\lambda) := h_1(x)+\lambda h_2(x)$, при возможном дополнительном предположении ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^2[0,1]$ некоторому конечному набору в.-ф.

Принимая во внимание формулу (3.52) и учитывая конкретный вид $\Gamma(\lambda)$, найдем

$$\begin{aligned} g(x,\lambda,V_2(\lambda)) = \lambda^3\Big((-360+270i)e^{(1+2i)\lambda}y_1(x,\lambda)-\\ -\big((3+9i)+(69+27i)e^{2i\lambda}+(120-90i)e^{i\lambda}\big)y_2(x,\lambda)-\\ -(9+27i)e^{\lambda}y_3(x,\lambda)\Big), \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} g(x,\lambda;W_2(\lambda)) = \lambda^3\Big((360-270i)e^{2i\lambda}y_1(x,\lambda)+\\ +\big((6+18i)+(30+540i)e^{2i\lambda}+(2400-1800i)e^{i\lambda}\big)y_2(x,\lambda)+\\ +(9+27i)y_3(x,\lambda)\Big). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Используя уже введенные обозначения (3.59), из (3.69)–(3.71) получим

$$\begin{aligned} (-360+270i)e^{(1+2i)\lambda}Y_1^2(\lambda)-\\ -\big((3+9i)+(69+27i)e^{2i\lambda}+(120-90i)e^{i\lambda}\big)Y_2^2(\lambda)-\\ -(9+27i)e^{\lambda}Y_3^2(\lambda) \equiv 0, \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$
\begin{aligned}
(360-270i)e^{2i\lambda}&Y_1^2(\lambda)+\\
&+\big((6+18i)+(30+540i)e^{2i\lambda}+(2400-1800i)e^{i\lambda}\big)Y_2^2(\lambda)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+(9+27i)Y_3^2(\lambda)\equiv 0.
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Умножая (3.73) на e^{λ} и складывая с (3.72), найдём

$$
\hat{\Delta}^2(\lambda)Y_2^2(\lambda)\equiv 0.
$$

А учитывая, что $\hat{\Delta}^2(\lambda)=0$ только при $\lambda\in\Lambda_0$, окончательно получим

$$
Y_2^2(\lambda)\equiv 0. \tag{3.74}
$$

Учитывая (3.74) в (3.73), будем иметь

$$
(360-270i)e^{2i\lambda}Y_1^2(\lambda)+(9+27i)Y_3^2(\lambda)\equiv 0
$$

или

$$
-(5+15i)e^{2i\lambda}Y_1^2(\lambda)+Y_3^2(\lambda)\equiv 0. \tag{3.75}
$$

При $\lambda=0$ из (3.74) получим

$$
\int\limits_0^1 h_1(x)\,dx=0. \tag{3.76}
$$

С учетом этого, (3.74) можно представить, интегрируя один раз по частям, в виде

$$
\int\limits_0^1 e^{\lambda x}\left(\int\limits_0^x h_1(t)\,dt-h_2(x)\right)dx\equiv 0.
$$

Отсюда следует

$$
h_2(x)=\int\limits_0^x h_1(t)\,dt \quad \text{для п.в.} \quad x\in[0{,}1]. \tag{3.77}
$$

Интегрируя по частям в (3.75) и используя (3.77) и (3.76), найдем

$$
\int\limits_0^2 e^{i\lambda x}F(x)\,dx\equiv 0, \tag{3.78}
$$

где

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{2+i}{4} h_1\Big(\dfrac{x}{2}\Big), & x \in [0,1], \\ \dfrac{2+i}{4} h_1\Big(\dfrac{x}{2}\Big) - (20+10i)h_1(2-x), & x \in [1,2]. \end{cases} \tag{3.79}$$

Из (3.78) вытекает, что

$$F(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,2]$$

или

$$h_1(x) = 0, \qquad \text{для п.в.} \quad x \in \Big[0,\frac{1}{2}\Big], \tag{3.80}$$

$$h_1(x) - 40h_1(2-2x) = 0, \qquad \text{для п.в.} \quad x \in \Big[\frac{1}{2},1\Big]. \tag{3.81}$$

Из (3.81) получим

$$h_1(x) = \frac{1}{40} h_1\Big(\frac{2-x}{2}\Big) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1],$$

что дает

$$\|h_1\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{40}\left(\int\limits_0^1 \left|h_1\left(\frac{2-x}{2}\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{40}\left(2\int\limits_{1/2}^1 |h_1(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{40}\|h_1\|_{L_2[0,1]}.$$

Следовательно, $\|h_1\|_{L_2[0,1]} = 0$, то есть $h_1(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. При этом соотношение (3.80) будет выполняться автоматически, а из (3.77) получим $h_2(x) = 0$ при $x \in [0,1]$.

Таким образом, установлено, что система к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$ двукратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.

Покажем, что трехкратной полноты системы к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ нет и имеет место бесконечный дефект.

Пусть в.-ф. $h(x) = \big(\bar{h}_1(x),\bar{h}_2(x),\bar{h}_3(x)\big)^T \in L_2^3[0,1]$ ортогональна всем производным 3-цепочкам, построенным по системе к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$, и, возможно, некоторому вполне конкретному конечному множеству в.-ф. из $L_2^3[0,1]$.

Повторяя предыдущие рассуждения в этом подразделе (см. вывод формул (3.69)–(3.75) выше), найдем аналогично

$$Y_2^3(\lambda) \equiv 0. \tag{3.82}$$

$$-(5+15i)e^{2i\lambda}Y_1^3(\lambda) + Y_3^3(\lambda) \equiv 0, \tag{3.83}$$

где

$$Y_j^3(\lambda) := \int\limits_0^1 e^{\omega_j \lambda x} h_3(x,\lambda)\,dx,\ j=\overline{1,3}, \quad h_3(x,\lambda) = h_1(x) + \lambda h_2(x) + \lambda^2 h_3(x).$$

При $\lambda = 0$ из (3.82) вытекает

$$\int_0^1 h_1(x)\,dx = 0. \tag{3.84}$$

Далее, из (3.82) следует с учётом (3.84)

$$0 \equiv Y_2^3(\lambda) = \lambda \int\limits_0^1 e^{\lambda x}\left(-\int\limits_0^x h_1(t)\,dt + h_2(x)\right)dx + \lambda^2 \int\limits_0^1 e^{\lambda x} h_3(x)\,dx. \tag{3.85}$$

Сократив предварительно на λ и положив $\lambda = 0$, получим

$$\int\limits_0^1 \left(h_2(x) - \int\limits_0^x h_1(t)\,dt\right)dx = 0. \tag{3.86}$$

Учитывая это соотношение, из (3.85) найдем, интегрируя по частям,

$$\lambda^2 \int\limits_0^1 e^{\lambda x}\left(h_3(x) - \int\limits_0^x h_2(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^t h_1(\tau)\,d\tau\,dt\right)dx \equiv 0.$$

Следовательно,

$$h_3(x) = \int\limits_0^x h_2(t)\,dt - \int\limits_0^x \int\limits_0^t h_1(\tau)\,d\tau\,dt. \tag{3.87}$$

Учитывая это соотношение в (3.83) и проделывая соответствующие преобразования, получим

$$\int\limits_0^2 e^{i\lambda x} H(x)\,dx \equiv 0, \tag{3.88}$$

где

$$H(x) := \begin{cases} -\dfrac{5i}{4} H_1\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + \dfrac{2+i}{4} h_2\Big(\dfrac{x}{2}\Big), & \text{для п.в.} \quad x \in [0{,}1], \\ -\dfrac{5i}{4} H_1\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + \dfrac{2+i}{4} h_2\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + & \\ +(30-10i)H_1(2-x) - (20+10i)h_2(2-x), & \text{для п.в.} \quad x \in [1{,}2]. \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$H_1(x) = \int\limits_0^x h_1(t)\,dt.$$

Из (3.88) следует, что

$$H(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0{,}2]$$

или

$$H_1(x) - \frac{1-2i}{5} h_2(x) = 0, \qquad \text{для п.в. } x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big], \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} &H_1(x) - \frac{1-2i}{5} h_2(x) + 8(1+3i)H_1(2-2x) + \\ &+ 8(1-2i)h_2(2-2x) = 0, \qquad \text{для п.в. } x \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big]. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Очевидно, при условиях (3.84) и (3.86) эти соотношения эквивалентны ортогональности в.-ф. $h(x)$ производным 3-цепочкам, построенным по к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$, и, возможно, некоторому вполне конкретному конечному множеству в.-ф. из $L_2^3[0{,}1]$.

Покажем, что уравнение (3.89)–(3.90) при условиях (3.84) и (3.86) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений.

Перепишем (3.90) в виде

$$h_2(2-2x) = \frac{1}{40} h_2(x) + (1-i)H_1(2-2x) - \frac{1+2i}{40} H_1(x) \text{ для п.в. } x \in \Big[\frac{1}{2}, 1\Big].$$

Сделав замену $2 - 2x = x_1$ и полагая $x_1 = x$, получим

$$h_2(x) = \frac{1}{40} h_2\Big(1 - \frac{x}{2}\Big) + K(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0{,}1], \tag{3.91}$$

где обозначено

$$K(x) := (1-i)H_1(x) - \frac{1+2i}{40} H_1\Big(1 - \frac{x}{2}\Big), \quad x \in [0{,}1]. \tag{3.92}$$

Введем оператор $A \in L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$(Af)(x) := \frac{1}{40} f\Big(1 - \frac{x}{2}\Big), \quad x \in [0,1]. \tag{3.93}$$

Очевидно,

$$\|A\| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{40} < 1$$

и, следовательно, существует ограниченный обратный оператор

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots . \tag{3.94}$$

Таким образом, с использованием оператора A уравнение (3.91) можно записать в виде

$$h_2(x) = (Ah_2)(x) + K(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1], \tag{3.95}$$

откуда с учетом (3.94) получим

$$h_2(x) = \big((E - A)^{-1} K\big)(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1]. \tag{3.96}$$

Перепишем (3.89) в виде

$$(1 + 2i) H_1(x) = h_2(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big]. \tag{3.97}$$

Учитывая здесь (3.96), получим

$$(1 + 2i) H_1(x) = ((E - A)^{-1} K)(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big]$$

или

$$(1 + 2i)((E - A) H_1)(x) = K(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \big[0, \tfrac{1}{2}\big].$$

С учетом (3.92), отсюда будем иметь равенство

$$(1+2i)H_1(x) - (1+2i)\frac{1}{40} H_1\Big(1 - \frac{x}{2}\Big) = (1-i)H_1(x) - \frac{1+2i}{40} H_1\Big(1 - \frac{x}{2}\Big) \\ \text{для п.в.} \quad x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big]$$

или

$$H_1(x) = 0, \quad \text{для п.в.} \quad x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big].$$

Итак, задаем произвольную функцию $H_1(x) \in W_2^1[0,1]$ такую, что

$$H_1(x) = 0, \ \text{для п.в.}\ x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big], \quad H_1(1) = 0, \quad \int\limits_{1/2}^{1} H_1(x)\, dx = 0. \tag{3.98}$$

Ясно, что это бесконечномерное семейство функций.

Далее, определим $K(x)$ по формуле (3.92). Тогда можно определить $h_2(x)$ по формуле (3.96) или

$$\big((E-A)h_2\big)(x)=K(x),\quad x\in[0,1].$$

Отсюда, используя (3.93) и (3.92), получим

$$H_1(x)-\frac{1-2x}{5}h_2(x)+8(1+3i)H_1(2-2x)+8(1-2i)h_2(2-2x)=0,$$
$$\text{для п.в. } x\in\Big[\frac{1}{2},1\Big],$$

то есть (3.90) выполняется.

Из (3.98) получим

$$3iH_1(x)=\left(\frac{1+2i}{40}-\frac{1+2i}{40}\right)H_1\Big(1-\frac{x}{2}\Big),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

или

$$(1+2i)H_1(x)-\frac{1+2i}{40}H_1\Big(1-\frac{x}{2}\Big)=(1-i)H_1(x)-\frac{1+2i}{40}H_1\Big(1-\frac{x}{2}\Big),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

или

$$(1+2i)((E-A)H_1)(x)=K(x),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

или

$$(1+2i)H_1(x)=((E-A)^{-1}K)(x),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

или

$$(1+2i)H_1(x)=h_2(x),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

или

$$H_1(x)=\frac{1-2i}{5}h_2(x),\quad x\in\Big[0,\frac{1}{2}\Big],$$

а это значит, что и (3.89) также выполняется.

Далее, (3.84) выполняется в силу выбора $H_1(x)$ с условием (3.98).

Проверим выполнение условия (3.86). Это условие можно записать в виде

$$\int\limits_0^1 h_2(x)\,dx=\int\limits_0^1 H_1(x)\,dx=0. \tag{3.99}$$

Пусть $H_1(x)$ и $h_2(x)$ есть построенные решения уравнения (3.89)–(3.90), которое является теперь тождеством. При этом выполняются предположения (3.98).

Из (3.89) сразу следует, что

$$h_2(x) = 0, \quad x \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, с учетом (3.98) и (3.99), требуется проверить выполнение условия

$$\int\limits_{1/2}^{1} h_2(x)\,dx = 0. \tag{3.100}$$

Интегрируя тождество (3.90) по x от $1/2$ до 1, получим

$$\int\limits_{1/2}^{1} h_2(x)\,dx = \frac{19-22i}{19}\int\limits_{1/2}^{1} H_1(x)\,dx = 0,$$

то есть равенство (3.100) выполняется.

Построим теперь функции

$$h_1(x) = H_1'(x), \quad h_3(x) = \int\limits_0^x h_2(t)\,dt - \int\limits_0^x H_1(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

и в.-ф. $h(x) = (\bar{h}_1(x),\bar{h}_2(x),\bar{h}_3(x))^T$. Ясно, что $h(x) \in L_2^3[0,1]$.

Из проведенных рассуждений видно, что бесконечномерное множество построенных в.-ф. ортогонально производным 3-цепочкам, соответствующим к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_2(\lambda)$.

Это показывает, что система к.ф. $\mathscr{L}_2(\lambda)$ трёхкратно неполна в $L_2[0,1]$ и иметь бесконечный дефект.

3.5.3 Пример оператор-функции с трёхкратной полнотой системы корневых функций

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим дифференциальную о.-ф. $\mathscr{L}_3(\lambda)$ третьего порядка, являющуюся частным случаем о.-ф. $L(\lambda)$,

$$\ell_3(y,\lambda) := y''' - (1-i)\lambda y'' + (1+2i)\lambda^2 y' - (1+3i)\lambda^3 y, \tag{3.101}$$

$$U_1^3(y,\lambda) := y(0) + 5y(1) = 0,$$
$$U_2^3(y,\lambda) := y'(0) + (1+2i)y'(1) = 0, \tag{3.102}$$
$$U_3^3(y,\lambda) := y''(0) - (3+i)y''(1) + (6-3i)\lambda y'(1) = 0.$$

Рассматриваемая о.-ф. имеет нераспадающиеся краевые условия и, как будет показано далее, является сильно-нерегулярной.

Характеристики данной о.-ф. есть $\omega_1 = 1-2i$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = -1+i$ и, следовательно, ф.с.р. уравнения $\ell_3(y,\lambda) = 0$ (см. (3.7)) $\ell_3(y,\lambda) = 0$ состоит из функций

$$y_1(x,\lambda) = e^{(1-2i)\lambda x}, \quad y_2(x,\lambda) = e^{\lambda x}, \quad y_3(x,\lambda) = e^{-(1-i)\lambda x} \quad (\lambda \neq 0).$$

В данном случае имеем

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \\ -3-4i \end{pmatrix}, \ \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \hat{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \\ -2i \end{pmatrix},$$

$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \\ 3-4i \end{pmatrix}, \ \hat{W}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3-i \\ -5+15i \end{pmatrix}.$$

Для характеристического определителя о.-ф. (3.101)–(3.102) справедливо следующее представление, которое получается аналогично тому, как было получено представление (3.49),

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3\big((14-2i) + (48+6i)e^{\lambda} - (2-16i)e^{(i-1)\lambda} - \\ - (172+54i)e^{i\lambda} - (10+570i)e^{(1-i)\lambda}\big).$$

На рисунке 3.7 изображены х.м. M_Δ и многоугольник M для данного примера.

Следовательно, рассматриваемая о.-ф. является сильно нерегулярной. Кроме того, краевые условия не являются полураспадающимися. Поэтому к о.-ф. $\mathscr{L}_3(\lambda)$ не применимы теоремы о кратной полноте к.ф. из [60; 62; 207].

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущих примерах в подразделах 3.5.1 и 3.5.2, на основании лемм 3.22 и 3.23, а также определений 3.17 и 3.11, можно установить, что

$$\hat{V}_1 \notin (\alpha), \quad \hat{V}_2 \in (\alpha), \quad \hat{V}_3 \in (\alpha), \quad \hat{W}_1 \in (\alpha), \quad \hat{W}_2 \in (\alpha), \quad \hat{W}_3 \in (\alpha).$$

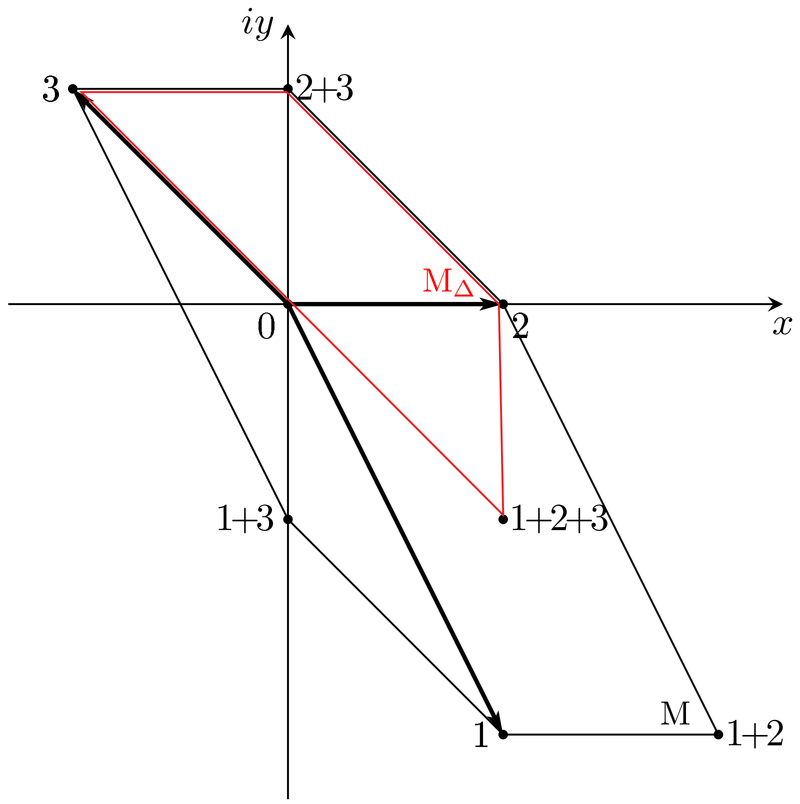

Рисунок 3.7 — Многоугольники M и M_Δ для третьего примера

Так как

$$\operatorname{rank}\{\hat{V}_2,\hat{V}_3,\hat{W}_1,\hat{W}_2,\hat{W}_3\} = 3 = n,$$

то воспользовавшись теоремой 3.24, получим, что система к.ф. оператор-функции $\mathscr{L}_3(\lambda)$ трехкратно полна в $L_2[0,1]$.

3.6 Кратная полнота системы корневых функций в случае расположения характеристик на двух лучах и распадающихся краевых условий

В $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенную дифференциальную полиномиальную о.-ф. $L^1(\lambda)$, порожденную д.в. $\ell(y,\lambda)$ вида (3.1)

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, p_{js} \in \mathbb{C},\ p_{n0} \neq 0,\ p_{0n} \neq 0, \tag{3.103}$$

и линейно независимыми однородными двухточечными распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_i^1(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{3.104}$$

$$U_i^1(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{3.105}$$

где α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Предположим, что характеристики ω_1, ω_2, ..., ω_n попарно различны, отличны от нуля и лежат на двух или одном лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Не нарушая общности можно считать, что корни ω_j расположены следующим образом

$$\omega_n e^{i(\pi-\varphi)} < \omega_{n-1} e^{i(\pi-\varphi)} < \dots < \omega_{k+1} e^{i(\pi-\varphi)} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k, \tag{3.106}$$

где $0 < |\varphi| < \pi$ (см. рисунок 3.8). То есть первые k корней ω_j лежат на положительном луче, а остальные $n-k$ корней — на луче, исходящем из начала под углом φ. В случае одного луча ($k = n$ или $k = 0$), ради единообразия дальнейших выкладок, считаем, что $\varphi = 0$ и $k = n$, то есть формально тоже два луча, но один луч не содержит корней.

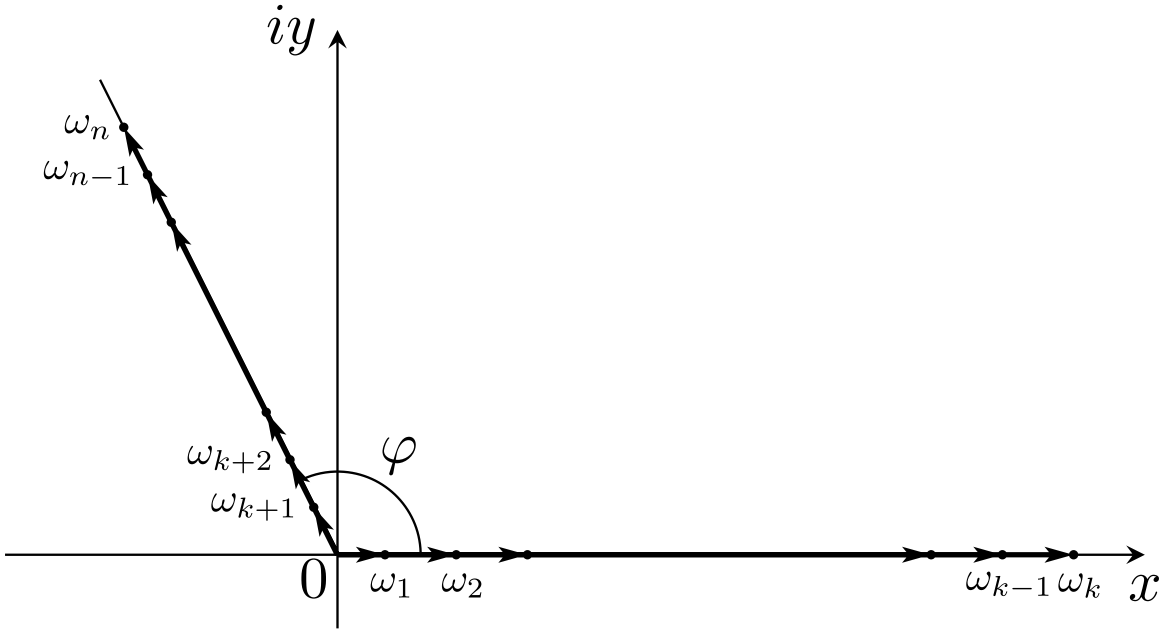

Рисунок 3.8 — Расположение характеристик

Решается задача о нахождении условий на параметры о.-ф. $L^1(\lambda)$, при которых имеет место m-кратная полнота $(1 \leqslant m \leqslant n)$ системы к.ф. в $L_2[0,1]$.

Результаты, изложенные в рассматриваемом разделе, опубликованы в статьях автора диссертации [170; 171].

Отметим, что при получении этого результата используется схема рассуждений из статьи автора диссертации [44], где рассматриваются полураспадающиеся краевые условия (часть краевых условий только в одном конце отрезка [0,1]). Несмотря на то, что распадающиеся краевые условия (3.104)–(3.105) являются частным случаем полураспадающихся краевых условий, рассуждения, тем не менее, значительно отличаются. И из условий кратной полноты, полученных в [44], не следуют условия кратной полноты для распадающихся краевых условий (3.104)–(3.105).

До настоящего момента, насколько известно автору диссертации, исследований данного вопроса для о.-ф. $L^1(\lambda)$ проведено не было.

Общая ситуация произвольного расположения характеристик на η лучах при полураспадающихся краевых условиях, исходящих из начала ($1 \leqslant \eta \leqslant n$), рассмотрена автором диссертации в статьях [43; 45].

Рассматривается только случай расположения характеристик на двух лучах и распадающихся краевых условий (3.104)–(3.105), так как в этом случае удалось выявить простое условие сильной нерегулярности о.-ф. и применить схему ДКП как с использованием классических п.ф., так и с существенным использованием обобщённых п.ф.

То есть рассмотрение о.-ф. $L^1(\lambda)$ является хорошей иллюстрацией применения подхода к исследованию кратной полноты системы к.ф. с использованием введённых в разделе 3.3 обобщённых п.ф.

3.6.1 Предположения и формулировка результатов

Будем использовать далее обозначения

$$[p,q]_- = \min\{p,q\}, \quad [p,q]_+ = \max\{p,q\}, \quad [p]_+ = \max\{p,0\}.$$

Положим при $j = \overline{1,n}$

$$a_{ij} := \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \alpha_{i\nu s}\omega_j^{\nu}, \quad i = \overline{1,l}; \qquad b_{ij} := \sum_{\nu+s=\varkappa_i} \beta_{i\nu s}\omega_j^{\nu}, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Введём условия отличия от нуля главного члена асимптотики характеристического определителя о.-ф. $L^1(\lambda)$. Главным членом асимптотики является соответствующая растущая экспонента с коэффициентом, который есть произведение двух определителей. Один определитель выражается через числа a_{ij}, а другой — через числа b_{ij}. Конкретный вид таких определителей зависит от того, в правой или левой полуплоскости рассматривается параметр λ, а также от соотношений между n, l и k. Всего имеется четыре пары таких определителей (по два для правой и левой полуплоскостей расположения параметра λ), а следовательно, четыре условия:

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} \neq 0 \qquad \text{при } n-k \leqslant l; \tag{3.107}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} \neq 0 \qquad \text{при } n-k \geqslant l; \tag{3.108}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} \neq 0 \qquad \text{при } k \leqslant l; \tag{3.109}$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} \neq 0, \qquad \det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} \neq 0 \qquad \text{при } k \geqslant l. \tag{3.110}$$

Отметим, что в крайнем случае $n-k=l$ условия (3.107) и (3.108) совпадают. Аналогично в крайнем случае $k=l$ совпадают условия (3.109) и (3.110).

Теорема 3.26. *Если $[k,n-k]_+ \leqslant l$ и выполняются условия* (3.107) *и* (3.109), *то при $m=2(n-l)$ система к.ф. оператор-функции* (3.103)–(3.105) *m-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_1 := \sum\limits_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.*

Теорема 3.27. *Если $[k,n-k]_- \geqslant l$ и выполняются условия* (3.108) *и* (3.110), *то при $m=2l$ система к.ф. оператор-функции* (3.103)–(3.105) *m-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $d_2 := \sum\limits_{i=1}^{l}[m-1-\varkappa_i]_+$.*

Два крайних подслучая из теорем 3.26 и 3.27 объединим в отдельной теореме. Это соответствует случаю о.-ф., регулярной по Биркгофу-Тамаркину.

Теорема 3.28. *Если $[k,n-k]_- = [k,n-k]_+ = l$ или, что на самом деле эквивалентно, $n=2k=2l$ и выполняются условия* (3.107) (*или* (3.108)) *и* (3.109) (*или* (3.110)), *то система к.ф. оператор-функции* (3.103)–(3.105) *n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с нулевым дефектом в случае $\varkappa_i \leqslant n-1$, $i=\overline{1,n}$, и с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $[d_1,d_2]_-$ в противном случае.*

Доказательство этих теорем проводится в соответствии с приведенной в разделе 3.3 схемой ДКП с использованием к.п.ф. Но в замечании 3.43 отмечено, что в случае

$$[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+, \tag{3.111}$$

который исключен из рассмотрения в теоремах 3.26 и 3.27, использование к.п.ф. не приводит к результату, так как, вообще говоря, к.п.ф. не удовлетворяют условию (α).

Заметим, что из условия (3.111) следует, что $k \neq n-k$. Таким образом, при условии (3.111) имеет место или случай $k > n-k$, или случай $k < n-k$.

Оказывается, в случае (3.111) можно построить обобщённые п.ф., удовлетворяющие условию (α), тем самым реализовать схему ДКП и получить условия кратной полноты системы к.ф. $L^1(\lambda)$.

В случае расположения характеристик на двух лучах, исходящих из начала (см. предположение (3.106)) многоугольник M — это четырехугольник $A'B'C'D'$ на рисунке 3.9, граница которого обозначена тонкой сплошной линией. Здесь $A' = 0$ и $B' = \omega_1 + \dots + \omega_k$ — крайние левая и правая точки, лежащие на вещественной оси, $C' = \omega_1 + \dots + \omega_n$ и $D' = \omega_{k+1} + \dots + \omega_n$, причем, очевидно, прямая $C'D'$ параллельна вещественной прямой, то есть M есть параллелограмм.

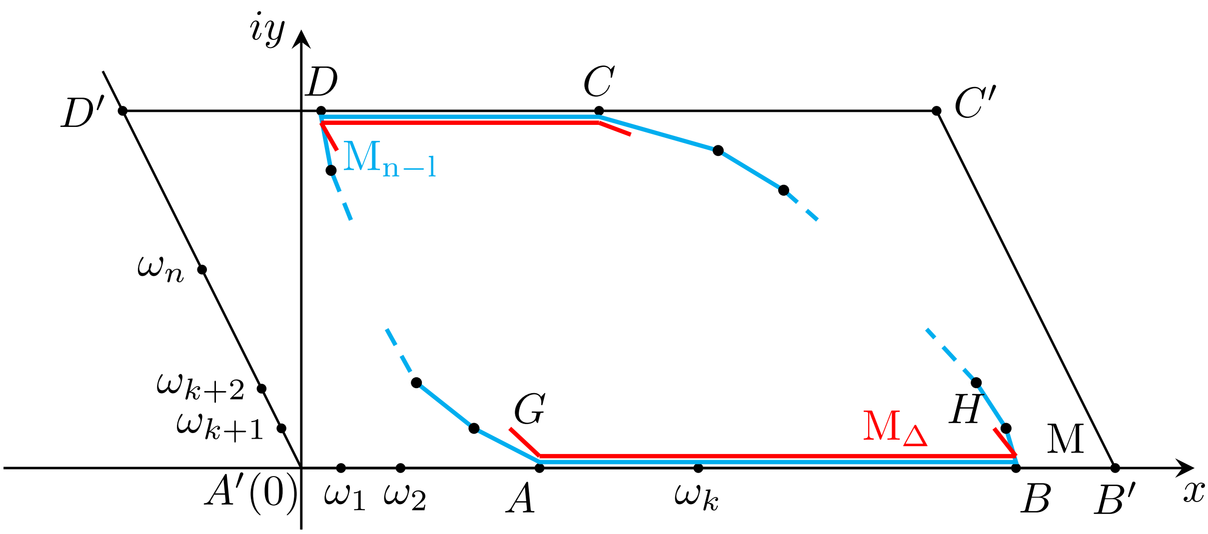

Рисунок 3.9 — Случай $k > n-k$. Многоугольники M, M_{n-l} и M_Δ

В случае $n-k < k$ будем условно называть стороны $A'B'$ и $D'C'$ «длинными» сторонами параллелограмма $A'B'C'D'$ (эти стороны могут быть на самом деле и короче и длиннее сторон $A'D'$ и $B'C'$ — всё зависит от величин характеристик, лежащих на $A'B'$ и $A'D'$). Термин «длиннее» означает лишь только то, что стороны $A'B'$ и $D'C'$ порождены не меньшим количеством характеристик, чем стороны $A'D'$ и $B'C'$, ввиду того, что $n-k<k$. Стороны $A'D'$ И $B'C'$ в таком случае будем называть «короткими».

В случае $k<n-k$ «длинными» сторонами, наоборот, будем называть стороны $A'D'$ и $B'C'$, а «короткими» — стороны $A'B'$ и $A'D'$.

Для формулировки результата о кратной полноте к.ф. $L^1(\lambda)$ потребуется еще многоугольник M_{n-l}, который является выпуклой оболочкой всевозможных точек множества Ω, являющихся суммами различных характеристик в количестве ровно $n-l$ штук.

На рисунке 3.9 (рисунок дан для случая $k>n-k$) множество M_{n-l} есть многоугольник $ABCD$, граница которого обозначена сплошной толстой линией.

В случае $n-k<k$ вершины A и B лежат на «длинной» стороне $A'B'$ параллелограмма M (как на рисунке 3.9), где $A=\omega_1+\cdots+\omega_{n-l}$ — самая левая угловая точка M_{n-l}, лежащая на вещественной оси на стороне $A'B'$, а $B=\omega_{l-n+k+1}+\cdots+\omega_k$ — самая правая угловая точка этого многоугольника, лежащая на стороне $A'B'$. Вершины C и D лежат на «длинной» стороне $D'C'$ параллелограмма M, где $D=\omega_1+\cdots+\omega_{k-l}+\omega_{k+1}+\cdots+\omega_n$ — самая левая вершина M_{n-l} на стороне $D'C'$, а $C=\omega_{l+1}+\cdots+\omega_n$ — самая правая вершина этого многоугольника, лежащая на стороне $D'C'$. Линии AD и BC являются ломаными.

В случае $k<n-k$ вершины A и D будут лежать на «длинной» стороне $A'D'$ параллелограмма M, где $A=\omega_{k+1}+\cdots+\omega_{k+n-l}$ — самая нижняя вершина многоугольника M_{n-l}, лежащая на стороне $A'D'$, а $D=\omega_{l+1}+\cdots+\omega_n$ — самая верхняя вершина этого многоугольника, лежащая на стороне $A'D'$. Вершины B и C лежат на «длинной» стороне $B'C'$ параллелограмма M, где $B=\omega_1+\cdots+\omega_k+\omega_{k+1}+\cdots+\omega_{n-l}$ — самая нижняя вершина многоугольника M_{n-l}, лежащая на стороне $B'C'$, а $C=\omega_1+\cdots+\omega_k+\omega_{k+l+1}+\cdots+\omega_n$ — самая верхняя вершина этого многоугольника, лежащая на стороне $B'C'$. Линии AB и DC являются ломаными.

Вершины многоугольника M_{n-l}, лежащие на «длинных» сторонах параллелограмма, будем называть *главными* вершинами.

Далее будет показано, что, в случае распадающихся краевых условий (3.104)–(3.105), справедливо включение $M_\Delta\subset M_{n-l}$. Из условия (3.111) следует, что многоугольник M_{n-l}, а значит, и характеристический многоугольник M_Δ, не касается «коротких» сторон параллелограмма M.

Теорема 3.29. *Если $[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+$, $m = [k,n-k]_-$ и х.м. M_Δ о.-ф. $L^1(\lambda)$ содержит главные вершины многоугольника M_{n-l}, то система его к.ф. m-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

Замечание 3.30. В [60;62] были детально рассмотрены о.-ф. $L(\lambda)$ вида (3.1)–(3.2) в случае, когда

а) краевые условия не зависят от λ и краевые условия полураспадающиеся (то есть l краевых условий ($2l \geqslant n$) только в одном конце отрезка $[0,1]$, например, в точке 0);

б) существует прямая d, проходящая через начало координат, не содержащая характеристик и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем $n-l$.

На характеристики никаких условий не накладывалось, кроме того, что они попарно различны и отличны от нуля. Были получены условия n- и m-кратной полноты при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов. □

Замечание 3.31. На самом деле автором диссертации исследован [45] более общий класс о.-ф. типа $L(\lambda)$, как с однородным, так и с неоднородным д.в. и с распадающимися в «широком смысле» ($1 \leqslant l \leqslant n-1$) краевыми условиями с единственным требованием на характеристики, что они попарно различны, отличны от нуля и лежат на η лучах, в количествах ν_j, $j=\overline{1,\eta}$. Но именно в случае двух лучей ($\eta = 2$) для получения результата накладывается меньше всего условий. □

Замечание 3.32. Когда $\eta = 2$ и $\varphi = \pi$, кратная полнота к.ф. $L(\lambda)$, для которого условия а) или б) не выполняются, исследовалась автором диссертации в статьях [40; 42; 44; 164] и совместно с О. В. Блинковой в статье [58] и О. В. Парфиловой в статье [174]. В совместных статьях основные идеи и методы исследования кратной полноты системы к.ф. принадлежат автору диссертации, а соавторам принадлежит техническая реализация этих идей и методов.

Нарушение условий а) и б) возможно, когда краевые условия зависят от спектрального параметра λ, когда $2l < n$ или даже $2l \geqslant n$, но характеристики не удовлетворяют условию б).

Случай $l = n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [40], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [164], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n-1$ рассматривался в [174], и, наконец, случай $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ рассматривался в [58]. Когда, по-прежнему, $\eta = 2$, но φ произвольно, кратная полнота исследовалась в [42] при $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ и в [44] при $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$.

Д.в. $\ell(y,\lambda)$ во всех этих работах, кроме [42], предполагалось однородным.

В указанных статьях получены достаточные условия m-кратной полноты к.ф. в $L_2[0,1]$, где $m = \min\{\nu_1, n-l\} + \min\{n-\nu_1, n-l\}$. □

Замечание 3.33. В статьях Г. Фрайлинга [11] и автора диссертации [150] также исследовалась кратная полнота системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$, у которой краевые условия предполагались полураспадающимися, д.в. $\ell(y,\lambda)$ было однородным и требовалась определенная асимптотика характеристического определителя, но условия существования которой не указывались. □

3.6.2 Доказательство теорем 3.26–3.28 о кратной полноте системы корневых функций с помощью классических порождающих функций

3.6.2.1 Основная лемма об оценке

Как уже было отмечено, уравнение $\ell(y,\lambda) = 0$, в силу однородности д.в. (3.103), имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ вида

$$y_j(x,\lambda) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.112}$$

Наряду с ф.с.р. (3.112) будет использоваться ф.с.р.

$$\tilde{y}_j(x,\lambda), \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.113}$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0,\lambda) = \delta_{js}, \quad j,s = \overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Будем обозначать объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Как уже отмечалось в разделе 3.2, с.з. λ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, о.-ф. $L^1(\lambda)$, определенной формулами (3.103)–(3.105), являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det\bigl(U_i^1(\tilde{y}_j,\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n$. Известными методами (см., например, [207, лемма 1.1, с. 197]) можно найти асимптотику этих с.з. при $|\lambda| \gg 1$. Но эта асимптотика в данном разделе не потребуется.

Рассмотрим классические п.ф. $\tilde{g}_i(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, построенные на основе ф.с.р. (3.113) (см. формулы (3.20)). Реализуем далее схему ДКП системы к.ф. оператор-функции $L^1(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

На основе этих п.ф. по формуле (3.16) из подраздела 3.3 при фиксированном $m \in \{1,2,\ldots,n\}$ (этот параметр определяет кратность полноты системы к.ф. и будет выбран позже) построим вектор-столбцы

$$\left(\frac{\partial^j \tilde{g}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^j},\ldots,\frac{\partial^j\bigl(\lambda^{m-1}\tilde{g}_i(x,\lambda)\bigr)}{\partial\lambda^j}\right)^T\Bigg|_{\lambda=\lambda_\nu}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{\tau_\nu,s_\nu}, \tag{3.114}$$

которые являются производными по Келдышу m-цепочками для к.ф., соответствующих с.з. λ_ν, являющимся нулём функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s_\nu + 1$.

Рассмотрим функции

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) := \frac{H_m(\tilde{g}_i,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.115}$$

где

$$H_m(\tilde{g}_i,\lambda) := \int\limits_0^1 \tilde{g}_i(x,\lambda)\mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx, \quad \mathrm{h}_m(x,\lambda) := \sum_{j=1}^m \lambda^{j-1}\bar{h}_j(x), \quad h_j(x) \in L_2[0,1].$$

Далее потребуется другое представление для функции $\mathrm{h}_m(x,\lambda)$, а именно:

$$\mathrm{h}_m(x,\lambda) = \lambda^{m-1}\sum_{j=1}^m \lambda^{j-m}\bar{h}_j(x) =: \lambda^{m-1}h_m(x,\lambda).$$

Таким образом,

$$H_m(\tilde{g}_i,\lambda) = \lambda^{m-1}\int\limits_0^1 \tilde{g}_i(x,\lambda)h_m(x,\lambda)\,dx, \quad h_m(x,\lambda) := \sum_{j=1}^m \lambda^{j-m}\bar{h}_j(x). \tag{3.116}$$

С учетом определения функций $\tilde{g}_i(x,\lambda)$ (см. формулы (3.20)), $H(\tilde{g}_i,\lambda)$ есть определители, которые получаются из определителя $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda),\ldots,\tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, где

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda)=\int\limits_0^1 \mathrm{h}_m(x,\lambda)\,dx=\lambda^{m-1}\int\limits_0^1 h_m(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx.$$

Справедливы следующие простые утверждения, доказательство которых аналогичны доказательствам соответствующих утверждений из [62, с. 48–49].

Утверждение 3.34. *Функции* $\tilde{g}_1(x,\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{g}_l(x,\lambda)$ *являются линейно независимыми решениями уравнения* $\ell(y,\lambda)=0$, *удовлетворяющими последним* $n-l$ *краевым условиям* (3.105), *а функции* $\tilde{g}_{l+1}(x,\lambda)$, $\ldots$, $\tilde{g}_n(x,\lambda)$ *являются линейно независимыми решениями того же уравнения, удовлетворяющими первым* l *краевым условиям* (3.104).

Утверждение 3.35. *Функции* $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_1,\lambda)$, $\ldots$, $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_n,\lambda)$ *не зависят от выбора ф.с.р. уравнения* $\ell(y,\lambda)=0$.

Из утверждения 3.35 и формулы (3.115) получим

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda)\equiv\mathcal{H}_m(g_i,\lambda)\equiv\frac{H_m(g_i,\lambda)}{\Delta(\lambda)},\quad i=\overline{1,n}. \tag{3.117}$$

Введем в рассмотрение следующие множества

$$\Pi_\varepsilon^+=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda\in\left[(-1)^\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\varepsilon,(-1)^\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right]\right\},$$
$$\Pi_\varepsilon^-=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda\in\left[(-1)^\nu\frac{3\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\varepsilon,(-1)^\nu\frac{3\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right]\right\},$$

где $\varepsilon>0$ и достаточно мало, $\nu=0$ в случае $0<\varphi\leqslant\pi$ и $\nu=1$ в случае $-\pi<\varphi<0$.

Как и до этого, будем обозначать через $C(\varepsilon)$ различные константы, зависящие, возможно, только от ε, через $O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ различные величины, для которых при $|\lambda|\gg 1$ имеют место оценки $|O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\leqslant\frac{C(\varepsilon)}{|\lambda|}$. Кроме того, будем использовать обозначение $[a]_\varepsilon:=a+O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ при $|\lambda|\gg 1$.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной в доказательстве сформулированных теорем о кратной полноте системы к.ф.

Лемма 3.36. *Классические п.ф.* $g_i(x,\lambda)$ *удовлетворяют условию* (α), *если*
а) $[k,n-k]_+ \leqslant l$, $i=\overline{l+1,n}$, *при условиях* (3.107) *и* (3.109),
б) $[k,n-k]_- \geqslant l$, $i=\overline{1,l}$, *при условиях* (3.108) *и* (3.110),
При этом справедливы оценки при $\lambda \in \Pi_\varepsilon^\pm$ *и* $|\lambda| \gg 1$

$$|\mathcal{H}_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}-\varkappa_i}. \tag{3.118}$$

Доказательство. Имеют место следующие формулы:

(i) при $\sigma=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}=\lambda^{\varkappa_\sigma}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}a_{\sigma j}; \tag{3.119}$$

(ii) при $\sigma=\overline{l+1,n}$, $j=\overline{1,n}$

$$U_\sigma(y_j,\lambda)=\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}\sum_{\nu+s=\varkappa_\sigma}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu=\lambda^{\varkappa_\sigma}e^{\lambda\omega_j}b_{\sigma j}. \tag{3.120}$$

Для большей ясности разобьём доказательство на ряд пунктов и лемм.

1. Рассмотрим сначала случай $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$. Так как справедливы соотношения (3.117), то для оценки $|\mathcal{H}_m(g_i,\lambda)|$ сверху, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Лемма 3.37. *Если* $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+$ *и* $|\lambda|\gg 1$, *то существует константа* $C(\varepsilon)>0$, *зависящая от параметров о.-ф.* $L^1(\lambda)$, *такая, что при* $n-k\leqslant l$ *и выполнении условий* (3.107) *имеет место оценка*

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^n\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|, \tag{3.121}$$

а при $n-k\geqslant l$ *и выполнении условий* (3.108) — *оценка*

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^n\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|. \tag{3.122}$$

Доказательство. Подставляя (3.119)–(3.120) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители $\lambda^{\varkappa_i}$ из i-й строки, получим представление

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{i=1}^n\varkappa_i}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln}\\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn}\end{vmatrix}. \tag{3.123}$$

Рассмотрим два подслучая: $n-k \leqslant l$ и $n-k \geqslant l$.

1). Пусть $n-k \leqslant l$ или, что то же самое, $n-l \leqslant k$.

Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (3.107). Получим при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k-n+l+1}^{k}\omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}}[1]_\varepsilon. \quad (3.124)$$

Таким образом, в случае выполнения условий (3.107) при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (3.121).

2). Пусть $n-k \geqslant l$ или, что то же самое, $n-l \geqslant k$.

Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (3.108). Получим при $|\lambda| \gg 1$, аналогично (3.124),

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu} \det(a_{\sigma j})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} \det(b_{\sigma j})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}}[1]_\varepsilon.$$

Таким образом, в случае выполнения условий (3.108) при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку (3.122). $\square$

Оценим теперь $H_m(g_i,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, сверху.

В соответствии с формулой (3.116) для $H(g_i,\lambda)$, после вынесения множителя λ^{m-1} из i-й строки и разложения оставшегося определителя по элементам этой строки получим формулу

$$H_m(g_i,\lambda) = \lambda^{m-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi, \quad (3.125)$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$. Аналогично формуле (3.123), получим представление

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\times$$

$$\times\left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{lk} & a_{l,k+1} & \dots & a_{ln} \\ e^{\lambda\omega_1}b_{l+1,1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{l+1,k} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{l+1,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{l+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda\omega_1}b_{n1} & \dots & e^{\lambda\omega_k}b_{nk} & e^{\lambda\omega_{k+1}}b_{n,k+1} & \dots & e^{\lambda\omega_n}b_{nn} \end{matrix}\right|_{ij}, \quad (3.126)$$

где индекс «ij» у определителя означает, что в этом определителе отсутствует i-я строка и j-й столбец.

Лемма 3.38. *Если* $|\lambda| \gg 1$, *то в случае* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$
а) при $n-k<l$ *и* $i=\overline{l+1,n}$ *справедлива оценка*

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|; \tag{3.127}$$

б) при $n-k=l$ *и* $i=\overline{1,n}$ *справедлива та же оценка* (3.127);
в) при $n-k>l$ *и* $i=\overline{1,l}$ *справедлива оценка*

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{n-l}\omega_\nu}\right|; \tag{3.128}$$

г) при $n-k=l$ *и* $i=\overline{1,n}$ *справедлива та же оценка* (3.128).

Замечание 3.39. В случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n-k<l$ и $i=\overline{1,l}$ вместо оценки (3.127) имеет место не улучшаемая оценка

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет установить, что к.п.ф. $g_i(x,\lambda)$ удовлетворяют условию (α). Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ при $n-k>l$ и $i=\overline{l+1,n}$. □

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: а) $n-k<l$; б) $n-k=l$; в) $n-k>l$.

а). Пусть $n-k<l$ или $n-l<k$. Предположим $i=\overline{l+1,n}$. Возможны два подслучая $1 \leqslant j \leqslant k$ и $k+1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $1 \leqslant j \leqslant k$. В этом подслучае разложим определитель в (3.126) по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1 \leqslant k-1$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $n-l-1$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k в случае $1 \leqslant j \leqslant k+l+1-n$ и с номерами от $k+l+1-n$ до $j-1$ и от $j+1$ до k в случае $k+l+2-n \leqslant j \leqslant k$.

Следовательно, аналогично выводу формулы (3.124), получим следующие формулы:

(i) если $1 \leqslant j \leqslant k+l+1-n$, то при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \times$$
$$\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,k+l+1-n};\overline{k+1,n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right).$$

Таким образом, в этом случае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \right|. \tag{3.129}$$

(ii) если $k+l+2-n \leqslant j \leqslant k$, то при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k} \omega_\nu - \omega_j \right)} \times$$
$$\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+1-n,j-1};\overline{j+1,k}} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right).$$

Таким образом, в этом случае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k} \omega_\nu - \omega_j \right)} \right|. \tag{3.130}$$

Пусть теперь $k+1 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае разложим определитель в (3.126) также по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как $n-l-1 < k$, то главная часть есть член, который равен произведению минора l-го порядка на алгебраическое дополнение $n-l-1$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $k+l+2-n$ до k.

Следовательно, аналогично случаю (i), получим следующие формулы:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \pm \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \times$$
$$\times \left(\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,k+l+1-n};\overline{k+1,j-1};\overline{j+1,n}} \det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{k+l+2-n,k}} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right).$$

Таким образом, в этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь следующую оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n} \varkappa_\sigma - \varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=k+l+2-n}^{k} \omega_\nu} \right|. \tag{3.131}$$

Подставим найденные оценки (3.129)–(3.131) в (3.125). В результате получим при $|\lambda| \gg 1$ и $i = \overline{l+1,n}$

$$\Delta_i(\lambda) = O_\varepsilon\left(|\lambda|^{m-1+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right| \times\right.$$
$$\times\left(\sum_{j=1}^{k+l+1-n}\left|e^{\lambda(\omega_j-\omega_{k+l+1-n})}\right|\left|\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right| + \right.$$
$$+\sum_{j=k+l+2-n}^{k}\left|\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right| +$$
$$\left.\left.+\sum_{j=k+1}^{n}\left|e^{-\lambda\omega_{k+l+1-n}}\right|\left|\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi\right|\right)\right). \quad (3.132)$$

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi, \quad j = \overline{1,k}.$$

Пусть $\lambda = re^{i\psi}$, $\varphi \in (0,\pi])$ (случай $\varphi \in (-\pi,0)$ рассматривается аналогично) и, например,

$$\psi \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2},\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right]$$

(если

$$\psi \in \left[\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right],$$

то интегралы оцениваются аналогичным образом).

Используя неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что

$$\frac{\pi}{2}-\psi \in \left[\frac{\varphi}{2}-\varepsilon,\frac{\varphi}{2}\right] \subset \left(0,\frac{\pi}{2}\right],$$

а, следовательно,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) \geqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right),$$

получим для $j = \overline{1,k}$ и $|\lambda| \gg 1$

$$\left|\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}\,d\xi\right| \leqslant \int\limits_0^1 |h_m(\xi,\lambda)|e^{r\cos\psi\,\omega_1(\xi-1)}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 |h_m(\xi,\lambda)| e^{r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\omega_1(\xi-1)}\,d\xi \leqslant \int\limits_0^1 |h_m(\xi,\lambda)| e^{r\frac{2}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right)\omega_1(\xi-1)}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^1 |h_m(\xi,\lambda)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 e^{r\frac{4}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right)\omega_1(\xi-1)}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^{m-\nu}} \|h_\nu\|_{L_2[0,1]} \frac{1}{\sqrt{r\frac{4}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right)\omega_1}} \left(1-e^{-r\frac{4}{\pi}\left(\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right)\omega_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (3.133)$$

Аналогично, при $j=\overline{k+1,n}$ получим

$$\left|\int\limits_0^1 h_m(\xi,\lambda) e^{\lambda\omega_j\xi}\,d\xi\right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \qquad (3.134)$$

Таким образом, учитывая (3.133) и (3.134) в (3.132), при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь

$$|H(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l+1-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

а это и есть оценка (3.127).

б). Пусть $n-k=l$. В этом случае предыдущие рассуждения полностью проходят с оценкой сверху (3.127) не только при $i=\overline{l+1,n}$, но и при $i=\overline{1,l}$.

в). Пусть $n-k>l$. В этом случае проходят практически дословно рассуждения, аналогичные случаю $n-k<l$, но при $i=\overline{1,l}$, если применять их к определителям $\Delta_{ij}(\lambda)$ (см. формулу (3.125)), представленным в следующем виде:

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i} e^{\lambda\sum\limits_{\beta=1}^{n}\omega_\beta} \left|\begin{matrix} e^{-\lambda\omega_1}a_{11} & \ldots & e^{-\lambda\omega_k}a_{1k} & e^{-\lambda\omega_{k+1}}a_{1,k+1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_n}a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-\lambda\omega_1}a_{l1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_k}a_{lk} & e^{-\lambda\omega_{k+1}}a_{l,k+1} & \ldots & e^{-\lambda\omega_n}a_{ln} \\ b_{l+1,1} & \ldots & b_{l+1,k} & b_{l+1,k+1} & \ldots & b_{l+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & b_{n,k+1} & \ldots & b_{nn} \end{matrix}\right|_{ij}.$$

Применяя к определителю в этой формуле такие же рассуждения, что и в случае $n-k>l$, но предполагая $i=\overline{1,l}$, в итоге получим оценку (3.128).

г). Пусть $n-k=l$. В этом случае рассуждения пункта в) полностью проходят с оценкой сверху (3.128) не только при $i=\overline{1,l}$, но и при $i=\overline{l+1,n}$.

Тем самым, лемма 3.38 доказана. $\square$

2. Рассмотрим теперь случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$.

Лемма 3.40. *Если* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ *и* $|\lambda| \gg 1$, *то существует константа* $C(\varepsilon) > 0$, *зависящая от параметров о.-ф.* $L^1(\lambda)$, *такая, что при* $k \leqslant l$ *и выполнении условий* (3.109) *имеет место оценка*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_\nu}\right|, \tag{3.135}$$

а при $k \geqslant l$ *и выполнении условий* (3.110) — *оценка*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=k+1}^{n}\omega_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|. \tag{3.136}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая: $k \leqslant l$ и $k \geqslant l$. .

1). Пусть $k \leqslant l$ или, что то же самое, $n-l \leqslant n-k$.

Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ (см. формулу (3.123)) по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно выполнения условий (3.109). В результате при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i}e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_\nu}\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}}[1]_\varepsilon. \tag{3.137}$$

Таким образом, в случае выполнения условий (3.109) при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (3.135).

2). Пусть $k \geqslant l$ или, что то же самое, $n-l \geqslant n-k$.

Раскладываем определитель $\Delta(\lambda)$ (см. формулу (3.123)) по первым l строкам, выделяем главный член, требуя отличия от нуля соответствующих определителей, а именно, выполнения условий (3.110). В результате при $|\lambda| \gg 1$, по аналогии с (3.137), будем иметь

$$\Delta(\lambda) = \pm\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_i}e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=k+1}^{n}\omega_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\det(a_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}}\det(b_{\sigma\tau})_{\sigma=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}}[1]_\varepsilon.$$

Таким образом, в случае выполнения условий (3.110) при $|\lambda| \gg 1$ получим оценку снизу (3.136). □

Оценим теперь $H_m(g_i,\lambda)$, $i=\overline{1,n}$ сверху. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.41. *Если* $|\lambda| \gg 1$, *то в случае* $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$

а) при $k < l$ и $i = \overline{l+1,n}$ справедлива оценка

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_\nu}\right|; \tag{3.138}$$

б) при $k = l$ и $i = \overline{1,n}$ справедлива та же оценка (3.138)*;*
в) при $k > l$ и $i = \overline{1,l}$ справедлива оценка

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=k+1}^{n}\omega_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{k-l}\omega_\nu\right)}\right|; \tag{3.139}$$

г) при $k = l$ и $i = \overline{1,n}$ справедлива та же оценка (3.139).

Замечание 3.42. В случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k < l$ и $i = \overline{1,l}$ вместо оценки (3.138) имеет место не улучшаемая оценка

$$|H_m(g_i,\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{m-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_\sigma-\varkappa_i}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=k+l-n}^{k}\omega_\nu}\right|,$$

которая не позволяет установить, что к.п.ф. $g_i(x,\lambda)$ удовлетворяют условию (α). Аналогично обстоит дело в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ при $k > l$ и $i = \overline{l+1,n}$. □

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство соответствующей леммы 3.38. Поэтому не приводим подробностей. □

На основании формул (3.117) и лемм 3.37–3.38 и 3.40–3.41 получим, что при условиях а) и б) к.п.ф. $g_i(x,\lambda)$ удовлетворяют условию (α) и при этом выполняются оценки (3.118) при соответствующих значениях i. Таким образом, лемма 3.36 полностью доказана. □

Из замечаний 3.39 и 3.42 следует важный вывод:

Замечание 3.43. В случае

$$[k,n-k]_- < l < [k,n-k]_+ \tag{3.140}$$

нельзя гарантировать, что $g_i(x,\lambda) \in (\alpha)$ при каких-то $i \in \{1,n\}$. Т. е., с использованием классических п.ф. $g_i(x,\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, установить кратную полноту системы к.ф. $L^1(\lambda)$ на данный момент, вообще говоря, не представляется возможным.

Эта ситуация ранее не была отмечена при исследовании кратной полноты системы к.ф. $L^1(\lambda)$. □

3.6.2.2 Доказательства теорем 3.26–3.28 о кратной полноте к.ф.

Доказательство теоремы 3.26. Пусть выполняются предположения теоремы 3.26, а именно: $[k,n-k]_+ \leqslant l$, и выполняются условия (3.107) и (3.109).

Положим $m = 2(n-l)$ и проведём рассуждения в соответствии со схемой ДКП системы к.ф. $L^1(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Предположим в.-ф. $h(x) := (h_1(x),\ldots,h_m(x))^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (3.114). Тогда, в силу (3.115), все особенности мероморфных функций $\mathcal{H}(\tilde{g}_i,\lambda)$, $i = \overline{l+1,n}$, устранимы, и эти функции, тем самым, являются целыми аналитическими функциями.

На основании соотношений (3.117), оценок (3.118) и принципа Фрагмена-Линделёфа, в случаях, когда $m-2-\varkappa_i \geqslant 0$, функции $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda)$ есть полиномы степени не выше $m-2-\varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\zeta_{i0},h\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\zeta_{i1},h\big) + \cdots + \big(\zeta_{i,m-2-\varkappa_i},h\big),$$

где $\zeta_{i\nu}(x) \in L_2^m[0,1]$, $\nu = \overline{0,m-2-\varkappa_i}$, есть вполне определенные в.-ф., а в случаях, когда $m-2-\varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

В случаях, когда $m-2-\varkappa_i \geqslant 0$, в дефектном подпространстве производных m-цепочек выберем подпространство $\mathfrak{H}_m$, ортогональное в.-ф. $\zeta_{i\nu}(x)$, $\nu = \overline{0,m-2-\varkappa_i}$. Очевидно, что число таких линейно независимых функций не превосходит числа $d_1 = \sum_{i=l+1}^{n}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Если будет показано, что предположение $h(x) \in \mathfrak{H}_m$ влечет $h(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, то тем самым будет доказана m-кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.-ф. оператор-функции $L^1(\lambda)$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_1.

Итак, пусть $h \in \mathfrak{H}_m$. Тогда $\mathcal{H}(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv 0$, $i = \overline{l+1,n}$, и следовательно, с учётом (3.115),

$$H_m(\tilde{g}_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{m} \lambda^{j-1}\tilde{g}_i(x,\lambda)\bar{h}_j(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1,n}. \tag{3.141}$$

В силу утверждения 3.34, система функций $\tilde{g}_{l+1}(x),\ldots,\tilde{g}_n(x)$ есть система линейно независимых решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющих краевым условиям (3.104) в точке 0.

Следовательно, из (3.141) получим тождество

$$\int_0^1 y(x,\lambda)\sum_{j=1}^{m}\lambda^{j-1}\overline{h}_j(x)\,dx\equiv 0 \tag{3.142}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell(y,\lambda)=0$, удовлетворяющего краевым условиям (3.104) в точке 0.

Так как система (3.112) является ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda)=0$, то можно искать упомянутое выше решение $y(x,\lambda)$ в виде

$$y(x,\lambda)=d_1e^{\lambda\omega_1x}+d_2e^{\lambda\omega_2x}+\cdots+d_ne^{\lambda\omega_nx}. \tag{3.143}$$

Удовлетворяя краевые условия (3.104) в точке 0, будем иметь следующую однородную систему l линейных уравнения для нахождения d_j

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}d_j=0,\quad i=\overline{1,l}. \tag{3.144}$$

Учитывая (3.142)–(3.143), получим следующие тождества

$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 d_je^{\lambda\omega_jx}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}\overline{h}_\beta(x)\,dx\equiv 0 \tag{3.145}$$

для любого решения $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ системы (3.144).

Запишем систему (3.144) в виде

$$\sum_{j=1}^{k-n+l}a_{ij}d_j+\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}d_j=-\sum_{j=k-n+l+1}^{k}a_{ij}d_j,\quad i=\overline{1,l}. \tag{3.146}$$

Если считать неизвестные $d_{k-n+l+1}$, …, d_k в правой части системы (3.146) свободными, то, в силу первого предположения в (3.107), оставшиеся неизвестные d_1, …, d_{k-n+l}, $d_{k+1},\ldots,d_n$ могут быть однозначно определены через $d_{k-n+l+1}$, …, d_k.

Следовательно, существует такое множество решений

$$(d_{11}^i,d_{12}^i,\ldots,d_{1n}^i),\quad i=\overline{1,n-l},$$

системы (3.144), для которого

$$G_1=\begin{vmatrix} d_{1,k-n+l+1}^1 & \ldots & d_{1k}^1\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ d_{1,k-n+l+1}^{n-l} & \ldots & d_{1k}^{n-l}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{3.147}$$

Для этого множества решений системы (3.144) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{1} d_{1j}^{i} e^{\lambda\omega_j x}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}\bar{h}_{\beta}(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{1,n-l}.$$

Учитывая предположение (3.106) о расположении характеристик, согласно принципу Фрагмена-Линделефа, отсюда получим тождества

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{0}^{1} d_{1j}^{i} e^{\lambda\omega_j x}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}\bar{h}_{\beta}(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{1,n-l}, \tag{3.148}$$

предполагая дополнительно ортогональность в.-ф. $h(x)$ некоторому конечному набору в.-ф.

Запишем теперь систему (3.144) в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}d_j=-\sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}d_j,\quad i=\overline{1,l}.$$

Если считать неизвестные $d_{l+1},\ldots,d_n$ в правой части этой системы свободными, то, в силу первого предположения в (3.109), оставшиеся неизвестные $d_1,\ldots,d_l$ могут быть однозначно определены через $d_{l+1},\ldots,d_n$.

Следовательно, существует такое множество решений

$$(d_{21}^{i},d_{22}^{i},\ldots,d_{2n}^{i}),\quad i=\overline{n-l+1,m}\quad (\text{ здесь } m=2(n-l))$$

системы (3.144), для которого

$$G_2=\begin{vmatrix} d_{2,l+1}^{n-l+1} & \ldots & d_{2n}^{n-l+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ d_{2,l+1}^{m} & \ldots & d_{2n}^{m}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{3.149}$$

Для этого множества решений системы (3.144) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{1} d_{2j}^{i} e^{\lambda\omega_j x}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}\bar{h}_{\beta}(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{n-l+1,m}.$$

Как и перед этим, учитывая предположение (3.106) о расположении характеристик, согласно принципу Фрагмена-Линделефа отсюда получим тождества

$$\sum_{j=k+1}^{n}\int_{0}^{1} d_{2j}^{i} e^{\lambda\omega_j x}\sum_{\beta=1}^{m}\lambda^{\beta-1}\bar{h}_{\beta}(x)\,dx\equiv 0,\quad i=\overline{n-l+1,m}, \tag{3.150}$$

предполагая дополнительно ортогональность в.-ф. $h(x)$ некоторому конечному набору в.-ф.

Раскладывая $\exp(\lambda\omega_j x)$ в ряд по степеням λ и подставляя эти разложения в (3.148) и (3.150), получим для левых частей (3.148) и (3.150) разложения в ряды по степеням λ. Так как соотношения (3.148) и (3.150) являются тождествами, то коэффициенты этих рядов равны нулю.

Таким образом, при всех достаточно больших $N \in \mathbb{N}$ получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^i \omega_j^N H_{1N} + \quad \ldots \quad + \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^i \omega_j^{N-m+1} H_{N-m+1,N} = 0, \quad i = \overline{1,n-l}, \\ \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^i \omega_j^N H_{1N} + \ \ldots \ + \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^i \omega_j^{N-m+1} H_{N-m+1,N} = 0, \quad i = \overline{n-l+1,m}, \end{cases} \tag{3.151}$$

m линейных уравнений с m неизвестными

$$H_{1N} := \frac{1}{N!} \int\limits_0^1 x^N \bar{h}_1(x)\, dx, \ldots, H_{N-m+1,N} := \frac{1}{(N-m+1)!} \int\limits_0^1 x^{N-m+1} \bar{h}_m(x)\, dx.$$

Покажем, что определитель системы (3.151) отличен от нуля. Проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям [60; 62] с учетом специфики рассматриваемого случая.

Матрицу системы представим следующим образом

$$\mathcal{A}_N = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^1 \omega_j^N & \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^1 \omega_j^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^1 \omega_j^{N-m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^{n-l} \omega_j^N & \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^{n-l} \omega_j^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{k} d_{1j}^{n-l} \omega_j^{N-m+1} \\ \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^{n-l+1} \omega_j^N & \sum\limits_{l=k+1}^{n} d_{2j}^{n-l+1} \omega_j^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^{n-l+1} \omega_j^{N-m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^m \omega_j^N & \sum\limits_{l=k+1}^{n} d_{2j}^m \omega_j^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{2j}^m \omega_j^{N-m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}^1 & \dots & d_{1k}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{11}^1 & \dots & d_{1k}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,k+1}^{n-l+1} & \dots & d_{2n}^{n-l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,k+1}^{m} & \dots & d_{2n}^{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^N & \dots & \omega_1^{N-m+1} \\ \omega_2^N & \dots & \omega_2^{N-m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_n^N & \dots & \omega_n^{N-m+1} \end{pmatrix} = \mathcal{D}\Omega_N.$$

Для нахождения определителя матрицы $\mathcal{A}_N$ воспользуемся формулой Бине-Коши

$$\det \mathcal{A}_N \ = \sum_{1\leqslant k_1<\dots<k_m\leqslant n} \mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix} \Omega_N \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

Для того, чтобы установить, что $\det \mathcal{A}_N \neq 0$, покажем, что в сумме справа в (3.152) имеется доминирующий член.

Справедливы соотношения

$$\Omega_N \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \big(\omega_{k_1}\dots\omega_{k_m}\big)^{N-m+1} \begin{vmatrix} \omega_{k_1}^{m-1} & \dots & \omega_{k_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{k_m}^{m-1} & \dots & \omega_{k_m} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \big(\omega_{k_1}\dots\omega_{k_m}\big)^{N-m+1}\Omega_{k_1,k_2,\dots,k_m} \neq 0 \quad (3.153)$$

при любых $1 \leqslant k_1 < \dots < k_m$ в силу простоты характеристик (см. (3.106)) и свойства определителя Вандермонда.

Исследуем миноры $\mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$ на предмет отличия их от нуля. Если в этот минор попадают два столбца из разных блоков или два линейно зависимых столбца из одного диагонального блока матрицы $\mathcal{D}$, то этот определитель равен нулю. В силу (3.147) и (3.149) отличными от нуля минорами, в частности, будут миноры, соответствующие последним l столбцам $n-1$-го диагонального блока и последним $n-l$ столбцам 2-го диагонального блока матрицы $\mathcal{D}$. Т. е. отличным от нуля будет минор со столбцами, имеющими номера

$$k-n+l+1,\, k-n+l+2,\, \dots,\, k,\, l+1,\, l+2,\, \dots\, ,n, \quad (3.154)$$

так как

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-l & 1 & 2 & \dots & m \\ k-n+1+1 & k-n+l+2 & \dots & k & l+1 & l+2 & \dots & n \end{pmatrix} =$$

$$= G_1G_2 \neq 0. \quad (3.155)$$

Но из (3.106) видно, что номерам (3.154) соответствует доминирующее произведение $\hat{\omega} := \omega_{k-n+1}\omega_{k-m+2}\dots\omega_k\omega_{l+1}\omega_{l+2}\dots\omega_n$. На основании (3.152)–(3.155) из этого следует представление при $N \gg 1$

$$\det \mathcal{A}_N = \hat{\omega}^{N-m+1} G_1 G_2 \Omega_{k-n+l+1,\dots,k,l+1,\dots,n}\big(1+o(1)\big).$$

Отсюда заключаем, что $\det \mathcal{A}_N \neq 0$ при $N \gg 1$.

Следовательно, однородная система (3.151) имеет только тривиальное решение, то есть $H_{sN} = 0$, $s = \overline{1,m}$, при всех $N \geqslant N_0$, где N_0 достаточно большое число, или

$$(\forall N \geqslant N_0) \quad \int\limits_0^1 \bar{h}_s(x) x^{N-s+1}\,dx = 0, \quad s = \overline{1,m}.$$

Т. е. равны нулю все достаточно большие последовательные моменты функций $\bar{h}_s(x)$, $s = \overline{1,m}$.

По теореме Мюнца [56] отсюда получим, что $\bar{h}_s(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, $s = \overline{1,m}$. Поэтому, $\bar{h}(x) = 0$, а значит, и $h(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 3.26, система к.ф. рассматриваемой о.-ф. $L^1(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ (здесь $m = 2(n-l)$) с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_1.

Тем самым, теорема 3.26 полностью доказана. □

Замечание 3.44. Отметим, что при $m = n$ или, что то же самое, при $n = 2k = 2l$, в случае, когда $\varkappa_i \leqslant n-1$ при $i = \overline{1,n}$, дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае справедлива лемма 3.20. □

Доказательство теоремы 3.27. Пусть выполняются предположения теоремы 3.27, а именно: $l \leqslant [k,n-k]_-$, и выполняются условия (3.108) и (3.109).

Положим $m = 2l$ и проведём рассуждения в соответствии со схемой ДКП системы к.ф. $L^1(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Пусть в.-ф. $h(x) := (h_1(x),\dots h_m(x))^T \in L_2^m[0,1]$ и ортогональна всем производным m-цепочкам (3.114). Тогда, в силу (3.115), все особенности мероморфных функций $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda)$, $i = \overline{1,l}$, устранимы и они, тем самым, являются целыми функциями.

На основании соотношений (3.117), оценок (3.118) и принципа Фрагмена-Линделёфа в случаях, когда $m - 2 - \varkappa_i \geqslant 0$, функции $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda)$ есть полиномы степени $m - 2 - \varkappa_i$, которые могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv \lambda^{m-2-\varkappa_i}\big(\zeta_{i0},h\big) + \lambda^{m-3-\varkappa_i}\big(\zeta_{i1},h\big) + \dots + \big(\zeta_{i,m-2-\varkappa_i},h\big),$$

где $\zeta_{i\nu}(x) \in L_2^m[0,1]$, $\nu = \overline{0,m-2-\varkappa_i}$, есть вполне определенные в.-ф., а в случаях, когда $m-2-\varkappa_i < 0$, получим тождества

$$\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv 0.$$

В случаях, когда $m-2-\varkappa_i \geqslant 0$, в дефектном подпространстве производных m-цепочек выберем подпространство $\mathfrak{H}_m$, ортогональное в.-ф. $\zeta_{i\nu}(x)$, $\nu = \overline{0,m-2-\varkappa_i}$. Очевидно, что число таких линейно независимых функций не превосходит числа $d_2 := \sum_{i=1}^{l}[m-1-\varkappa_i]_+$.

Если будет показано, что предположение $h(x) \in \mathfrak{H}_m$ влечет $h(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, то тем самым будет доказана m-кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.-ф. оператор-функции $L^1(\lambda)$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_2.

Итак, пусть $h(x) \in \mathfrak{H}_m$. Тогда $\mathcal{H}_m(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv 0$, $i = \overline{1,l}$ и, следовательно, в силу (3.115)

$$H_m(\tilde{g}_i,\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{m} \lambda^{j-1}\tilde{g}_i(x,\lambda)\bar{h}_j(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{1,l}. \tag{3.156}$$

На основании утверждения 3.34, система функций $\tilde{g}_1(x),\ldots,\tilde{g}_l(x)$ есть система линейно независимых решений уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющих краевым условиям (3.105) в точке 1.

Следовательно, из (3.156) получим тождество

$$\int\limits_0^1 y(x,\lambda) \sum_{j=1}^{m} \lambda^{j-1}\bar{h}_j(x)\,dx \equiv 0 \tag{3.157}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющего краевым условиям (3.105) в точке 1.

Ищем эти решения в виде линейной комбинации другой ф.с.р. уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$ (как раз в этом и состоит одно из главных отличий доказательства теоремы 3.27 от доказательства теоремы 3.26)

$$y(x,\lambda) = \hat{d}_1 e^{\lambda\omega_1(x-1)} + \hat{d}_2 e^{\lambda\omega_2(x-1)} + \cdots + \hat{d}_n e^{\lambda\omega_n(x-1)}. \tag{3.158}$$

Удовлетворяя краевые условия (3.105) в точке 1, получим следующую однородную систему $n-l$ линейных алгебраических уравнений для нахождения

неизвестных $\hat{d}_j$
$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\hat{d}_j = 0, \quad i = \overline{l+1,n}. \tag{3.159}$$

Учитывая (3.157)–(3.158), получим следующие тождества
$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \hat{d}_j e^{\lambda\omega_j(x-1)} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1}\bar{h}_\beta(x)\,dx \equiv 0 \tag{3.160}$$
для любого решения $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ системы (3.159).

Запишем систему (3.159) в виде
$$\sum_{j=1}^{n-l} b_{ij}\hat{d}_j = -\sum_{j=n-l+1}^{n} b_{ij}\hat{d}_j, \quad i = \overline{l+1,n}. \tag{3.161}$$

Если считать неизвестные $\hat{d}_{n-l+1}$, $\ldots$, $\hat{d}_n$ в правой части системы (3.161) свободными, то в силу второго предположения в (3.108) оставшиеся неизвестные $\hat{d}_1$, $\ldots$, $\hat{d}_{n-l}$, могут быть однозначно определены через $\hat{d}_{n-l+1}$, $\ldots$, $\hat{d}_n$.

Следовательно, существует такое множество решений
$$(\hat{d}^i_{11},\hat{d}^i_{12},\ldots,\hat{d}^i_{1n}), \quad i = \overline{1,l},$$
системы (3.159), для которого
$$\widehat{G}_1 = \begin{vmatrix} \hat{d}^1_{1,n-l+1} & \ldots & \hat{d}^1_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{d}^l_{1,n-l+1} & \ldots & \hat{d}^l_{1n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.162}$$

Для этого множества решений системы (3.159) справедливы тождества
$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \hat{d}^i_{1j} e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1}\bar{h}_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{1,l}.$$

Учитывая предположение (3.106) о расположении характеристик, согласно принципу Фрагмена-Линделефа, отсюда получим тождества
$$\sum_{j=k+1}^{n} \int_0^1 \hat{d}^i_{1j} e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1}\bar{h}_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{3.163}$$

предполагая дополнительно ортогональность в.-ф. $h(x)$ некоторому конечному набору в.-ф.

Запишем теперь систему (3.159) в виде

$$\sum_{j=1}^{k-l} b_{ij}\hat{d}_j + \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij}\hat{d}_j = -\sum_{j=k-l+1}^{k} b_{ij}\hat{d}_j, \quad i=\overline{l+1,n}.$$

Если считать неизвестные $\hat{d}_{k-l+1}, \ldots, \hat{d}_k$ в правой части этой системы свободными, то в силу второго предположения в (3.110) оставшиеся неизвестные $\hat{d}_1, \ldots, \hat{d}_{k-l}, \hat{d}_{k+1}, \ldots, \hat{d}_n$ могут быть однозначно определены через неизвестные $\hat{d}_{k-l+1}, \ldots, \hat{d}_k$. Следовательно, существует такое множество решений

$$(\hat{d}^i_{21},\hat{d}^i_{22},\ldots,\hat{d}^i_{2n}), \quad i=\overline{l+1,m}\ (m=2l),$$

системы (3.159), для которого

$$\widehat{G}_2 = \begin{vmatrix} \hat{d}^{l+1}_{2,k-l+1} & \ldots & \hat{d}^{l+1}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{d}^{m}_{2,k-l+1} & \ldots & \hat{d}^{m}_{2k} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.164}$$

Для этого множества решений системы (3.159) справедливы тождества

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \hat{d}^i_{2j} e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1}\overline{h}_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{1,l}.$$

Учитывая предположение (3.106) о расположении характеристик, согласно принципу Фрагмена-Линделефа отсюда, получим тождества

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_0^1 \hat{d}^i_{2j} e^{\lambda\omega_j x} \sum_{\beta=1}^{m} \lambda^{\beta-1}h_\beta(x)\,dx \equiv 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{3.165}$$

предполагая дополнительно ортогональность в.-ф. $h(x)$ некоторому конечному набору в.-ф.

Завершая рассуждения совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.26, и используя соотношения (3.162)–(3.165) вместо соотношений (3.147)–(3.150), приходим к выводу, что $h_j(x)=0$, $j=\overline{1,m}$, для п.в. $x\in[0,1]$.

Следовательно, в случае выполнения условий теоремы 3.27, система к.ф. рассматриваемой о.-ф. $L^1(\lambda)$ m-кратно полна в $L_2[0,1]$ (здесь $m=2l$) с возможным конечным дефектом, не превышающим числа d_2.

Тем самым, теорема 3.27 полностью доказана. $\square$

Замечание 3.45. Отметим, что при $m = n$ или, что то же самое, при $n = 2k = 2l$, в случае, когда $\varkappa_i \leqslant n-1$ при $i = \overline{1,n}$, дефект системы к.ф. будет равен нулю, так как в этом случае справедлива лемма 3.20. □

Доказательство теоремы 3.28. Справедливость теоремы 3.28 вытекает из утверждений теорем 3.26 и 3.27 при $n = 2k = 2l$ и замечаний 3.44 и 3.45. □

3.6.3 Примеры использования теорем 3.26 и 3.27

3.6.3.1 Пример оператор-функции 5-го порядка, обладающей 4-кратной полнотой системы корневых функций с возможным конечным дефектом

Исследуем кратную полноту системы к.ф. оператор-функции

$$y^{(5)}-(7+4i)\lambda y^{(4)}+(11+28i)\lambda^2 y'''+(13-56i)\lambda^3 y''+(32i-42)\lambda^4 y'+24\lambda^5 y, \quad (3.166)$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (3.167)$$

Для рассматриваемой о.-ф. $n = 5$, $l = 3$ и

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = i, \quad \omega_5 = 3i, \quad (3.168)$$

т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k,n-k]_+ = \max\{3,2\} = 3 = l$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 3.26. Для этого нужно проверить выполнение условий (3.107) и (3.109).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (3.167) и (3.104)–(3.105) следует, что для рассматриваемой о.-ф.

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1, \quad \varkappa_3 = 2, \quad \varkappa_4 = 0, \quad \varkappa_5 = 1;$$

$$\alpha_{100} = \alpha_{210} = 1, \alpha_{201} = 0, \alpha_{320} = 1, \alpha_{311} = \alpha_{302} = 0, \beta_{400} = \beta_{510} = 1, \beta_{501} = 0.$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1, \quad a_{2j} = \omega_j, \quad a_{3j} = \omega_j^2, \quad b_{4j} = 1, \quad b_{5j} = \omega_j, \quad j = \overline{1,5},$$

т. е.

$$\begin{array}{lllll} a_{11}=1, & a_{12}=1, & a_{13}=1, & a_{14}=1, & a_{15}=1; \\ a_{21}=1, & a_{22}=2, & a_{23}=4, & a_{24}=i, & a_{25}=3i; \\ a_{31}=1, & a_{32}=4, & a_{33}=16, & a_{34}=-1, & a_{35}=-9; \\ b_{41}=1, & b_{42}=1, & b_{43}=1, & b_{44}=1, & b_{45}=1; \\ b_{51}=1, & b_{52}=2, & b_{53}=4, & b_{54}=i, & b_{55}=3i. \end{array}$$

Для определителей (3.107) и (3.109) справедливы соотношения

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,k+l-n};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & 3i \\ 1 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 8-4i \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{k+l-n+1,k}} = \begin{vmatrix} b_{42} & b_{43} \\ b_{52} & b_{53} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}} = \begin{vmatrix} b_{44} & b_{45} \\ b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ i & 3i \end{vmatrix} = 2i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемой о.-ф. (3.166)–(3.167) все условия теоремы 3.26 выполнены. Так как в данном случае $m = 2(n-l) = 2(5-3) = 4$ и

$$d_1 = [m-1-\varkappa_4]_+ + [m-1-\varkappa_5]_+ = [3-0]_+ + [3-1]_+ = 3+2 = 5,$$

то на основании этой теоремы получим, что система к.ф. оператор-функции (3.166)–(3.167) 4-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не превышающим числа 5.

3.6.3.2 Пример оператор-функции 5-го порядка, обладающей 2-кратной полнотой системы корневых функций с возможным конечным дефектом

Исследуем теперь кратную полноту системы к.ф. оператор-функции, порожденной тем же д.в. (3.166), но другими краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0. \tag{3.169}$$

Для рассматриваемой оператор-функции $n = 5$, $l = 1$ и характеристики определяются формулами (3.178), т. е. характеристики лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k = 3$ и $n - k = 2$.

Так как $[k,n-k]_+ = \min\{3,2\} = 2 \geqslant l = 1$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 3.27. Для этого нужно проверить выполнение условий условия (3.108) и (3.110).

Подсчитаем параметры a_{ij} и b_{ij}. Из вида краевых условий (3.169) и (3.104)–(3.105) следует, что для рассматриваемой о.-ф.

$$\varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = 0,\ \varkappa_3 = 1,\ \varkappa_4 = 2,\ \varkappa_5 = 3;$$
$$\alpha_{100} = 1,\ \beta_{200} = \beta_{310} = 1,\ \beta_{301} = 0,\ \beta_{420} = 1,\ \beta_{411} = \beta_{402} = 0,$$
$$\beta_{530} = 1,\ \beta_{521} = \beta_{512} = \beta_{503} = 0.$$

Таким образом,

$$a_{1j} = 1,\ b_{2j} = 1,\ b_{3j} = \omega_j,\ b_{4j} = \omega_j^2,\ b_{5j} = \omega_j^3, \quad j = \overline{1,5},$$

т. е.

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} = 1, & a_{12} = 1, & a_{13} = 1, & a_{14} = 1, & a_{15} = 1; \\
b_{21} = 1, & b_{22} = 1, & b_{23} = 1, & b_{24} = 1, & b_{25} = 1; \\
b_{31} = 1, & b_{32} = 2, & b_{33} = 4, & b_{34} = i, & b_{35} = 3i; \\
b_{41} = 1, & b_{42} = 4, & b_{43} = 16, & b_{44} = -1, & b_{45} = -9; \\
b_{51} = 1, & b_{52} = 8, & b_{53} = 64, & b_{54} = -i, & b_{55} = -27i.
\end{array}$$

Для определителей (3.108) и (3.110) справедливы соотношения

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}} = \det(a_{15}) = \det(1) = 1 \neq 0;$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & i \\ 1 & 4 & 16 & -1 \\ 1 & 8 & 64 & -i \end{vmatrix} = -6 + 78i \neq 0;$$

$$\det(a_{ij})_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{k-l+1,k}} = \det(a_{13}) = \det(1) = 1 \neq 0;$$

$$\det(b_{ij})_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,k-l};\overline{k+1,n}} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & i & 3i \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 1 & 8 & -i & -27i \end{vmatrix} = -24 - 68i \neq 0.$$

Следовательно, для рассматриваемой о.-ф. (3.166), (3.169) все условия теоремы 3.27 выполнены. Так как в данном случае $m = 2l = 2 \cdot 1 = 2$ и $d_2 = [m-1-\varkappa_1]_+ = [1-0]_+ = 1$, то на основании этой теоремы получим, что система к.ф. оператор-функции (3.166), (3.169) 2-х кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом не больше 1.

3.6.4 Доказательство теоремы 3.29 о кратной полноте корневых функций с помощью обобщённых порождающих функций

Доказательство теоремы 3.29. Пусть выполняются предположения теоремы 3.29, а именно: справедливы неравенства 3.111 и главные вершины многоугольника M_{n-l} принадлежат х.м. M_Δ.

Рассмотрим, например, случай $[k,n-k]_+ = k$. В случае $[k,n-k]_+ = n-k$ рассуждения проводятся аналогично.

Для доказательства воспользуемся схемой ДКП системы к.ф. оператор-функции $L^1(\lambda)$. Так как в рассматриваемом случае, в соответствии с замечанием 3.43, классические п.ф., вообще говоря, не удовлетворяют условию (α), то будем искать обобщённые п.ф., которые удовлетворяют условию (α).

В качестве $\Gamma(\lambda)$ будем брать вектор-столбцы $V_j^1(\lambda)$ и $W_k^1(\lambda)$, которые определяются аналогичными (3.9)–(3.10) формулами

$$V_j^1(\lambda) + e^{\lambda\omega_j}W_j^1(\lambda) := (U_1^1(y_j,\lambda), U_2^1(y_j,\lambda), \ldots, U_n^1(y_j,\lambda))^T, \quad j = \overline{1,n}.$$

Ввиду того, что краевые условия (3.104)–(3.105) распадающиеся, векторы $V_j^1(\lambda)$ и $W_k^1(\lambda)$ имеют следующие структуры

$$V_j^1(\lambda) = (\underbrace{*,\ldots,*}_{l},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-l})^T, \quad W_k^1(\lambda) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{l},\underbrace{*,\ldots,*}_{n-l})^T. \tag{3.170}$$

где звездочками обозначены компоненты, которые могут быть отличными от нуля.

С использованием этих обозначений х.о. рассматриваемой о.-ф. $L^1(\lambda)$ будет иметь вид (см. (3.11)–(3.12))

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_i^1(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n =$$
$$= \left|V_1^1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1}W_1^1(\lambda), \ldots, V_n^1(\lambda) + e^{\lambda\omega_n}W_n^1(\lambda)\right| = \sum_{\omega\in\Omega} F^\omega(\lambda)e^{\lambda\omega}, \tag{3.171}$$

где коэффициенты $F^{\omega}(\lambda)$ есть определители

$$\left|V_1^1(\lambda),\ldots,V_{j_1-1}^1(\lambda),W_{j_1}^1(\lambda),V_{j_1+1}^1(\lambda),\ldots,V_{j_k-1}^1(\lambda),W_{j_k}^1(\lambda),V_{j_k+1}^1(\lambda),\ldots,V_n^1(\lambda)\right|, \tag{3.172}$$

если $\omega = \omega_{j_1} + \omega_{j_2} + \cdots + \omega_{j_k}$.

Принимая во внимание (3.170) и (3.172), получим, что в сумме (3.171) отличными от нуля будут только те слагаемые, которые соответствуют экспонентам с показателями $\lambda\omega$, где ω являются суммами $n-l$ различных слагаемых из чисел ω_s, $s=\overline{1,n}$.

Отсюда следует, что х.м. рассматриваемой о.-ф. содержится в многоугольнике M_{n-l}. Т. е., для о.-ф. $L^1(\lambda)$ справедливо включение $M_\Delta \subset M_{n-l}$.

Из условия (3.111) доказываемой теоремы следует, что многоугольник M_{n-l}, а значит и х.м. M_Δ, который содержится в многоугольнике M_{n-l}, не касается «коротких» сторон параллелограмма M, т. е. сторон $A'D'$ и $B'C'$ (см. рисунок 3.10).

По предположению доказываемой теоремы точки A, B, C, D многоугольника M_{n-l} принадлежат также и х.м. M_Δ, то есть AB и CD есть общие стороны многоугольников M_Δ и M_{n-l}.

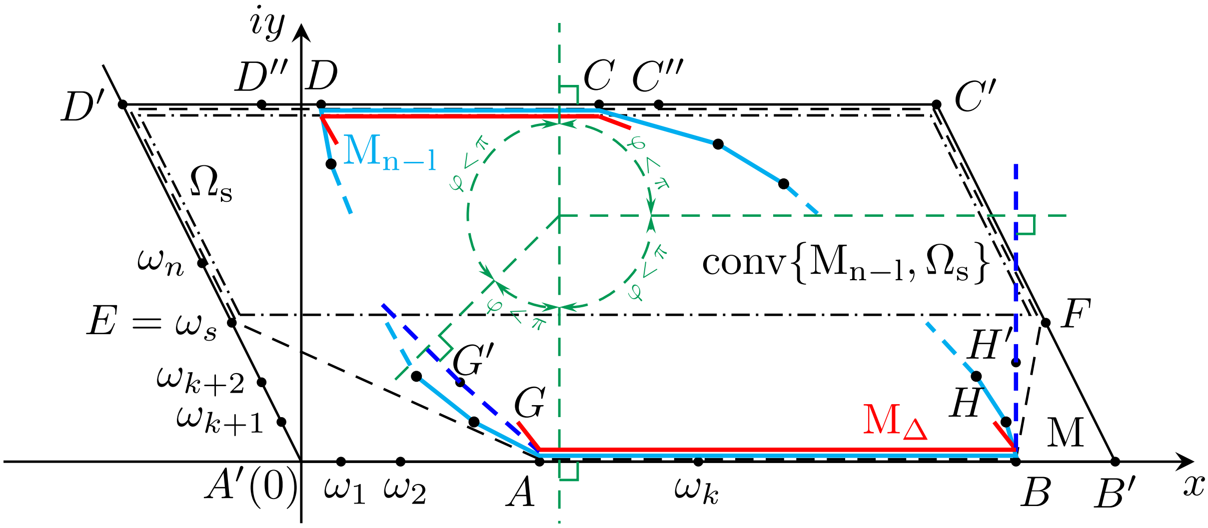

Рисунок 3.10 — Случай $k > n-k$. Многоугольники M_Δ, M_{n-l}, $\mathrm{conv}\{M_{n-l},\Omega_s\}$ и многоугольник M

Лемма 3.46. $V_s^1(\lambda) \in (\alpha)$ *при* $s \in \{k+1,\ldots,n\}$.

Доказательство. Обозначим $E = \omega_s$ и $F = \omega_1 + \cdots + \omega_k + \omega_s$ при любом фиксированном $s \in \{k+1,\ldots,n\}$.

По лемме 3.22 имеем

$$M(V_s^1) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\},$$

где Ω_s — множество всевозможных сумм различных характеристик ω_j, в которых обязательно есть слагаемое ω_s.

Построить многоугольники M_Δ и $M(V_s^1)$ в общем виде невозможно, так как они определяется не только характеристиками, но и конкретными краевыми условия о.-ф. $L^1(\lambda)$. Но так как $M_\Delta \subset M_{n-l}$, то имеем включения

$$M_\Delta \subset M(V_s^1) \subset \mathrm{conv}\{M_\Delta, \Omega_s\} \subset \mathrm{conv}\{M_{n-l}, \Omega_s\}. \tag{3.173}$$

Построим многоугольник $\mathrm{conv}\{M_{n-l}, \Omega_s\}$.

По определению множества Ω_s точка $A' = 0 \notin \Omega_s$. Ясно, что точка E будет самой ближней к точке A' из точек множества Ω_s на отрезке $A'D'$, а точка $D' \in \Omega_s$ — самой дальней от точки A' точкой множества Ω_s на этом отрезке. По определению множества Ω_s точка $B' \notin \Omega_s$. Ясно, что точка F будет самой ближней к точке B' из точек множества Ω_s на отрезке $B'C'$, а точка $C' \in \Omega_s$ — самой дальней от точки B' точкой множества Ω_s на этом отрезке. Таким образом, $\mathrm{conv}\,\Omega_s$ — это параллелограмм $EFC'D'$ (см. рисунок 3.10).

Поэтому, $\mathrm{conv}\{M_{n-l}, \Omega_s\}$ есть многоугольник $ABFC'D'EA$, где линии BF и EA могут быть отрезками или ломаными – это зависит от угла φ между лучами, на которых лежат характеристики, от величин этих характеристик и от значения ω_s.

Следовательно, из (3.173) получим, что сторона AB есть общая сторона M_Δ и $M(V_s^1)$. Кроме того, из (3.173) следует, что многоугольник $M(V_s^1)$ имеет сторону $D''C''$, лежащую на стороне $D'C'$ ($DC \subset D''C'' \subset D'C'$).

Так как сторона AB является общей для M_Δ и $M(V_s^1)$ и других точек из M_Δ и $M(V_s^1)$ на стороне $A'B'$ нет, то точки A и B являются вершинами этих многоугольников, лежащих на стороне $A'B'$. Пусть AG' и AG есть, соответственно, стороны многоугольников $M(V_s^1)$ и M_Δ, исходящих из общей вершины A , а BH и BH' есть, соответственно, стороны многоугольников M_Δ и $M(V_s^1)$. Из включения (3.173) следует, что AG' или совпадает с AG (по направлению) или повернута от AG против часовой стрелки. Аналогично, BH' или совпадает с BH (по направлению) или повернута от BH по часовой стрелки.

Так как многоугольник M_Δ касается сторон AB, AG', BH' и $D''C''$ многоугольника $M(V_s^1)$, а соседние перпендикуляры к этим сторонам из некоторой внутренней точки M_Δ образуют углы $< \pi$, то, таким образом, $V_s^1 \in (\alpha)$. □

Лемма 3.47. *$W_s^1(\lambda) \in (\alpha)$ при $s \in \{k+1,\dots,n\}$.*

Доказательство. По лемме 3.23 имеем

$$M(W_s^1) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^s\},$$

где Ω^s — множество, содержащее точку 0 и всевозможные суммы различных ω_j, среди слагаемых которых нет точки ω_s.

Построить многоугольники M_Δ и $M(W_s^1)$ в общем виде невозможно, так как они определяется не только характеристиками, но и конкретными краевыми условия о.-ф. $L^1(\lambda)$. Но так как $M_\Delta \subset M_{n-l}$, то имеем включения

$$M_\Delta \subset M(W_s^1) \subset \operatorname{conv}\{M_\Delta,\Omega^s\} \subset \operatorname{conv}\{M_{n-l},\Omega^s\}. \tag{3.174}$$

Построим многоугольник $\operatorname{conv}\{M_{n-l},\Omega^s\}$.

Из определения множества Ω^s понятно, что $A' \in \Omega^s$. Пусть P есть самая дальняя от точки $A' = 0$ точка множества Ω^s на отрезке $A'D'$. Ясно, что точка P лежит ближе к A', чем точка D', так как $D' \notin \Omega^s$. Далее, из определения множества Ω^s следует, что точка $B' \in \Omega^s$. Пусть Q есть самая дальняя от точки B' точка множества Ω^s на отрезке $B'C'$. Очевидно, что точка Q лежит ближе к B', чем точка C', так как $C' \notin \Omega^s$. Кроме того, очевидно, что $PQ \parallel A'B'$. Таким образом, $\operatorname{conv}\Omega^s$ — это параллелограмм $A'B'QP$ (см. рисунок 3.11).

Поэтому, $\operatorname{conv}\{M_{n-l},\Omega^s\}$ есть многоугольник $A'B'QCDPA'$, где линии DP и QC могут быть отрезками или ломаными – это зависит от угла φ между лучами, на которых лежат характеристики, от величин этих характеристик и от значения ω_s.

Следовательно, из (3.174) получим, что сторона CD есть общая сторона M_Δ и $M(W_s^1)$. Кроме того, из (3.174) получим, что многоугольник $M(W_s^1)$ имеет сторону $A''B''$, лежащую на стороне $A'B'$ ($AB \subset A''B'' \subset A'B'$).

Так как сторона DC является общей для M_Δ и $M(W_s)$ и других точек из M_Δ и $M(W_s^1)$ на стороне $C'D'$ нет, то точки C и D являются вершинами этих многоугольников, лежащих на стороне $C'D'$. Пусть CS' и CS есть, соответственно, стороны многоугольников $M(W_s^1)$ и M_Δ, исходящих из общей вершины C, а DT и DT' есть, соответственно, стороны многоугольников M_Δ и $M(W_s)$. Из включения (3.174) следует, что CS' или совпадает с CS (по направлению) или повернута от CS против часовой стрелки. Аналогично, DT' или совпадает с DT (по направлению) или повернута от DT по часовой стрелки.

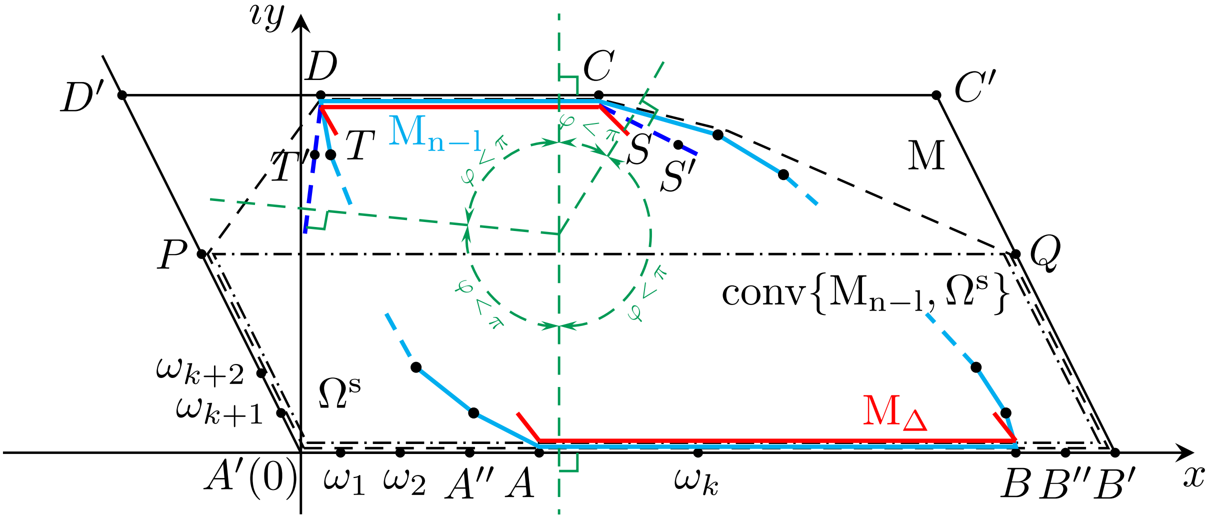

Рисунок 3.11 — Случай $k > n-k$. Многоугольники M_{n-l}, $\mathrm{conv}\{M_{n-l},\Omega^s\}$ и многоугольник M

Так как многоугольник M_Δ касается сторон CD, CS', DT' и $A''B''$ многоугольника $M(W_s^1)$, а соседние перпендикуляры к этим сторонам из некоторой внутренней точки M_Δ образуют углы $< \pi$, то, таким образом, $W_s^1 \in (\alpha)$. □

Так как на основании лемм 3.46 и 3.47 имеются $n-k$ пар $\{V_s^1(\lambda), W_s^1(\lambda)\}$ таких, что $V_s^1(\lambda)$, $W_s^1(\lambda) \in (\alpha)$, то по теореме 3.25 получим, что имеет место $(n-k)$-кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.ф. рассматриваемой о.-ф. с возможным конечным дефектом.

Таким образом, теорема 3.29 полностью доказана. □

3.6.5 Пример использования теоремы 3.29

Исследуем кратную полноту системы к.ф. оператор-функции, порождённой д.в.

$$y^{(5)} - (15+2i)\lambda y^{(4)} + (70+30i)\lambda^2 y''' + (120+140i)\lambda^3 y'' + \\ + (64+240i)\lambda^4 y' - 128 i \lambda^5 y, \quad (3.175)$$

и краевыми условиями

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) - \lambda^2 y(0) = 0, \quad y'''(0) + \lambda y''(0) = 0, \quad (3.176)$$

$$y(1) = 0, \quad y''(1) + \lambda y'(1) = 0 \quad (3.177)$$

Для рассматриваемой о.-ф. $n=5$, $l=3$ и характеристики

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 2, \quad \omega_3 = 4, \quad \omega_4 = 2, \quad \omega_5 = 2i \tag{3.178}$$

лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах $k=4$ и $n-k=1$.

На рисунке 3.12 векторами изображены характеристики и множество M — выпуклая оболочка всевозможных сумм различных характеристик по одному, двум, ..., пяти слагаемых и 0.

Так как $[k,n-k]_- = \min\{4,1\} = 1 < l < [k,n-k]_+ \max\{4,1\} = 4$, то для исследования кратной полноты можно воспользоваться теоремой 3.29.

Построим многоугольники M_Δ и M_{n-l}.

Для х.о. справедлива формула

$$\Delta(\lambda) = \lambda^8 \left|\hat{V}_1 + e^{\lambda\omega_1}\hat{W}_1, \hat{V}_2 + e^{\lambda\omega_2}\hat{W}_2, \hat{V}_3 + e^{\lambda\omega_3}\hat{W}_3, \hat{V}_4 + e^{\lambda\omega_4}\hat{W}_4, \hat{V}_5 + e^{\lambda\omega_5}\hat{W}_5\right| =$$
$$= \lambda^8 \Big(\Delta_0 + e^{\lambda\omega_1}\Delta_1 + e^{\lambda\omega_2}\Delta_2 + e^{\lambda\omega_3}\Delta_3 + e^{\lambda\omega_4}\Delta_4 + e^{\lambda\omega_5}\Delta_5 + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}\Delta_{12} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}\Delta_{13} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)}\Delta_{14} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)}\Delta_{15} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}\Delta_{23} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}\Delta_{24} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)}\Delta_{25} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)}\Delta_{34} + e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)}\Delta_{35} + e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)}\Delta_{45} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}\Delta_{123} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}\Delta_{124} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}\Delta_{125} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}\Delta_{134} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}\Delta_{135} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{145} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_)4}\Delta_{234} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}\Delta_{235} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{245} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{345} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\Delta_{1234} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}\Delta_{1235} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{1245} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{1345} + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{2345} +$$
$$+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}\Delta_{12345}\Big),$$

где

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{V}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{V}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 63 \\ 576 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{V}_5 = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{i} \\ -5 \\ -4-8\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \hat{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \hat{W}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}, \hat{W}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 72 \end{pmatrix}, \hat{W}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 := \left|\hat V_1\hat V_2\hat V_3\hat V_4\hat V_5\right|,\ \Delta_1 := \left|\hat W_1\hat V_2\hat V_3\hat V_4\hat V_5\right|,\ \ldots,\ \Delta_5 := \left|\hat V_1\hat V_2\hat V_3\hat V_4\hat W_5\right|,$$
$$\Delta_{12} = \left|\hat W_1\hat W_2\hat V_3\hat V_4\hat V_5\right|, \ldots, \Delta_{45} = \left|\hat V_1\hat V_2\hat V_3\hat W_4\hat W_5\right|, \ldots, \Delta_{12345} = \left|\hat W_1\hat W_2\hat W_3\hat W_4\hat W_5\right|,$$

а отличными от нуля будут только следующие определители

$$\begin{aligned}
\Delta_{12} &= \left|\hat W_1\hat W_2\hat V_3\hat V_4\hat V_5\right| = 31168 + 24576\,\mathrm{i},\\
\Delta_{13} &= \left|\hat W_1\hat V_2\hat W_3\hat V_4\hat V_5\right| = -87696 - 20304\,\mathrm{i},\\
\Delta_{14} &= \left|\hat W_1\hat V_2\hat V_3\hat W_4\hat V_5\right| = 34160 - 1680\,\mathrm{i},\\
\Delta_{15} &= \left|\hat W_1\hat V_2\hat V_3\hat V_4\hat W_5\right| = 22752 - 7584\,\mathrm{i},\\
\Delta_{23} &= \left|\hat V_1\hat W_2\hat W_3\hat V_4\hat V_5\right| = 35672 - 10584\,\mathrm{i},\\
\Delta_{24} &= \left|\hat V_1\hat W_2\hat V_3\hat W_4\hat V_5\right| = -19800 + 11880\,\mathrm{i},\\
\Delta_{25} &= \left|\hat V_1\hat W_2\hat V_3\hat V_4\hat W_5\right| = -38640 + 7728\,\mathrm{i},\\
\Delta_{34} &= \left|\hat V_1\hat V_2\hat W_3\hat W_4\hat V_5\right| = 1456 - 1872\,\mathrm{i},\\
\Delta_{35} &= \left|\hat V_1\hat V_2\hat W_3\hat V_4\hat W_5\right| = 28224 - 2352\,\mathrm{i},\\
\Delta_{45} &= \left|\hat V_1\hat V_2\hat V_3\hat W_4\hat W_5\right| = -7296 + 192\,\mathrm{i},
\end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = \lambda^8 \Big(&e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}(31168 + 24576\,i) + e^{\lambda(\omega_1+\omega_3)}(-87696 - 20304\,i)+\\
&+ e^{\lambda(\omega_1+\omega_4)}(34160 - 1680\,i) + e^{\lambda(\omega_1+\omega_5)}(22752 - 7584\,i) + e^{\lambda(\omega_2+\omega_3)}(35672 - 10584\,i)+\\
&+ e^{\lambda(\omega_2+\omega_4)}(-19800 + 11880\,i) + e^{\lambda(\omega_2+\omega_5)}(-38640 + 7728\,i) + e^{\lambda(\omega_3+\omega_4)}(1456 - 1872\,i)+\\
&+ e^{\lambda(\omega_3+\omega_5)}(28224 - 2352\,i) + e^{\lambda(\omega_4+\omega_5)}(-7296 + 192\,i)\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом, M_Δ есть многоугольник $ABCD$ на рисунке 3.12.

Так как в рассматриваемом случае $n - l = 2$, то многоугольник M_{n-l} есть выпуклая оболочка всевозможных сумм различных характеристик по два слагаемых. На рисунке 3.12 M_{n-l} есть тот же самый многоугольник $ABCD$, т. е. $M_{n-l} = M_\Delta$.

Главные вершины в рассматриваемом примере есть A, B, C и D и видно, что х.м. M_Δ содержит эти вершины. Тогда, на основании теоремы 3.29, система к.ф. рассматриваемой о.-ф. однократно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, так как в этом случае $m = [k,n-k]_- = \min\{4,1\} = 1$.

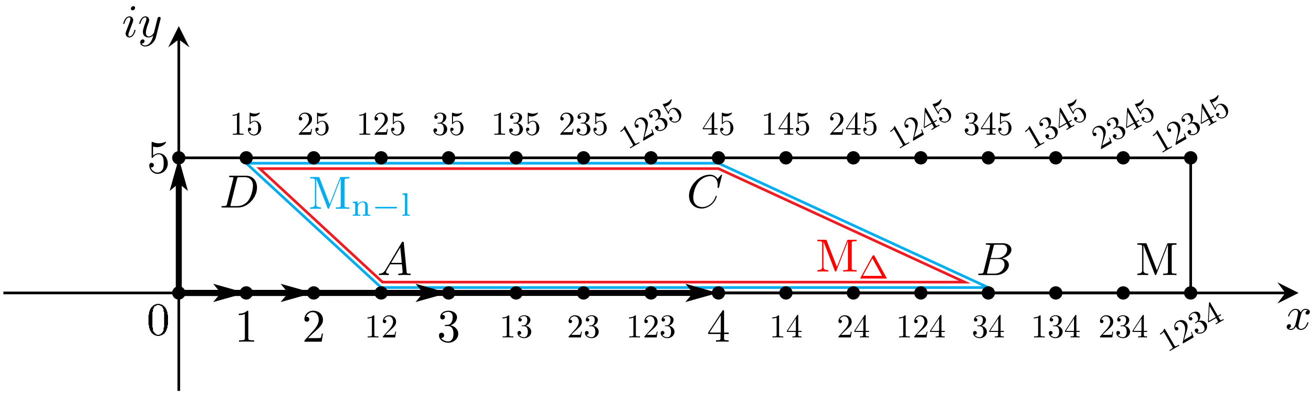

Рисунок 3.12 — Многоугольники M, M_{n-l} и M_Δ

Аналогичный результат для рассматриваемого примера получается, если вместо теоремы 3.29 использовать теорему 3.25 (см. раздел 3.4). Для ее использования нужно проверить, какие из векторов V_j и W_j удовлетворяют условию (α). Это требует гораздо больших вычислений, чем применение теоремы 3.29.

Пользуясь леммами 3.22–3.23 или непосредственным подсчётом, можно установить, что

$$V_1 \notin (\alpha), \quad V_2 \notin (\alpha), \quad V_3 \notin (\alpha), \quad V_4 \notin (\alpha), \quad V_5 \in (\alpha),$$
$$W_1 \notin (\alpha), \quad W_2 \notin (\alpha), \quad W_3 \notin (\alpha), \quad W_4 \notin (\alpha), \quad W_5 \in (\alpha).$$

На рисунках 3.13 и 3.14 изображены, соответственно, многоугольники $M(V_5)$ и $M(W_5)$, для векторов V_5 и W_5, которые удовлетворяют условию (α).

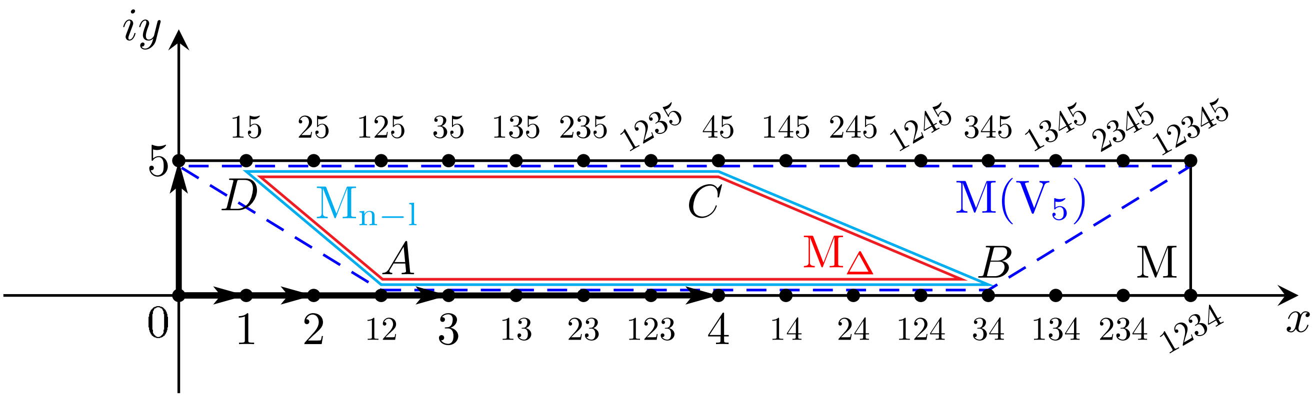

Рисунок 3.13 — Многоугольник $M(V_5)$

Так как есть имеется пара векторов $\{V_5, W_5\}$ такая, что V_5, $W_5 \in (\alpha)$, то, на основании теоремы 3.25, получим однократную полноту в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.ф. рассматриваемой о.-ф. с возможным конечным дефектом.

Замечание 3.48. Так как теоремы 3.25 и 3.29 дают только достаточные условия кратной полноты, то вопрос о двукратной полноте системы к.ф. рассматриваемой о.-ф. требует дополнительного исследования.

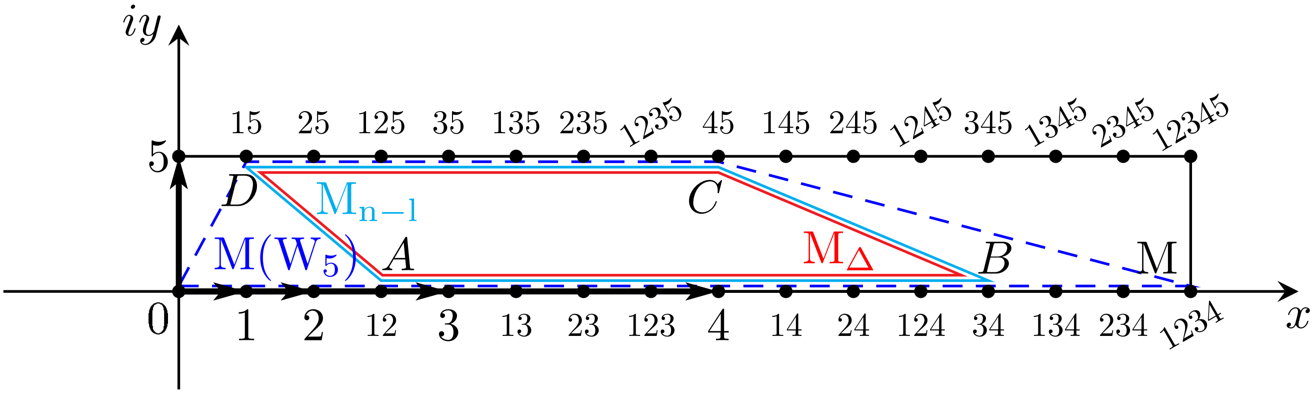

Рисунок 3.14 — Многоугольник $M(W_5)$

В совместной статье В. С Гуреева и автора диссертации [75] (теория принадлежит автору диссертации, а вычисления были проделаны соавтором) показано, что на самом деле для рассматриваемой о.-ф. имеет место двукратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.ф. с возможным конечном дефектом.

В случае аналогичной, но более общей о.-ф. 5-го порядка, у которой произвольные попарно различные характеристики, лежащие на двух лучах в количестве, соответственно, 4 и 1, и произвольные распадающиеся однородные краевые условия такие, что выполняется условие

$$[k,n-k]_- = \min\{4,1\} = 1 < l < [k,n-k]_+ \max\{4,1\} = 4,$$

где l — количество краевых условий в конце 0, в совместной статье В. С. Гуреева и автора диссертации [76] (теория принадлежит автору диссертации, а вычисления были проделаны соавтором) найдено достаточное условие двукратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. с возможным конечным дефектом. □

3.7 Полнота системы корневых функций дифференциального оператора, порожденного простейшим дифференциальным выражением 5-го порядка и двучленными двухточечными краевыми условиями

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L^0, порожденный простейшим д.в. пятого порядка

$$\ell^0(y) := y^{(5)}(x), \tag{3.179}$$

и двухточечными двучленными краевыми условиями

$$U_\nu^0(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1{,}5}, \tag{3.180}$$

где $\alpha_\nu,\beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu = \overline{1{,}5}$.

В данном разделе исследуется вопрос о полноте системы к.ф. этого оператора в пространстве $L_2[0{,}1]$.

Интерес к данному оператору вызван тем, что при соответствующем выборе коэффициентов α_ν и β_ν краевых условий (3.180) этот оператор может быть и регулярным по Биркгофу, и слабо нерегулярным, и сильно нерегулярным. Т. е. этот оператор является хорошим модельным оператором, для которого классические п.ф. не удовлетворяют условию (α), но для которого можно построить подходящие обобщённые п.ф., удовлетворяющие этому условию.

Данный раздел состоит из восьми подразделов.

В первом подразделе формулируется теорема о полноте к.ф. оператора L^0 и дается краткая история вопроса.

Во втором подразделе вопрос полноты к.ф. оператора L^0 сводится к исследованию кратной полноты о-.ф. $L^0(\rho)$, получающегося из линейного пучка $\mathcal{L}^0(\lambda) := L^0 - \lambda E$ в результате замены $\lambda = -\rho^5$, что позволяет применить к исследованию полноты к.ф. L^0 соответствующую теорию, изложенную в разделах 3.2–3.4.

В третьем подразделе дается классификация дифференциальных о.-ф. $L^0(\rho)$ по степени их нерегулярности, уточняющая классификацию, данную в разделе 3.2, а именно, вводятся множества о.-ф. NR_j^k.

В четвертом подразделе доказываются некоторые вспомогательные результаты, которые существенно используются в дальнейшем изложении.

В пятом подразделе дается аналитическое описание множеств NR_j^k.

В шестом подразделе проводится анализ обобщённой п.ф., необходимый для доказательства основной теоремы.

В седьмом подразделе, проводится непосредственное доказательство теоремы о кратной полноте системы к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$.

Наконец, в восьмом подразделе делается вывод о полноте системы к.ф. оператора L^0 в пространстве $L_2[0{,}1]$.

3.7.1 Основные теоремы и краткая история вопроса

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 3.49. *Предположим, что или $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1{,}5}$, или $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1{,}5}$. Тогда либо система к.ф. L^0 полна в пространстве $L_2[0{,}1]$, либо этот оператор вырожден, то есть, или не имеет вообще с.з., или имеет конечное число с.з., или все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.*

Этот результат был опубликован кратко в статьях [156; 160] автора диссертации, а затем подробно в статье [47].

Позднее автором диссертации был получен более общий результат [41; 157] для дифференциального оператора, определяемого д.в. $y^{(n)}$ и двучленными двухточечными краевыми условиями типа (3.180), где $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство общего случая весьма громоздко и из-за этого его суть может быть не очень понятна. Для лучшего понимания идеи доказательства предпочтительнее дать подробное доказательство для самого простейшего случая $n = 5$, сохраняющего основные трудности общего случая, что и делается в данном разделе.

В А. П. Хромова [196], по-видимому, впервые была рассмотрена нерегулярная задача на собственные значения третьего порядка вида

$$y^{(3)} + \lambda y = 0, \quad \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = 1{,}2{,}3. \tag{3.181}$$

Было показано, что условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ является необходимым и достаточным для обращения в нуль коэффициентов при экспонентах, соответствующих точкам $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_2 + \omega_3$, $\omega_3 + \omega_1$ в х.о. Был также исследован вопрос о разложении функций в биортогональные ряды по системе к.ф. задачи (3.181) при выполнении этого условия. Решение этого вопроса имело принципиальное значение, так как функция Грина задачи (3.181) в данном случае имеет экспоненциальный рост по λ как при $t \leqslant x$, так и при $t \geqslant x$, в отличие от случая распадающихся граничных условий, когда функция Грина имеет экспоненциальный рост или при $t \leqslant x$, или при $t \geqslant x$.

Но вопрос о полноте системы к.ф. этой задачи в $L_2[0{,}1]$ не является принципиальным, так как задача (3.181) слабо нерегулярна в смысле, указанном в разделе 3.2, и полнота системы к.ф. в $L_2[0,1]$ является следствием более общего результата, полученного в работах [70; 205; 207].

Отметим, что все возможные нерегулярные ситуации при $n = 3$ или $n = 4$ либо также слабо нерегулярные, либо вырожденные.

Похожие результаты позднее были получены О. Ю. Дмитриевым [79].

Результаты [196] были распространены [78; 80; 81] О. Ю. Дмитриевым на случай краевых задач на отрезке [0,1] вида

$$y^{(n)} + \lambda y = 0, \quad \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,n},$$

где $n = 4k + 1$, а также аналогичных краевых задач с некоторыми другими двухточечными краевыми условиями. В этих работах были выделены некоторые классы нерегулярных по Биркгофу краевых условий, для которых были получены необходимые и достаточные условия разложения по системе к.ф. указанных краевых задач на отрезке [0,1] и внутри него. Вопрос полноты системы к.ф. в этих работах не рассматривался.

Доказательство основного результата данного раздела о полноте системы к.ф. оператора L^0 проводится в соответствии со схемой ДКП, но не для оператора L^0, а для тесно связанной с ним о.-ф.

$$L^0(\rho) := L^0 + \rho^5 E,$$

порожденной д.в.

$$\ell^0(y,\rho) := y^{(5)}(x) + \rho^5 y, \quad x \in [0,1] \tag{3.182}$$

и теми же самыми двучленными краевыми условиями, что и (3.180):

$$U_\nu^0(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,5}, \tag{3.183}$$

где $\alpha_\nu,\beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu = \overline{1,5}$.

Все определения и результаты разделов 3.2, 3.3 и 3.4 применимы к о.-ф. $L^0(\rho)$ вида (3.182)–(3.183), но только вместо спектрального параметра λ будет спектральный параметр ρ. Вместо обычной полноты системы к.ф. в $L_2[0,1]$ оператора L^0 исследуется кратная полнота к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$, из которой будет вытекать полнота к.ф. оператора L^0.

Как показывается в следующем подразделе, утверждение теоремы 3.49 следует из 1-кратной полноты к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ (см. лемму 3.51).

На самом доказывается более сильный результат, а именно, 5-кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$.

Теорема 3.50. *Предположим, что или* $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1{,}5}$, *или* $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1{,}5}$. *Тогда либо система к.ф. оператор-функции* $L^0(\rho)$ *5-кратно полна в пространстве* $L_2[0{,}1]$, *либо эта о.-ф. вырожденная, то есть или не имеет вообще с.з., или имеет конечное число с.з., или все* $\lambda \in \mathbb{C}$ *являются с.з.*

Доказательству этой теоремы составляет содержание оставшейся части данного раздела. Доказательство проводится в соответствии со схемой ДКП с существенным и нетривиальным использованием обобщенных п.ф. и теории, изложенной в разделах 3.2, 3.3 и 3.4.

Напомним, что суть этой схемы составляет построение в.-п. $\Gamma(\rho)$, удовлетворяющих условию (α). Причем необходимые в.-п. $\Gamma(\rho)$ удается построить не сразу для всех сильно нерегулярных о.-ф. $L^0(\rho)$, а для каждого конкретного подмножества сильно нерегулярных о.-ф., на которые распадается весь класс сильно нерегулярных о.-ф. вида (3.179)–(3.180). Для этого требуется предварительно провести более детальную классификацию о.-ф. (3.182)–(3.183) по степени их нерегулярности и дать соответствующее аналитическое описание краевых условий для каждого подмножества.

3.7.2 Лемма о связи полноты системы корневых функций оператора и соответствующей оператор-функции

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор L^0 вида (3.179)–(3.180). Спектральные свойства оператора L^0 совпадают со спектральными свойствами линейной о.-ф. $\mathcal{L}^0(\lambda) := L^0 - \lambda E$.

Сделаем замену $\lambda = -\rho^5$, где $\rho \in S_0 \cup S_1$. Здесь S_k есть секторы

$$S_k = \left\{\rho : \frac{k\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(k+1)\pi}{n}\right\}, \quad k = \overline{0{,}2n-1}.$$

Тогда вместо линейной о.-ф. $\mathcal{L}^0(\lambda)$ получим эквивалентную с точки зрения спектральных свойств о.-ф. $\hat{L}^0(\rho)$ вида (3.182)–(3.183), но где $\rho \in S_0 \cup S_1$.

Рассмотрим две ф.с.р. уравнения

$$y^{(5)} + \rho^5 y = 0.$$

Первая ф.с.р. есть система функций

$$y_j(x,\rho) = e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,5}, \quad \omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{5}, \tag{3.184}$$

которые являются целыми аналитическими функциями по ρ.

Вторая ф.с.р. есть система функций

$$\tilde{y}_j(x,\lambda), \quad j = \overline{1,5}, \tag{3.185}$$

которые определяются начальными условиями

$$\tilde{y}_j^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{j\nu}, \quad \nu = \overline{1,5},$$

и являются целыми аналитическими функциями по λ, а следовательно, и по ρ.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что одна ф.с.р. получается из другой ф.с.р. в результате невырожденного линейного преобразования. Т. е. существует такая матрица $\mathcal{B}(\rho)$, что $\det\mathcal{B}(\rho) \neq 0$ и

$$\big(\tilde{y}_1(x,\lambda), \ldots, \tilde{y}_5(x,\lambda)\big) = \big(e^{\rho\omega_1 x}, \ldots, e^{\rho\omega_5 x}\big)\mathcal{B}(\rho). \tag{3.186}$$

Как и в предыдущих разделах, будем обозначать объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Справедливы следующие тождества для функции Грина в соответствии с формулой из [135; 187] или формулой (2.37), используемой в разделе 2.2,

$$\tilde{G}(x,\xi,\lambda) \equiv -\frac{\tilde{H}(x,\xi,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \equiv -\frac{H(x,\xi,\rho)\det\mathcal{B}}{\Delta(\rho)\det\mathcal{B}} \equiv -\frac{H(x,\xi,\rho)}{\Delta(\rho)} \equiv G(x,\xi,\rho), \tag{3.187}$$

где $\rho \in S_0 \cup S_1$.

Аналогично

$$\mathcal{H}_1(\tilde{g}_i,\lambda) \equiv \frac{H_1(\tilde{g}_i,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \equiv \frac{\int\limits_0^1 \tilde{g}_i(x,\lambda)\bar{h}_1(x)\,dx}{\tilde{\Delta}(\lambda)} \equiv \frac{\int\limits_0^1 g_i(x,\rho)\det\mathcal{B}(\rho)\bar{h}_1(x)\,dx}{\Delta(\rho)\det\mathcal{B}(\rho)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\int\limits_0^1 g_i(x,\rho)\bar{h}_1(x)\,dx}{\Delta(\rho)} \equiv \mathcal{H}_1(g_i,\rho), \quad i = \overline{1,5}, \tag{3.188}$$

где $\rho \in S_0 \cup S_1$, а $\tilde{g}_i(x,\lambda)$ и $g_i(x,\rho)$ есть классические п.ф. для L^0 и $\hat{L}^0(\rho)$, соответственно.

Рассмотрим о.-ф. (3.182)–(3.183) при $\rho \in \mathbb{C}$, обозначенную как $L^0(\rho)$. Она входит в класс о.-ф., рассмотренных в разделах 3.2, 3.3 и 3.4, и, следовательно, для исследования кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы её к.ф. можно использовать изложенную там теорию. Но, в тоже время, при $\rho \in S_0 \cup S_1$ эта о.-ф. идентична линейной о.-ф $\mathcal{L}^0(\lambda)$ или, что то же самое, дифференциальному оператору L^0.

Классические п.ф. $g_i(x,\rho)$, $j = \overline{1,5}$, своими формулами продолжимы с области $\rho \in S_0 \cup S_1$ во всю комплексную плоскость и являются целыми аналитическими функциями по ρ.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.51. *Если система к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ 1-кратно полна в $L_2[0,1]$, то система к.ф. оператора L^0 также полна в $L_2[0,1]$.*

Доказательство. Пусть система к.ф. $L^0(\rho)$ 1-кратно полна в $L_2[0,1]$ и функция $h_1(x)$ ортогональна в $L_2[]0,1$ системе к.ф. оператора L^0. Тогда функции

$$\mathcal{H}_1(\tilde{g}_i,\lambda), \quad i = \overline{1,5},$$

есть целые аналитические функции.

Из того факта, что функции ф.с.р. (3.184) есть целые функции по ρ и справедливы тождества (3.188), следует, что функции

$$\mathcal{H}_1(g_i,\rho), \quad i = \overline{1,5},$$

также есть целые функции по ρ.

Но эти функции в то же время мероморфные по ρ и нули знаменателя есть с.з. оператор-функции $L^0(\rho)$. Т. е. нули знаменателя компенсируются нулями числителя.

Таким образом, функция $h_1(x)$ ортогональна всем производным 1-цепочкам, соответствующим системе к.ф. $L^0(\rho)$, т. е. просто ортогональна системе её к.ф.

В силу полноты в $L_2[0,1]$ системы производных 1-цепочек, по предположению леммы, отсюда следует, что $h_1(x) = 0$ при п.в. $x \in [0,1]$.

Следовательно, система к.ф. оператора L^0 полна в $L_2[0,1]$.

Тем самым, лемма доказана. $\square$

3.7.3 Классификация оператор-функций. Множества NR_j^k

Далее потребуется более детальная классификация о.-ф. вида (3.182)–(3.183) (а, следовательно, и операторов (3.179)–(3.180)), чем классификация, проведенная в разделе 3.2.

Обозначим

$$u_{\nu j}(\rho) := U_\nu^0(e^{\rho\omega_j x}) = \alpha_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1} + \beta_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1}e^{\rho\omega_j} = \\ = \rho^{\nu-1}\big(\alpha_\nu\omega_j^{\nu-1} + \beta_\nu\omega_j^{\nu-1}e^{\rho\omega_j}\big) = \rho^{\nu-1}(v_{\nu j} + w_{\nu j}e^{\rho\omega_j}),$$

где $v_{\nu j} = \alpha_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $w_{\nu j} = \beta_\nu\omega_j^{\nu-1}$, $\nu,j = \overline{1,5}$.

Положим

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ v_{3j} \\ v_{4j} \\ v_{5j} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_j \\ \alpha_3\omega_j^2 \\ \alpha_4\omega_j^3 \\ \alpha_5\omega_j^4 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ w_{4j} \\ w_{5j} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2\omega_j \\ \beta_3\omega_j^2 \\ \beta_4\omega_j^3 \\ \beta_5\omega_j^4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 = |V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \Delta_1 = |W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \ldots,\ \Delta_5 = |V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ W_5|,$$
$$\Delta_{12} = |W_1\,W_2\,V_3\,V_4\,V_5|,\ \Delta_{13} = |W_1\,V_2\,W_3\,V_4\,V_5|,\ \ldots,\ \Delta_{12345} = |W_1\,W_2\,W_3\,W_4\,W_5|,$$

где используется обозначение $|A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5| := \det(A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5)$).

Отметим на плоскости (см. рисунок 3.15) все точки 0, ω_j, $\omega_j + \omega_k$ $(j \ne k)$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ $(j \ne k \ne l)$, $\ldots$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 (= 0)$ (для краткости на рисунке цифрой j обозначается точка ω_j, суммой $1 + 2$ обозначается точка $\omega_1 + \omega_2$ и т. д.). Как и в разделе 3.2 обозначим множество таких точек через Ω.

Пусть M_0 — выпуклая оболочка отмеченных точек, т. е. $M_0 := \operatorname{conv}\Omega$. M_0 — это многоугольник M, определённый ранее в разделе 3.2.

Очевидно, M_0 является правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках. На рисунке 3.15 этот многоугольник есть самый внешний 10-угольник, ограниченный сплошной линией. Его вершины есть точки

$$\sigma_{01}^0 = \omega_1 + \omega_2,\quad \sigma_{02}^0 = \omega_2 + \omega_3,\quad \ldots,\quad \sigma_{05}^0 = \omega_5 + \omega_1,$$
$$\sigma_{01}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,\quad \sigma_{02}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4,\quad \ldots,\quad \sigma_{05}^1 = \omega_5 + \omega_1 + \omega_2.$$

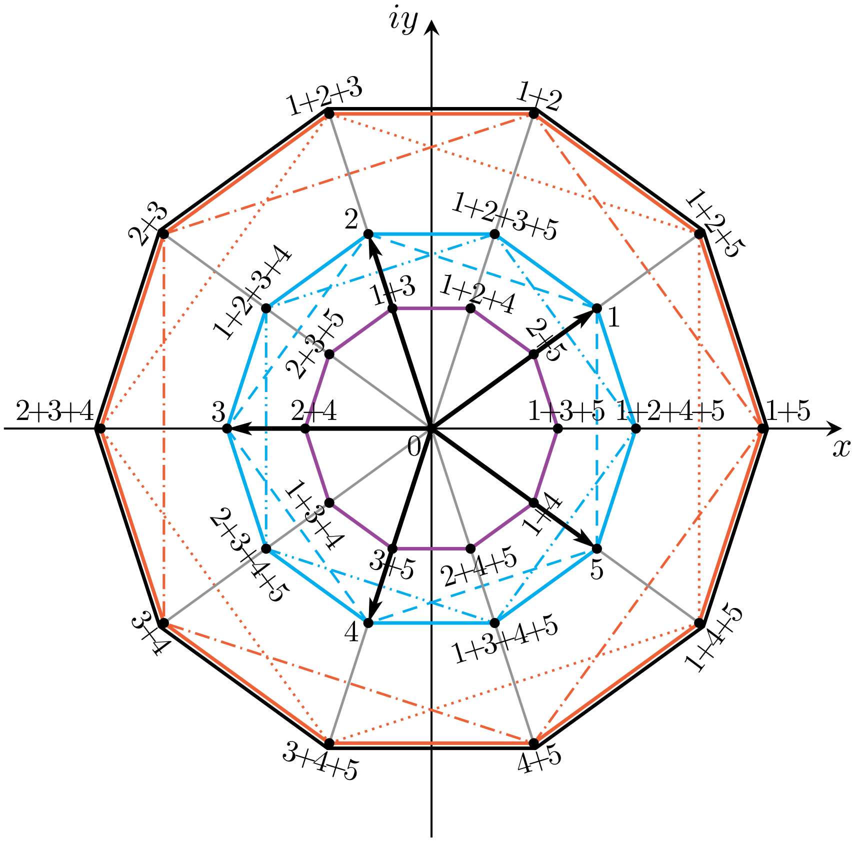

Рисунок 3.15 — Множества Ω, M_0, M_0^0, M_0^1, M_1, M_1^0, M_1^1, M_2

Обозначим через M_0^0 и M_0^1 выпуклые оболочки точек σ_{0j}^0, $j = \overline{1{,}5}$, и σ_{0j}^1, $j = \overline{1{,}5}$, соответственно. Очевидно, M_0^0 и M_0^1 есть правильные 5-угольники с центрами в начале координат и с вершинами в точках σ_{0j}^0, $j = \overline{1{,}5}$, и σ_{0j}^1, $j = \overline{1{,}5}$, соответственно, которые перемежаются друг с другом. На рисунке 3.15 эти 5-угольники ограничены штрихпунктирной и пунктирной линиями, соответственно.

Если удалить вершины многоугольника M_0 и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_1 будет также, как и M_0, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{lll}
\sigma_{11}^0 = \omega_1, & \sigma_{12}^0, & \ldots,\ \sigma_{15}^0 = \omega_5, \\
\sigma_{11}^1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4, & \sigma_{12}^1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5, & \ldots,\ \sigma_{15}^1 = \omega_5 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3,
\end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольника M_0. На рисунке 3.15 многоугольник M_1 есть самый большой 10-угольник внутри 10-угольника M_0, ограниченный сплошной линией.

Обозначим через M_1^0 и M_1^1 выпуклые оболочки точек σ_{1j}^0, $j = \overline{1{,}5}$, и σ_{1j}^1, $j = \overline{1{,}5}$, соответственно. Очевидно, M_1^0 и M_1^1 есть правильные 5-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ^0_{1j}, $j = \overline{1,5}$, и σ^1_{1j}, $j = \overline{1,5}$, соответственно, которые также перемежаются друг с другом. На рисунке 3.15 правильные 5-угольники M^0_1 и M^1_1 ограничены штрихпунктирной с двумя точками и штриховой линиями, соответственно.

Если удалить вершины многоугольников M_0 и M_1 и обозначить через M_2 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_2 будет также, как и M_0 и M_1, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{llll} \sigma^0_{21} = \omega_1 + \omega_3, & \sigma^0_{22} = \omega_2 + \omega_4, & \ldots, & \sigma^0_{25} = \omega_5 + \omega_2, \\ \sigma^1_{21} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_4, & \sigma^1_{22} = \omega_2 + \omega_3 + \omega_5, & \ldots, & \sigma^1_{25} = \omega_5 + \omega_1 + \omega_3, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольников M_0 и M_1. На рисунке 3.15 этот многоугольник есть самый внутренний 10-угольник.

Нетрудно показать, что многоугольник M_1 лежит строго внутри многоугольников M_0, M^0_0 и M^1_0. А многоугольник M_2 – строго внутри многоугольников M_1, M^0_1 и M^1_1.

Х.о. оператор-функции $L^0(\rho)$ есть

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & \ldots & u_{15}(\rho) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{51}(\rho) & \ldots & u_{55}(\rho) \end{vmatrix} = \rho^{10} |V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1, \ldots, V_5 + e^{\rho\omega_1} W_5| =$$

$$= \rho^{10} \Big(\big(\Delta_{12} e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + \Delta_{23} e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \ldots + \Delta_{15} e^{\rho(\omega_1+\omega_5)} \big) +$$
$$+ \big(\Delta_{123} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + \Delta_{234} e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \ldots + \Delta_{125} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)} \big) +$$
$$+ \big(\Delta_1 e^{\rho\omega_1} + \Delta_2 e^{\rho\omega_2} + \ldots + \Delta_5 e^{\rho\omega_5} \big) +$$
$$+ \big(\Delta_{1234} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \Delta_{2345} e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \ldots + \Delta_{1235} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)} \big) +$$
$$+ \big(\Delta_{13} e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + \Delta_{24} e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \ldots + \Delta_{25} e^{\rho(\omega_2+\omega_5)} \big) +$$
$$+ \big(\Delta_{124} e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + \Delta_{235} e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \ldots + \Delta_{135} e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)} \big) +$$
$$+ \Delta_{12345} + \Delta_0 \Big). \tag{3.189}$$

Лемма 3.52. *Справедливы следующие равенства*

$$\begin{array}{ccccccccc} \Delta_{12} & = & \Delta_{23} & = & \Delta_{34} & = & \Delta_{45} & = & \Delta_{15}, \\ \Delta_{123} & = & \Delta_{234} & = & \Delta_{345} & = & \Delta_{145} & = & \Delta_{125}, \\ \Delta_1 & = & \Delta_2 & = & \Delta_3 & = & \Delta_4 & = & \Delta_5, \\ \Delta_{1234} & = & \Delta_{2345} & = & \Delta_{1345} & = & \Delta_{1245} & = & \Delta_{1235}, \\ \Delta_{13} & = & \Delta_{24} & = & \Delta_{35} & = & \Delta_{14} & = & \Delta_{25}, \end{array}$$

$$\Delta_{124} = \Delta_{235} = \Delta_{134} = \Delta_{245} = \Delta_{135}.$$

Доказательство. Докажем, например, что $\Delta_{23} = \Delta_{12}$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Так как $\omega_j = e^{\frac{2\pi i}{5}}\omega_{j-1}$, то справедливы следующие равенства

$$\Delta_{23} = |V_1\ W_2\ W_3\ V_4\ V_5| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_1 & \beta_2\omega_2 & \beta_2\omega_3 & \alpha_2\omega_4 & \alpha_2\omega_5 \\ \alpha_3\omega_1^2 & \beta_3\omega_2^2 & \beta_3\omega_3^2 & \alpha_3\omega_4^2 & \alpha_3\omega_5^2 \\ \alpha_4\omega_1^3 & \beta_4\omega_2^3 & \beta_4\omega_3^3 & \alpha_4\omega_4^3 & \alpha_4\omega_5^3 \\ \alpha_5\omega_1^4 & \beta_5\omega_2^4 & \beta_5\omega_3^4 & \alpha_5\omega_4^4 & \alpha_5\omega_5^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_5 & \beta_2\omega_1 & \beta_2\omega_2 & \alpha_2\omega_3 & \alpha_2\omega_4 \\ \alpha_3\omega_5^2 & \beta_3\omega_1^2 & \beta_3\omega_2^2 & \alpha_3\omega_3^2 & \alpha_3\omega_4^2 \\ \alpha_4\omega_5^3 & \beta_4\omega_1^3 & \beta_4\omega_2^3 & \alpha_4\omega_3^3 & \alpha_4\omega_4^3 \\ \alpha_5\omega_5^4 & \beta_5\omega_1^4 & \beta_5\omega_2^4 & \alpha_5\omega_3^4 & \alpha_5\omega_4^4 \end{vmatrix} =$$

$$= |V_5\ W_1\ W_2\ V_3\ V_4| = (-1)^4 |W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5| = \Delta_{12}.$$

Тем самым, лемма доказана. □

На основании этой леммы и представления (3.189) получим

$$\begin{gathered} \Delta(\rho) = \rho^{10}\Big(\Delta_{12}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}\big) + \\ +\Delta_{123}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}\big) + \\ +\Delta_1\big(e^{\rho\omega_1} + e^{\rho\omega_2} + \dots + e^{\rho\omega_5}\big) + \\ +\Delta_{1234}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}\big) + \\ +\Delta_{13}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \dots + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}\big) + \\ +\Delta_{124}\big(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \dots + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}\big) + \Delta_{12345} + \Delta_0\Big). \end{gathered} \tag{3.190}$$

Рассмотрим точки $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$, $\dots$, $\omega_5+\omega_1$, если $\Delta_{12} \neq 0$, точки $\omega_1+\omega_2+\omega_3$, $\omega_2+\omega_3+\omega_4$, $\dots$, $\omega_5+\omega_1+\omega_2$, если $\Delta_{123} \neq 0$, и т. д. Выпуклая этих точек M_Δ является х.м. оператор-функции $L^0(\rho)$ в соответствии с определением, данным в разделе 3.2.

Очевидно, M_Δ является многоугольником, симметричным относительно начала координат и инвариантным относительно поворота на угол $2\pi/5$. Вид этого многоугольника характеризует степень вырожденности х.о.

Возможны следующие случаи:

($\mathbf{0}$) $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_0$. Это регулярный по Биркгофу случай (см. определение 3.6). Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_0 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0$.

($\mathbf{0^0}$) $\Delta_{12} \neq 0 \wedge \Delta_{123} = 0$. Здесь $M_\Delta = M_0^0$. Это первый из двух слабо нерегулярных случаев (см. определение 3.8). Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_0^0 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^0$.

($\mathbf{0^1}$) $\Delta_{12} = 0 \wedge \Delta_{123} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_0^1$. Это второй из двух слабо нерегулярных случаев (см. определение 3.8). Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_0^1 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^1$.

($\mathbf{1}$) $\Delta_1 \neq 0 \wedge \Delta_{12} = \Delta_{123} = 0 \wedge \Delta_{1234} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_1$ (см. рисунок 3.15). Это первый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев (см. определение 3.9). Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_1 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$.

($\mathbf{1^0}$) $\Delta_1 \neq 0 \wedge \Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_{1234} = 0$. Здесь $M_\Delta = M_1^0$ (см. рисунок 3.15). Это второй из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_1^0 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^0$.

($\mathbf{1^1}$) $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_{123} = 0 \wedge \Delta_{1234} \neq 0$. Здесь $M_\Delta = M_1^1$ (см. рисунок 3.15). Это третий из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать кратко NR_1^1 и писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^1$.

($\mathbf{2}$) $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_{1234} = 0$. Здесь $M_\Delta \subset M_2$. Множество о.-ф. $L^0(\rho)$, обладающих данным свойством, будем обозначать NR_2 и кратко писать $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_2$ (см. рисунок 3.15). Это четвертый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев, который содержит все оставшиеся сильно нерегулярные случаи (далее будет показано, что все о.-ф. из этого множества — вырожденные).

3.7.4 Лемма о представлении столбцов характеристического определителя через циклически сдвинутые векторы

Рассмотрим следующую матрицу

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \dots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Y_1 \; Y_2 \; \dots \; Y_5),$$

а также транспонированную к ней матрицу

$$\mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^4 \\ 1 & \omega_2 & \dots & \omega_2^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_5 & \dots & \omega_5^4 \end{pmatrix} = (Z_1 \; Z_2 \; \dots \; Z_5).$$

Очевидно, справедливы соотношения $\theta := \det \mathbf{\Omega} = \det \mathbf{\Omega}^T \neq 0$ и, следовательно, векторы $Y_1,Y_2,\dots,Y_5$ и векторы $Z_1,Z_2,\dots,Z_5$ образуют базисы в $\mathbb{C}^5$.

Введем векторы $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_5)^T$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_5)^T$ и разложим эти векторы по системе $Z_1,Z_2,\dots,Z_5$:

$$\begin{aligned} \alpha &= \hat{\alpha}_1 Z_1 + \hat{\alpha}_2 Z_2 + \ldots + \hat{\alpha}_5 Z_5 = \mathbf{\Omega}^T \hat{\alpha}, \\ \beta &= \hat{\beta}_1 Z_1 + \hat{\beta}_2 Z_2 + \ldots + \hat{\beta}_5 Z_5 = \mathbf{\Omega}^T \hat{\beta}, \end{aligned} \tag{3.191}$$

где $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\dots,\hat{\alpha}_5)^T$ и $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\dots,\hat{\beta}_5)^T$. Так как $\theta \neq 0$, то соответствия между α и $\hat{\alpha}$ и между β и $\hat{\beta}$ взаимно однозначны.

Обозначим для краткости $\omega := \omega_1$ и, для удобства, введем функцию $\mathrm{Mod}_5(j) := \mathrm{mod}_5(j)$, если $j \neq 5s$, и $\mathrm{Mod}_5(j) := 5$, если $j = 5s$, где $j,s \in \mathbb{Z}$, а $\mathrm{mod}_n(j)$ есть стандартная функция из алгебры.

Лемма 3.53. *Имеют место следующие равенства для* $j = \overline{1,5}$

$$\begin{aligned} V_j &= a_1 Y_j + a_2 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+1)} + \cdots + a_5 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+4)} = \mathbf{\Omega} \hat{V}_j, \\ W_j &= b_1 Y_j + b_2 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+1)} + \cdots + b_5 Y_{\mathrm{Mod}_5(j+4)} = \mathbf{\Omega} \hat{W}_j, \end{aligned}$$

где $a_k = \hat{\alpha}_k \omega^{k-1}$, $b_k = \hat{\beta}_k \omega^{k-1}$, $k = \overline{1,5}$ *и*

$$\begin{aligned} \hat{V}_j &= (a_{\mathrm{Mod}_5(2-j)}, a_{\mathrm{Mod}_5(3-j)}, \dots, a_{\mathrm{Mod}_5(6-j)})^T, \\ \hat{W}_j &= (b_{\mathrm{Mod}_5(2-j)}, b_{\mathrm{Mod}_5(3-j)}, \dots, b_{\mathrm{Mod}_5(6-j)})^T, \end{aligned}$$

то есть

$$\hat V_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{pmatrix},\ \hat V_2=\begin{pmatrix}a_5\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix},\ \hat V_3=\begin{pmatrix}a_4\\a_5\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \hat V_4=\begin{pmatrix}a_3\\a_4\\a_5\\a_1\\a_2\end{pmatrix},\ \hat V_5=\begin{pmatrix}a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_1\end{pmatrix};$$

$$\hat W_1=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\end{pmatrix},\ \hat W_2=\begin{pmatrix}b_5\\b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix},\ \hat W_3=\begin{pmatrix}b_4\\b_5\\b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\ \hat W_4=\begin{pmatrix}b_3\\b_4\\b_5\\b_1\\b_2\end{pmatrix},\ \hat W_5=\begin{pmatrix}b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Справедливо представление

$$V_j=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\omega_j\\\alpha_3\omega_j^2\\\alpha_4\omega_j^3\\\alpha_5\omega_j^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\omega_j&0&0&0\\0&0&\omega_j^2&0&0\\0&0&0&\omega_j^3&0\\0&0&0&0&\omega_j^4\end{pmatrix}\alpha=\mathbf{\Omega}_j\alpha=\mathbf{\Omega}_j\mathbf{\Omega}^T\hat\alpha,$$

где

$$\mathbf{\Omega}_j\mathbf{\Omega}^T=\begin{pmatrix}1&\omega_1&\omega_1^2&\omega_1^3&\omega_1^4\\\omega_j&\omega_2\omega_j&\omega_2^2\omega_j&\omega_2^3\omega_j&\omega_2^4\omega_j\\\omega_j^2&\omega_3\omega_j^2&\omega_3^2\omega_j^2&\omega_3^3\omega_j^2&\omega_3^4\omega_j^2\\\omega_j^3&\omega_4\omega_j^3&\omega_4^2\omega_j^3&\omega_4^3\omega_j^3&\omega_4^4\omega_j^3\\\omega_j^4&\omega_5\omega_j^4&\omega_5^2\omega_j^4&\omega_5^3\omega_j^4&\omega_5^4\omega_j^4\end{pmatrix}=(X_{1j},X_{2j},X_{3j},X_{4j},X_{5j}).$$

С учетом введенных обозначений имеем: $\omega_1=\omega$, $\omega_2=\omega^3$, $\omega_3=\omega^5$, $\omega_4=\omega^7$, $\omega_5=\omega^9$, то есть

$$\omega_j=e^{\frac{(2j-1)\pi i}{5}}=(e^{\frac{\pi i}{5}})^{2j-1}=\omega^{2j-1}.$$

Тогда $Y_j=(1,\omega_j,\omega_j^2,\omega_j^3,\omega_j^4)^T=(1,\omega^{2j-1},\omega^{4j-2},\omega^{6j-3},\omega^{8j-4})^T$, и, следовательно, вектор X_{kj} можно записать в виде:

$$X_{kj}=\begin{pmatrix}\omega_1^{k-1}\\\omega_2^{k-1}\omega_j\\\omega_3^{k-1}\omega_j^2\\\omega_4^{k-1}\omega_j^3\\\omega_5^{k-1}\omega_j^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^{k-1}\\\omega^{3k+2j-4}\\\omega^{5k+4j-7}\\\omega^{7k+6j-10}\\\omega^{9k+8j-13}\end{pmatrix}=\omega^{k-1}\begin{pmatrix}1\\\omega^{2(k+j-1)-1}\\\omega^{4(k+j-1)-2}\\\omega^{6(k+j-1)-3}\\\omega^{8(k+j-1)-4}\end{pmatrix}=\omega^{k-1}Y_{\mathrm{Mod}_5(k+j-1)}.$$

Отсюда

$$\begin{array}{lllll}
X_{11}=Y_1; & X_{21}=\omega Y_2; & X_{31}=\omega^2 Y_3; & X_{41}=\omega^3 Y_4; & X_{51}=\omega^4 Y_5;\\
X_{12}=Y_2; & X_{22}=\omega Y_3; & X_{32}=\omega^2 Y_4; & X_{42}=\omega^3 Y_5; & X_{52}=\omega^4 Y_1;\\
X_{13}=Y_3; & X_{23}=\omega Y_4; & X_{33}=\omega^2 Y_5; & X_{43}=\omega^3 Y_1; & X_{53}=\omega^4 Y_2;\\
X_{14}=Y_4; & X_{24}=\omega Y_5; & X_{34}=\omega^2 Y_1; & X_{44}=\omega^3 Y_2; & X_{54}=\omega^4 Y_3;\\
X_{15}=Y_5; & X_{25}=\omega Y_1; & X_{35}=\omega^2 Y_2; & X_{45}=\omega^3 Y_3; & X_{55}=\omega^4 Y_4.
\end{array}$$

Таким образом,

$$V_j=\hat{\alpha}_1X_{1j}+\hat{\alpha}_2X_{2j}+\hat{\alpha}_3X_{3j}+\hat{\alpha}_4X_{4j}+\hat{\alpha}_5X_{5j},$$

что дает

$$V_1=\hat{\alpha}_1Y_1+(\hat{\alpha}_2\omega)Y_2+(\hat{\alpha}_3\omega^2)Y_3+(\hat{\alpha}_4\omega^3)Y_4+(\hat{\alpha}_5\omega^4)Y_5=$$

$$=a_1Y_1+a_2Y_2+a_3Y_3+a_4Y_4+a_5Y_5=\mathbf{\Omega}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)^T=\mathbf{\Omega}\hat{V}_1,$$

$$V_2=a_1Y_2+a_2Y_3+a_3Y_4+a_4Y_5+a_5Y_1=\mathbf{\Omega}(a_5,a_1,a_2,a_3,a_4)^T=\mathbf{\Omega}\hat{V}_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V_5=a_1Y_5+a_2Y_1+a_3Y_2+a_4Y_3+a_5Y_4=\mathbf{\Omega}(a_2,a_3,a_4,a_5,a_1)^T=\mathbf{\Omega}\hat{V}_5.$$

Аналогично,

$$W_j=\hat{\beta}_1X_{1j}+\hat{\beta}_2X_{2j}+\hat{\beta}_3X_{3j}+\hat{\beta}_4X_{4j}+\hat{\beta}_5X_{5j},$$

что дает

$$W_1=\hat{\beta}_1Y_1+(\hat{\beta}_2\omega)Y_2+(\hat{\beta}_3\omega^2)Y_3+(\hat{\beta}_4\omega^3)Y_4+(\hat{\beta}_5\omega^4)Y_5=$$

$$=b_1Y_1+b_2Y_2+b_3Y_3+b_4Y_4+b_5Y_5=\mathbf{\Omega}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^T=\mathbf{\Omega}\hat{W}_1,$$

$$W_2=b_1Y_2+b_2Y_3+b_3Y_4+b_4Y_5+b_5Y_1=\mathbf{\Omega}(b_5,b_1,b_2,b_3,b_4)^T=\mathbf{\Omega}\hat{W}_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$W_5=b_1Y_5+b_2Y_1+b_3Y_2+b_4Y_3+b_5Y_4=\mathbf{\Omega}(b_2,b_3,b_4,b_5,b_1)^T=\mathbf{\Omega}\hat{W}_5.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Справедливы следующие равенства

$$
\begin{gathered}
\Delta_{12} = |W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5| = |\mathbf{\Omega}\hat{W}_1\ \mathbf{\Omega}\hat{W}_2\ \mathbf{\Omega}\hat{V}_3\ \mathbf{\Omega}\hat{V}_4\ \mathbf{\Omega}\hat{V}_5| = \\
= \det \mathbf{\Omega} |\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{12}, \\
\Delta_{123} = |W_1\ W_2\ W_3\ V_4\ V_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{W}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{123}, \\
\Delta_{1} = |W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{V}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{1}, \\
\Delta_{1234} = |W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ V_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{W}_3\ \hat{W}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{1234}, \\
\Delta_{13} = |W_1\ V_2\ W_3\ V_4\ V_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{V}_2\ \hat{W}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{13}, \\
\Delta_{124} = |W_1\ W_2\ V_3\ W_4\ V_5| = \theta |\hat{W}_1\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{W}_4\ \hat{V}_5| = \theta \hat{\Delta}_{124},
\end{gathered}
\tag{3.192}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad
\hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \\
\hat{\Delta}_{1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad
\hat{\Delta}_{1234} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & b_4 & b_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_5 & b_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}, \\
\hat{\Delta}_{13} = \begin{vmatrix} b_1 & a_5 & b_4 & a_3 & a_2 \\ b_2 & a_1 & b_5 & a_4 & a_3 \\ b_3 & a_2 & b_1 & a_5 & a_4 \\ b_4 & a_3 & b_2 & a_1 & a_5 \\ b_5 & a_4 & b_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad
\hat{\Delta}_{124} = \begin{vmatrix} b_1 & b_5 & a_4 & b_3 & a_2 \\ b_2 & b_1 & a_5 & b_4 & a_3 \\ b_3 & b_2 & a_1 & b_5 & a_4 \\ b_4 & b_3 & a_2 & b_1 & a_5 \\ b_5 & b_4 & a_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}.
\end{gathered}
\tag{3.193}
$$

Замечание 3.54. Из равенств (3.192) следует, что при классификации о.-ф. $L^0(\rho)$ по степени их нерегулярности, которая была проведена в конце раздела 3.7.3, вместо определителей Δ_{12}, Δ_{123}, Δ_1, Δ_{1234} можно использовать определители $\hat{\Delta}_{12}$, $\hat{\Delta}_{123}$, $\hat{\Delta}_1$, $\hat{\Delta}_{1234}$. $\square$

Далее, для определенности будем рассматривать только случай $\beta_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$. Случай, когда $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = \overline{1,5}$, можно свести к предыдущему случаю заменой $x \mapsto 1 - x$. Очевидно, что при такой замене свойство полноты системы к.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ сохраняется.

Тогда, не нарушая общности, можно считать, что $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_5 = 1$, то есть $\beta = (1{,}1{,}1{,}1{,}1)^T$. На основании формулы (3.191), в силу единственности разложения вектора по базису отсюда следует, что $\hat{\beta}_1 = 1$, $\hat{\beta}_2 = ... = \hat{\beta}_5 = 0$, то есть $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$.

Таким образом, в этом случае будем иметь

$$\hat{W}_1 = (1{,}0{,}0{,}0{,}0)^T, \quad \hat{W}_2 = (0{,}1{,}0{,}0{,}0)^T, \quad \ldots, \quad \hat{W}_5 = (0{,}0{,}0{,}0{,}1)^T.$$

С учётом этого формулы (3.193) значительно упрощаются

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{1234} = a_1,$$

$$\hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{13} = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{124} = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{3.194}$$

3.7.5 Аналитическое описание множеств NR_j^k

Множества NR_j^k можно описать и аналитически. Это описание будет существенно использоваться в дальнейшем.

Следующая лемма очевидна. Формулируем ее для полноты картины.

Лемма 3.55. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$ *и* $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$, *где*

$$\hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \qquad \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Следует с очевидностью из определения множества NR_0 и замечания 3.54. □

Следующие две леммы описывают аналитически два имеющихся слабо нерегулярных случая для о.-ф. $L^0(\rho)$. Эти леммы непосредственно не требуются при доказательстве кратной полноты в следующем разделе, но требуются для лучшего понимания последующих лемм.

Лемма 3.56. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих трех альтернативных условий:*

1) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0,$$

где

$$\theta_{11}(s) = a_1 - sa_5,\ \theta_{21}(s) = a_2 - sa_1,\ \theta_{31}(s) = a_3 - sa_2,$$
$$\theta_{41}(s) = a_4 - sa_3,\ \theta_{51}(s) = a_5 - sa_4;$$

2) $a_5 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_4 \neq 0$;

3) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$.

Доказательство. Из определения множества NR_0^0 и замечания 3.54 имеем $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^0$ в том и только том случае, если $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$, $\hat{\Delta}_{123} = 0$. Для указанных здесь определителей будем далее использовать формулы (3.194).

Из алгебры известно, что если $\hat{\Delta}_{123} = 0$, то столбцы этого определителя линейно зависимы. Следовательно существует такой вектор $(\varkappa_1,\varkappa_2)^T \neq (0,0)^T$, что

$$\varkappa_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \varkappa_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.195}$$

Если $\varkappa_1 = 0$, тогда $\varkappa_2 \neq 0$ и, следовательно,

$$a_5 = a_1 = 0. \tag{3.196}$$

Отсюда получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_4 a_2^2. \tag{3.197}$$

Тогда с учетом (3.196) получаем утверждение 2) леммы.

Если же $\varkappa_1 \neq 0$, то, деля (3.195) на $\varkappa_1$, получим

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix}, \tag{3.198}$$

где $s = -\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$.

Здесь возможны два случая: $s \neq 0$ и $s = 0$.

Если в (3.198) $s \neq 0$, то получим

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0. \tag{3.199}$$

Так как в рассматриваемом случае $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$, то вычитая из 1-го столбца этого определителя 2-й столбец, умноженный на s, а из 2-го столбца — 3-й, также умноженный на s, получим с учетом (3.199)

$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s)a_5. \tag{3.200}$$

Отсюда и из (3.199) следует утверждение 1) леммы.

Если же в (3.198) $s = 0$, то получим

$$a_1 = a_2 = 0, \tag{3.201}$$

а из условия $\hat{\Delta}_{12} \neq 0$ аналогично (3.197) получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 a_5^2.$$

Отсюда и из (3.201) получаем утверждение 3) леммы.

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей можно установить, что каждое из трех условий 1)–3) влечёт утверждение $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^0$.

Таким образом, лемма 3.56 полностью доказана. □

Лемма 3.57. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^1$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$ *и при некоторых значениях* $s,t \in \mathbb{C}$, *где* $s \neq 0$, *выполняется условие*

$$\theta_{12}(t,s) = \theta_{22}(t,s) = \theta_{32}(t,s) = 0, \tag{3.202}$$

где

$$\theta_{12}(t,s) = a_1 - ta_5 - sa_4, \quad \theta_{22}(t,s) = a_2 - ta_1 - sa_5, \quad \theta_{32}(t,s) = a_3 - ta_2 - sa_1.$$

Доказательство. Из определения множества NR_0^1 и замечания 3.54 имеем $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^1$ в том и только том случае, если $\hat{\Delta}_{12} = 0$, $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$. Для указанных здесь определителей, как и в предыдущей лемме, используем формулы (3.194).

Так как по условию $\hat{\Delta}_{12} = 0$, то столбцы этого определителя линейно зависимы. Следовательно существует такой вектор $(\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3)^T \neq (0,0,0)^T$, что

$$\varkappa_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \varkappa_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \varkappa_3 \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$, то $\varkappa_1 \neq 0$ и $\varkappa_3 \neq 0$. Следовательно, деля на $\varkappa_1$, получим

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

где $t = -\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$, $s = -\dfrac{\varkappa_3}{\varkappa_1} \neq 0$. Отсюда следует утверждение (3.202) леммы.

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей можно установить, что условия (3.202) и $\hat{\Delta}_{123} \neq 0$ влекут утверждение $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_0^1$.

Таким образом, лемма 3.57 доказана. □

Следующие три леммы описывают имеющиеся для о.-ф. $L^0(\rho)$ три сильно нерегулярных случая.

Лемма 3.58. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

1) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0;$$

2) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad a_4 \neq 0.$$

Доказательство. Из определения множества NR_1 и замечания 3.54 имеем $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ в том и только том случае, если $\hat{\Delta}_1 \neq 0$, $\hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = 0$, $\hat{\Delta}_{1234} \neq 0$. Для указанных здесь определителей, как и в предыдущих леммах, используем формулы (3.194).

Из условия $\hat{\Delta}_{123} = 0$ следует, что найдётся такой вектор $(\varkappa_1, \varkappa_2)^T \neq (0,0)^T$, для которого выполняется соотношение (3.195).

Так как $\hat{\Delta}_{1234} = a_1 \neq 0$, то $\varkappa_1 \neq 0$ и $\varkappa_2 \neq 0$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix}, \tag{3.203}$$

где $s = -\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \neq 0$.

То есть

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad s \neq 0. \tag{3.204}$$

Преобразуем определитель $\hat{\Delta}_{12}$ точно также, как это было сделано выше в доказательстве леммы 3.56 (см. формулу (3.200)), а именно: из 1-го столбца вычтем 2-й столбец, умноженный на s, из 2-го столбца вычтем 3-й, умноженный на s, затем на основании (3.204) получим

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s)a_5.$$

Следовательно, либо $\theta_{31}(s) = 0$, либо $\theta_{51}(s) = 0$, либо $a_5 = 0$. Но в данном случае a_5 не может быть равным нулю, иначе $a_1 = 0$ (см. формулу (3.203)), поэтому, с учетом (3.204), возможны только следующие случаи:

а) $\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0, \quad s \neq 0;$

б) $\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0, \quad s \neq 0;$

в) $\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad a_5 \neq 0, \quad s \neq 0.$

Рассмотрим случай а). Преобразуем

$$\hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

следующим образом: из 1-го столбца вычтем 2-й столбец, умноженный на s, из 2-го столбца вычтем 3-й столбец, умноженный на s, из 3-го столбца вычтем 4-й столбец, умноженный на s. Затем, в соответствии с рассматриваемым случаем а), занулим соответствующие элементы полученного определителя.

Получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & \theta_{51}(s) & a_4 \\ \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & \theta_{11}(s) & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & \theta_{21}(s) & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\theta_{41}(s)\theta_{51}^2(s)a_5.$$

Отсюда следует, в частности, что $\theta_{41}(s) \neq 0$. То есть, условия 1) выполняется.

Рассмотрим случай б). Преобразуем $\hat{\Delta}_1$ аналогично случаю а), получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ \theta_{31}(s) & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}^2(s)\theta_{41}(s)a_4.$$

Отсюда следует, в частности, что $\theta_{41}(s) \neq 0$ и $a_4 \neq 0$. То есть, и условие 2) выполняется.

Рассмотрим случай в). Преобразуем $\hat{\Delta}_1$ аналогично случаям а) и б), получим

$$0 \neq \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Получили противоречие, которое показывает, что случай в) не может иметь места.

Таким образом, мы доказали, что если $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$, то выполняется условие 1) или условие 2).

Непосредственным подсчетом соответствующих определителей можно убедиться, что из условия 1) или из условия 2) следует утверждение $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$.

Тем самым лемма 3.58 доказана. □

Лемма 3.59. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^0$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $a_1 = a_2 = a_3 = 0,\ a_4 \neq 0,\ a_5 \neq 0;$

2) $a_5 = a_1 = a_2 = 0,\ a_3 \neq 0,\ a_4 \neq 0;$

3) $a_4 = a_5 = a_1 = 0,\ a_2 \neq 0,\ a_3 \neq 0.$

Доказательство. Из определения множества NR_1^0 и замечания 3.54 имеем $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^0$ в том и только том случае, когда $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $\hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = \hat{\Delta}_{1234} = 0$. Для указанных здесь определителей опять используем формулы (3.194).

Докажем необходимость условий леммы.

Из $\hat{\Delta}_{1234} = 0$ следует, что $a_1 = 0$. Так как $a_1 = 0$, то $0 = \hat{\Delta}_{123} = -a_2 a_5$, то есть либо $a_2 = 0$, либо $a_5 = 0$. Следовательно, возможны следующие случаи:

а) $a_1 = a_2 = 0$, $a_5 \neq 0$;

б) $a_5 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$;

в) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим последовательно все эти случаи:

В случае а)

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = a_3 a_5^2 \Longrightarrow a_3 = 0 \Longrightarrow \hat{\Delta}_1 = a_4 a_5^3,$$

а так как $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $a_5 \neq 0$, то будет $a_4 \neq 0$, и, тем самым, получаем утверждение 1) леммы.

В случае б)

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = a_4 a_2^2 \Longrightarrow a_4 = 0 \Longrightarrow \hat{\Delta}_1 = a_3 a_2^3,$$

а так как $\hat{\Delta}_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, то будет $a_3 \neq 0$, и, тем самым, получаем утверждение 3) леммы.

В случае в) из условия $0 = \hat{\Delta}_{12}$ никаких новых условий не получаем, так как оно выполняется автоматически. Далее, условие $0 \neq \hat{\Delta}_1 = a_3^2 a_4^2$ дает $a_3 \neq 0$ и $a_4 \neq 0$, а это и есть условие 2) леммы.

Достаточность каждого из условий 1)–3) проверяется непосредственным подсчетом соответствующих определителей.

Таким образом, лемма 3.59 доказана. $\square$

Лемма 3.60. $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^1$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих четырех условий:*

1) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = \theta_{41}(s) = 0, \quad \theta_{51}(s) \neq 0, \quad a_5 \neq 0;$$

2) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0, \quad \theta_{41}(s) \neq 0, \quad a_4 \neq 0;$$

3) *при некотором значении* $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$

$$\theta_{41}(s) = \theta_{51}(s) = \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0, \quad \theta_{31}(s) \neq 0, \quad a_3 \neq 0;$$

4) *при значении* $s \in \mathbb{C}$, *таком, что* $s^5 = 1$,

$$a_1 = p, \quad a_2 = ps, \quad a_3 = ps^2, \quad a_4 = ps^3, \quad a_5 = ps^4,$$

где $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *любое число.*

Доказательство. Пусть $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1^1$. Воспользуемся далее определением множества NR_1^1, замечанием 3.54 и формулами (3.194). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, существует вектор $(\varkappa_1,\varkappa_2) \neq (0,0)$ такой, что

$$\varkappa_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \varkappa_2 \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.205}$$

Так как $\hat{\Delta}_{1234} = a_1 \neq 0$, то из (3.205) сразу следует, что $\varkappa_1 \neq 0$ и $\varkappa_2 \neq 0$. А это влечет существование $s = -\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \neq 0$ такого, что

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_5 \\ a_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = 0,\, a_5 \neq 0. \tag{3.206}$$

Воспользуемся теперь тем, что $\hat{\Delta}_{12} = 0$. Получим

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 \\ a_2 & a_1 & a_5 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}(s)\theta_{51}(s)a_5 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \theta_{31}(s) = 0, \\ \theta_{51}(s) = 0. \end{array} \right. \tag{3.207}$$

Учитывая что в случае $\theta_{51}(s) = 0$, $s \neq 0$ и $a_5 \neq 0$ будет иметь место свойство $a_4 \neq 0$, из (3.206) и (3.207) получим, что возможны только следующие альтернативы:

а) $\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31} = 0, \theta_{51} \neq 0, a_5 \neq 0, s \neq 0;$

б) $\theta_{51} = \theta_{11} = \theta_{21} = 0, \theta_{31} \neq 0, a_4 \neq 0, s \neq 0;$

в) $\theta_{51} = \theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{31} = 0, a_4 \neq 0, s \neq 0$.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

Пусть выполняется условие а). Воспользуемся равенством нулю определителя $\hat{\Delta}_1$

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \theta_{51}(s) & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & \theta_{51}(s) & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = -\theta_{41}^2(s)\theta_{51}(s)a_5,$$

а так как $\theta_{51(s)} \neq 0$ и $a_5 \neq 0$, то отсюда следует, что $\theta_{41}(s) = 0$ и, тем самым, получаем условие 1) леммы.

Пусть выполняется условие б). В этом случае опять воспользуемся равенством нулю определителя $\hat{\Delta}_1$

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ \theta_{31}(s) & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & \theta_{31}(s) & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{31}^2\theta_{41}a_4,$$

а так как $\theta_{31}(s) \neq 0$ и $a_4 \neq 0$, то отсюда получим $\theta_{41}(s) = 0$, что дает условие 3) леммы.

Пусть выполняется условие в). Равенство нулю определителя $\hat{\Delta}_1$ в данном случае выполняется автоматически

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta_{41}(s) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ \theta_{41}(s) & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

и ничего нового не дает.

Здесь возможны два подслучая:

в1) $\theta_{41} \neq 0$;

в2) $\theta_{41} = 0$.

В подслучае в1) сразу получаем утверждение 2) леммы.

Пусть имеет место подслучай в2).

В этом подслучае получим однородную линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} a_1 = sa_5, \\ a_2 = sa_1, \\ a_3 = sa_2, \\ a_4 = sa_3, \\ a_5 = sa_4. \end{cases}$$

относительно неизвестных a_1,a_2, … ,a_5. Она имеет решение только тогда, когда определитель системы равен нулю.

Преобразуем определитель следующим образом

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ -s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -s^2 \\ 0 & 1 & 0 & -s^3 \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -s^3 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -s^3 \\ 0 & 1 & -s^4 \\ 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -s^4 \\ -s & 1 \end{vmatrix} = 1 - s^5 = 0 \Longrightarrow s^5 = 1.$$

Полагаем $a_1 = p$, $a_2 = sp$, $a_3 = s^2p$, $a_4 = s^3p$, $a_5 = s^4p$, где $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ любое число, а s корень уравнения $s^5 = 1$. Тем самым получаем условие 4) леммы.

Следовательно, получены все условия леммы 1)–4). Тем самым необходимость условий леммы доказана.

Достаточность условий 1)–4) проверяется непосредственно путем подсчета соответствующих определителей.

Таким образом, лемма 3.60 доказана. □

Наконец, в следующей лемме описывается последний оставшийся случай, а именно, множество NR_2.

Лемма 3.61. *$L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_2$ тогда и только тогда, когда о.-ф. $L^0(\rho)$ вырожденная, то есть такая о.-ф., у которой или нет с.з., или их конечное число, или все $\rho \in \mathbb{C}$ являются его с.з.*

Доказательство. Пусть $L_0 \in \mathrm{NR}_2$. Тогда в соответствии с определением множества NR_2 и замечанием 3.54 будем иметь

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = \hat{\Delta}_{1234} = 0. \tag{3.208}$$

Используем далее формулы (3.194).

Из этих формул и соотношений (3.208) получим

$$0 = \hat{\Delta}_{1234} = a_1.$$

Далее, так как $a_1 = 0$, то

$$0 = \hat{\Delta}_{123} = \begin{vmatrix} 0 & a_5 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_2 a_5$$

и либо $a_2 = 0$, либо $a_5 = 0$. Поэтому, имеем следующие возможные случаи:

1) $a_1 = a_2 = 0$;

2) $a_5 = a_1 = 0$;

3) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть имеет место случай 1). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & a_5 \\ a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3 a_5^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_5 = 0$.

Таким образом, возможны следующие подслучаи

а) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

б) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$;

в) $a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев отдельно.

Пусть имеет место подслучай а). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_4 a_5^3,$$

откуда следует, что либо $a_4 = 0$, либо $a_5 = 0$. Таким образом, получаем три условия

$$\begin{aligned}
&(i) \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0;\\
&(ii) \quad a_5 = a_1 = a_2 = a_3 = 0;\\
&(iii) \; a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0.
\end{aligned}$$

Пусть теперь имеет место подслучай б). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3^2 a_4^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_4 = 0$. Таким образом, получаем еще одно условие, которого не было выше,

$$(iv) \; a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = 0.$$

Наконец, если имеет место подслучай в), то равенство $\hat{\Delta}_1 = 0$ выполняется автоматически и ничего дополнительного не получаем.

Пусть теперь имеет место случай 2). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_2^2 a_4,$$

откуда следует, что либо $a_2 = 0$, либо $a_4 = 0$. Таким образом, возможны следующие подслучаи:

а) $a_5 = a_1 = a_2 = 0$;

б) $a_4 = a_5 = a_1 = 0$;

в) $a_4 = a_5 = a_1 = a_2 = 0$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев отдельно.

Пусть имеет место подслучай а). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 a_4^2,$$

откуда следует, что либо $a_3 = 0$, либо $a_4 = 0$. Здесь опять получаем либо случай (ii), либо (iv), либо (iii).

Пусть имеет место подслучай б). Тогда

$$0 = \hat{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_2^3 a_3,$$

откуда следует, что либо $a_2 = 0$, либо $a_3 = 0$. Здесь получаем еще одно условие, которого не было ранее

$$(v)\ \ a_3 = a_4 = a_5 = a_1 = 0.$$

Таким образом, установлено, что соотношение (3.208) приводит к выполнению одного из условий (i)–(v).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при каждом условии (i)–(v) выполняются соотношения (3.208), а также равны нулю оставшиеся определители Δ_{13} и Δ_{124} или, что тоже самое в оответствии с формулами (3.192), определители $\hat{\Delta}_{13}$ и $\hat{\Delta}_{124}$, для которых справедливы формулы (3.194).

В результате в формуле (3.190) для определителя $\Delta(\rho)$ в скобках останутся только слагаемые Δ_{12345} и Δ_0, которые с точностью до отличного от нуля коэффициента равны, соответственно, определителям

$$\hat{\Delta}_{12345} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \hat{\Delta}_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

причем последний определитель или равен нулю, или равен некоторой ненулевой константе. Отсюда следует вырожденность о.-ф. $L^0(\rho)$. Таким образом, необходимость утверждения леммы доказана.

Предположим теперь, что о.-ф. $L^0(\rho)$ вырожденная. Тогда из формулы (3.190) видно, что это возможно только в случае

$$\Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_1 = \Delta_{1234} = \Delta_{13} = \Delta_{124} = 0.$$

Отсюда, в силу формул (3.192), следует, что

$$\hat{\Delta}_{12} = \hat{\Delta}_{123} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_{1234} = 0.$$

А это означает, что $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_2$.

Таким образом, и достаточность утверждения леммы установлена.

Тем самым, лемма 3.61 полностью доказана. □

3.7.6 Анализ обобщённой порождающей функции

В соответствии с уточненной классификацией о.-ф. $L^0(\rho)$, проведенной в разделе 3.7.3 (см. пп. ($\mathbf{0}$), ($\mathbf{0}^0$), ($\mathbf{0}^1$), ($\mathbf{1}$), ($\mathbf{1}^0$), ($\mathbf{1}^1$), ($\mathbf{2}$)), а также в силу леммы 3.61, для доказательства теоремы 3.50 нужно рассмотреть случаи только сильно нерегулярных о.-ф. $L^0(\rho)$ из множеств NR_1, NR_1^0 и NR_1^1. Если для о.-ф. $L^0(\rho)$ из этих множеств будет доказана 5-кратная полнота системы их к.ф. в пространстве $L_2[0,1]$, то тем самым теорема 3.50 будет полностью доказана.

Рассуждения в доказательствах кратной полноты систем к.ф. для множеств операторов NR_1, NR_1^0 и NR_1^1 довольно громоздки, но проводятся по одной и той же схеме, состоящей в построении обобщённых п.ф., удовлетворяющих условию (α). Отличие только в деталях конкретных ситуаций.

Поэтому, проведем полное подробное доказательство только для случая $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$. Доказательства для других случаев дадим схематично. Подробные доказательства излагаются в статье [47] автора диссертации.

В соответствии с теорией, изложенной в разделах 3.2, 3.3 и 3.4. в качестве обобщённой п.ф. для о.-ф. $L^0(\rho)$ рассмотрим функцию $g(x,\rho;\Gamma(\rho))$, которая имеет вид следующее представление

$$g(x,\rho;\Gamma(\rho)) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x,\rho) & \dots & y_5(x,\rho) \\ -\gamma_1(\rho) & u_{11}(\rho) & \dots & u_{15}(\rho) \\ -\gamma_2(\rho) & u_{21}(\rho) & \dots & u_{25}(\rho) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ -\gamma_5(\rho) & u_{51}(\rho) & \dots & u_{55}(\rho) \end{vmatrix}. \tag{3.209}$$

Таким образом, при фиксированном $x \in [0,1]$ функция $g(x,\rho;\Gamma(\rho))$ является ц.ф.э.т. по ρ. Характеристический определитель $\Delta(\rho)$ о.-ф. $L^0(\rho)$ также есть ц.ф.э.т. по ρ.

В соответствии со схемой ДКП (см. раздел 3.3), необходимо найти такие в.-ф. $\Gamma(\rho) = (\gamma_1(\rho),\gamma_2(\rho),\dots,\gamma_5(\rho))^T$, которые удовлетворяют условию (α).

Будем искать в.-ф. $\Gamma(\rho)$ в виде

$$\Gamma(\rho) = (\gamma_1,\ \rho\gamma_2,\ \rho^2\gamma_3,\ \dots,\ \rho^4\gamma_5)^T, \tag{3.210}$$

где $\gamma_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,5}$. Обозначим далее

$$\mathbf{\Gamma} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\dots,\gamma_5)^T. \tag{3.211}$$

Тогда на основании формул (3.209)–(3.211) и определения векторов V_j и W_j, введенных в подразделе 3.7.3, получим представление

$$g(x,\rho;\Gamma(\rho)) = \rho^{10} \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & e^{\rho\omega_2 x} & \ldots & e^{\rho\omega_5 x} \\ -\mathbf{\Gamma} & V_1 + e^{\rho\omega_1} W_1 & V_2 + e^{\rho\omega_2} W_2 & \ldots & V_5 + e^{\rho\omega_5} W_5 \end{vmatrix}, \qquad (3.212)$$

где для определителя справа используется удобное для дальнейшего блочное представление.

Запишем функцию $g(x,\rho;\Gamma(\rho))$ подробно, разложив определитель (3.212) по первой строке. Для краткости будем использовать следующие обозначения

$$X^1 = |\mathbf{\Gamma}\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ X^1_2 = |\mathbf{\Gamma}\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \ldots,\ X^3_{124} = |W_1\ W_2\ \mathbf{\Gamma}\ W_4\ V_5|,\ \ldots,$$

где верхний индекс обозначает позицию, на которой находится вектор $\mathbf{\Gamma}$, а нижние индексы обозначают позиции, на которых находятся векторы W_j.

Имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned}
g(x,\rho,\Gamma(\rho)) = {}& \\
&\rho^{10}\Big(e^{\rho\omega_1 x}\,|\mathbf{\Gamma},\, V_2 + e^{\rho\omega_2}W_2,\, V_3 + e^{\rho\omega_3}W_3,\, V_4 + e^{\rho\omega_4}W_4,\, V_5 + e^{\rho\omega_5}W_5| + \\
&+ e^{\rho\omega_2 x}\,|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1,\, \mathbf{\Gamma},\, V_3 + e^{\rho\omega_3}W_3,\, V_4 + e^{\rho\omega_4}W_4,\, V_5 + e^{\rho\omega_5}W_5| + \\
&+ e^{\rho\omega_3 x}\,|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1,\, V_2 + e^{\rho\omega_2}W_2,\, \mathbf{\Gamma},\, V_4 + e^{\rho\omega_4}W_4,\, V_5 + e^{\rho\omega_5}W_5| + \\
&+ e^{\rho\omega_4 x}\,|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1,\, V_2 + e^{\rho\omega_2}W_2,\, V_3 + e^{\rho\omega_3}W_3,\, \mathbf{\Gamma},\, V_5 + e^{\rho\omega_5}W_5| + \\
&+ e^{\rho\omega_5 x}\,|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1,\, V_2 + e^{\rho\omega_2}W_2,\, V_3 + e^{\rho\omega_3}W_3,\, V_4 + e^{\rho\omega_4}W_4,\, \mathbf{\Gamma}|\Big) = \\
= \rho^{10}\Big(&e^{\rho\omega_1 x}\big(X^1 + e^{\rho\omega_2}X^1_2 + e^{\rho\omega_3}X^1_3 + e^{\rho\omega_4}X^1_4 + e^{\rho\omega_5}X^1_5 + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}X^1_{23} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}X^1_{24} + \\
&+ e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}X^1_{25} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4)}X^1_{34} + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)}X^1_{35} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)}X^1_{45} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X^1_{234} + \\
&+ e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X^1_{235} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X^1_{245} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X^1_{345} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X^1_{2345}\big) + \\
&+ e^{\rho\omega_2 x}\big(X^2 + e^{\rho\omega_1}X^2_1 + e^{\rho\omega_3}X^2_3 + e^{\rho\omega_4}X^2_4 + e^{\rho\omega_5}X^2_5 + e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}X^2_{13} + e^{\rho(\omega_1+\omega_4)}X^2_{14} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}X^2_{15} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4)}X^2_{34} + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)}X^2_{35} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)}X^2_{45} + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}X^2_{134} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}X^2_{135} + e^{\rho(\omega_1+\omega_4+\omega_5)}X^2_{145} + e^{\rho(\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X^2_{345} + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5)}X^2_{1345}\big) + \\
&+ e^{\rho\omega_3 x}\big(X^3 + e^{\rho\omega_1}X^3_1 + e^{\rho\omega_2}X^3_2 + e^{\rho\omega_4}X^3_4 + e^{\rho\omega_5}X^3_5 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}X^3_{12} + e^{\rho(\omega_1+\omega_4)}X^3_{14} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}X^3_{15} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}X^3_{24} + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}X^3_{25} + e^{\rho(\omega_4+\omega_5)}X^3_{45} + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}X^3_{124} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}X^3_{125} + e^{\rho(\omega_1+\omega_4+\omega_5)}X^3_{145} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X^3_{245} + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5)}X^3_{1245}\big) + \\
&+ e^{\rho\omega_4 x}\big(X^4 + e^{\rho\omega_1}X^4_1 + e^{\rho\omega_2}X^4_2 + e^{\rho\omega_3}X^4_3 + e^{\rho\omega_5}X^4_5 + e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}X^4_{12} + e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}X^4_{13} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_5)}X^4_{15} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}X^4_{23} + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)}X^4_{25} + e^{\rho(\omega_3+\omega_5)}X^4_{35} + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}X^4_{123} + \\
&+ e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)}X^4_{125} + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}X^4_{135} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X^4_{235} + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)}X^4_{1235}\big) +
\end{aligned}$$

$$+e^{\rho\omega_5 x}\Big(X^5+e^{\rho\omega_1}X_1^5+e^{\rho\omega_2}X_2^5+e^{\rho\omega_3}X_3^5+e^{\rho\omega_4}X_4^5+e^{\rho(\omega_1+\omega_2)}X_{12}^5+e^{\rho(\omega_1+\omega_3)}X_{13}^5+$$
$$+e^{\rho(\omega_1+\omega_4)}X_{14}^5+e^{\rho(\omega_2+\omega_3)}X_{23}^5+e^{\rho(\omega_2+\omega_4)}X_{24}^5+e^{\rho(\omega_3+\omega_4)}X_{34}^5+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}X_{123}^5+$$
$$+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)}X_{124}^5+e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_4)}X_{134}^5+e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X_{234}^5+e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}X_{1234}^5)\Big). \tag{3.213}$$

В разделе 3.3 было введено понятие х.м. $M(\Gamma(\rho))$. Так как вектор $\Gamma(\rho)$, в соответствии с формулой 3.210, полностью определяется вектором $\mathbf{\Gamma}$, то, как и в разделе 3.3, называем многоугольник $M(\Gamma(\rho))$ также и х.м. вектора-параметра $\mathbf{\Gamma}$ и обозначаем его как $M(\mathbf{\Gamma})$, то есть $M(\Gamma(\rho)) = M(\mathbf{\Gamma})$.

Введём вектор $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Gamma} = (\hat\gamma_1,\hat\gamma_2,\ldots,\hat\gamma_5)^T$. Далее будем писать $X_2^1(\mathbf{\Gamma})$, $X_5^1(\mathbf{\Gamma}),\ldots$, чтобы подчеркнуть, какой вектор $\mathbf{\Gamma}$ используется. Аналогично будем обозначать $\hat X_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}})$, $\hat X_5^1(\hat{\mathbf{\Gamma}})$, $\ldots$, где коэффициенты $\hat X_*^*(\hat{\mathbf{\Gamma}})$ строятся по тем же формулам, что и коэффициенты $X_*^*(\Gamma)$, но только вместо векторов V_j, W_j, $\mathbf{\Gamma}$ используются векторы $\hat V_j$, $\hat W_j$, $\hat{\mathbf{\Gamma}}$.

Построение х.м. $M(\mathbf{\Gamma})$ можно описать еще и таким образом. Каждому отличному от нуля коэффициенту $X^s_{ij\ldots k}(\mathbf{\Gamma})$ в выражении выше для $g(x,\rho,\Gamma(\rho))$ соотнесём две точки множества Ω, а именно, $\omega_i+\omega_j+\cdots+\omega_k$ и $\omega_i+\omega_j+\cdots+\omega_k+\omega_s$. Множество всех таких точек обозначим как $\Omega(\mathbf{\Gamma})$. Так как $X^s_{ij\ldots k}(\mathbf{\Gamma})\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\hat X^s_{ij\ldots k}(\hat{\mathbf{\Gamma}})\neq 0$, то, очевидно, $\Omega(\mathbf{\Gamma})=\Omega(\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Тогда справедлива формула $M(\mathbf{\Gamma}) = M(\hat{\mathbf{\Gamma}}) := \operatorname{conv}\Omega(\mathbf{\Gamma})$.

Так как рассматривается случай $L^0(\rho)\in \mathrm{NR}_1$, то, анализируя выражение (3.213) для $g(x,\rho;\Gamma(\rho))$, можно заметить, что «плохими» слагаемыми (с точки зрения выполнения условия $\Gamma(\rho))\in(\alpha)$ или, что тоже самое, $\mathbf{\Gamma}\in(\alpha)$) являются слагаемые с коэффициентами (смысл стрелок будет ясен далее)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(i) & X_2^1 & X_5^1 & X_{23}^1 & X_{25}^1 & X_{34}^1 & X_{45}^1 & X_{234}^1 & X_{345}^1 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(ii) & X_3^2 & X_1^2 & X_{34}^2 & X_{13}^2 & X_{45}^2 & X_{15}^2 & X_{345}^2 & X_{145}^2 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iii) & X_4^3 & X_2^3 & X_{45}^3 & X_{24}^3 & X_{15}^3 & X_{12}^3 & X_{145}^3 & X_{125}^3 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(iv) & X_5^4 & X_3^4 & X_{15}^4 & X_{35}^4 & X_{12}^4 & X_{23}^4 & X_{125}^4 & X_{123}^4 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(v) & X_1^5 & X_4^5 & X_{12}^5 & X_{14}^5 & X_{23}^5 & X_{34}^5 & X_{123}^5 & X_{234}^5 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow
\end{array} \tag{3.214}$$

Причина разбиения этих коэффициентов на пять групп (i)–(v) совершенно понятна, так как в каждой группе верхний индекс один и тот же. Но есть и другие причины, которые будут понятны дальше.

Введём следующий оператор S циклического сдвига вверх

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = (\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\ \ldots,\ \hat{\gamma}_5)^T \ \longmapsto S\hat{\mathbf{\Gamma}} = (\hat{\gamma}_2,\hat{\gamma}_3,\ \ldots,\ \hat{\gamma}_5,\hat{\gamma}_1)^T.$$

Лемма 3.62. *Для любого вектора* $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ *справедливы равенства* (*см. стрелки в таблице* (3.214))

$$\begin{array}{l}
\hat{X}^2_3(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_2(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \hat{X}^2_1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_5(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \ldots,\ \ \hat{X}^2_{145}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_{345}(S\hat{\mathbf{\Gamma}});\\
\hat{X}^3_4(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^2_3(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \hat{X}^3_2(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^2_1(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \ldots,\ \ \hat{X}^3_{125}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^2_{145}(S\hat{\mathbf{\Gamma}});\\
\hat{X}^4_5(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^3_4(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \hat{X}^4_3(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^3_2(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \ldots,\ \ \hat{X}^4_{123}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^3_{125}(S\hat{\mathbf{\Gamma}});\\
\hat{X}^5_1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^4_5(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \hat{X}^5_4(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^4_3(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \ldots,\ \ \hat{X}^5_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^4_{123}(S\hat{\mathbf{\Gamma}});\\
\hat{X}^1_2(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^5_1(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \hat{X}^1_5(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^5_4(S\hat{\mathbf{\Gamma}}),\ \ \ldots,\ \ \hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^5_{234}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}).
\end{array}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство $\hat{X}^2_3(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_2(S\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Остальные равенства доказываются аналогично.

Имеем

$$\hat{X}^2_3(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = |\hat{V}_1\ \hat{\mathbf{\Gamma}}\ \hat{W}_3\ \hat{V}_4\ \hat{V}_5| = \begin{vmatrix} a_1 & \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2\\ a_2 & \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3\\ a_3 & \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4\\ a_4 & \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5\\ a_5 & \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем данный определитель, переставляя 1-й столбец последовательно со 2-м, 3-м, …, 5-м столбцом.

Получим

$$\hat{X}^2_3(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1\\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3\\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1\\ \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2\\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3\\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4\\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель, последовательно переставляя 1-ю строку со 2-й, 3-й, …, 5-й строкой.

Получим

$$\hat{X}_3^2(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_2 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_1 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|(S\hat{\mathbf{\Gamma}})\ \hat{W}_2\ \hat{V}_3\ \hat{V}_4\hat{V}_5\right| = \hat{X}_2^1(S\hat{\mathbf{\Gamma}}).$$

Лемма доказана. □

3.7.7 Доказательство теоремы 3.50 о 5-кратной полноте системы корневых функций

Как было отмечено в начале подраздела 3.7.6, доказательство 5-кратной полноты системы к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ (теорема 3.50) проведём только для случая, когда $L^0(\rho)$ принадлежит множеству NR_1. Но для логической полноты картины всего доказательства и удобства ссылок идеи доказательства остальных случаев также прокомментируем в отдельных пунктах.

3.7.7.1 Доказательство теоремы 3.50 для множеств $\mathrm{NR}_{\mathbf{0}}$, $\mathrm{NR}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{0}}$, $\mathrm{NR}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$

Пусть о.-ф. $L^0(\rho)$ принадлежит любому из множеств NR_0, NR_0^0 или NR_0^1. Эти множества описаны, соответственно, в леммах 3.55–3.57. Во всех этих случаях, как следует из определения этих множеств в конце подраздела 3.7.3, при любом векторе $\mathbf{\Gamma} \neq 0$ будем иметь $M_\Delta \subset M(\mathbf{\Gamma}) \subset M_0$ и M_Δ касается всех сторон 10-угольника M_0, а, следовательно, любой ненулевой вектор $\mathbf{\Gamma} \in (\alpha)$ (см. рисунок 3.15).

Если взять любые линейно независимые векторы $\mathbf{\Gamma}_j$, $j = \overline{1{,}5}$, то будем иметь $\mathbf{\Gamma}_j \in (\alpha)$, $j = \overline{1{,}5}$. Воспользовавшись теперь теоремой 3.21, отсюда получим 5-кратную полноту в пространстве $L_2[0{,}1]$ системы к.ф. оператор-функции $L^0(\rho)$, принадлежащей любому множеству NR_0, NR_0^0 или NR_0^1.

Тем самым, в этом случае 5-кратная полнота системы к.-ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ доказана.

3.7.7.2 Доказательство теоремы 3.50 для множеств NR_1

Предположим, что $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$. Тогда по лемме 3.58 выполняется одно из условий 1)–2). Так как рассуждения для каждого из этих условий аналогичны, далее будем считать для определенности, что выполняется условие 1), то есть при некотором значении $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$ и $a_5 \neq 0$

$$\theta_{11}(s) = \theta_{21}(s) = \theta_{31}(s) = 0,\ \theta_{41}(s) \neq 0,\ \theta_{51}(s) \neq 0, \tag{3.215}$$

где, как и в лемме 3.56, используются обозначения

$$\theta_{11}(s) = a_1 - sa_5,\ \theta_{21}(s) = a_2 - sa_1,\ \theta_{31}(s) = a_3 - sa_2,$$
$$\theta_{41}(s) = a_4 - sa_3,\ \theta_{51}(s) = a_5 - sa_4. \tag{3.216}$$

Из (3.215)–(3.216) следует, что при произвольных $a_5 \neq 0$ и $s \neq 0$ элементы a_1, a_2, a_3 можно выразить через s и a_5

$$a_1 = sa_5,\ a_2 = sa_1 = s^2 a_5,\ a_3 = sa_2 = s^2 a_1 = s^3 a_5,$$
$$a_4 \neq sa_3 = s^4 a_5,\ a_4 \neq \frac{1}{s}\, a_5. \tag{3.217}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.63. *В случае, когда $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ и выполняется условие* (3.217), *справедливы следующие утверждения*

$$\begin{array}{lll}
(\alpha) & \hat{X}^1_{34}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 & \iff \delta_{21}(s) = \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0,\\
(\beta) & \hat{X}^1_{45}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 & \iff \delta_{31}(s) = \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0,\\
(\gamma) & \hat{X}^1_{5}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \hat{X}^1_{25}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 & \iff \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0,\\
(\delta) & \hat{X}^1_{2}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 & \iff \delta_{51}(s) = \hat{\gamma}_5 - s\hat{\gamma}_4 = 0,\\
(\varepsilon) & \hat{X}^1_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 & \iff \delta_{11}(s) = \hat{\gamma}_1 - s\hat{\gamma}_5 = 0.
\end{array}$$

И всегда $\hat{X}^1_{23}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0$ без каких-либо условий на вектор $\hat{\mathbf{\Gamma}}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательно все «плохие» определители из первой строчки таблицы (3.214).

Начнем по порядку с определителя $\hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Выполняя стандартные действия над строками и столбцами определителя и пользуясь соотношениями (3.215), последовательно получим

$$\hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{41} & \theta_{31} & \theta_{21} \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{41} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{51} & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{41} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{41} & 0 & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{51} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{51}\theta_{41}\theta_{51}a_5,$$

где равенство с точкой означает равенство с точностью до знака. Так как по условию $\theta_{41} \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \Longleftrightarrow \delta_{51}(s) = \hat{\gamma}_5 - s\hat{\gamma}_4 = 0$.

Аналогично,

$$\hat{X}_5^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} & \theta_{41} \\ \delta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{41} & \theta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & a_3 \\ \delta_{21} & 0 & \theta_{51} & \theta_{41} \\ \delta_{31} & 0 & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{41}\theta_{51}^2 a_5.$$

Так как по условию $\theta_{51} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}_5^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \Longleftrightarrow \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0$.

Убедимся теперь, что определитель $\hat{X}_{23}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}})$ тождественно равен нулю при выполнении условия (3.215). Преобразовывая определитель аналогично предыдущему, получим

$$\hat{X}_{23}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_3 & a_2 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{31} & \theta_{21} \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \delta_{51} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 & a_5 \\ \delta_{51} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Для определителя $\hat{X}^1_{25}(\hat{\mathbf{\Gamma}})$ аналогично получим

$$\hat{X}^1_{25}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & a_5 & a_4 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_1 & a_5 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & a_3 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_4 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{41} & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & \theta_{11} & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & \theta_{21} & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{41} & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \doteq \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \hat{\gamma}_4 & a_1 \end{vmatrix} = \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \delta_{41} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \theta_{41} \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_3 & a_5 \\ \delta_{41} & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{41}\theta_{41}a_5.$$

Так как $\theta_{41} \neq 0$, $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}^1_{25}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \Longleftrightarrow \delta_{41}(s) = \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0$.

Рассмотрим определитель $\hat{X}^1_{34}(\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Аналогично предыдущему и с учетом (3.217) имеем

$$\hat{X}^1_{34}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_3 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{51} & \theta_{21} \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{31} \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{51} & 0 \\ \delta_{21} & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_1 \end{vmatrix} \doteq$$

$$\doteq a_1\theta_{51}\delta_{21} = a_5 s\theta_{51}\delta_{21}.$$

Так как $s \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $\theta_{51} \neq 0$, то $\hat{X}^1_{34}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \Longleftrightarrow \delta_{21}(s) = \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0$.

Рассмотрим определитель $\hat{X}^1_{45}(\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Имеем

$$\hat{X}^1_{45}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & a_4 \\ \delta_{21} & \theta_{11} & \theta_{51} \\ \delta_{31} & \theta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & \theta_{51} & a_4 \\ \delta_{21} & 0 & \theta_{51} \\ \delta_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{31}\theta_{51}^2.$$

Так как $\theta_{51} \neq 0$, то $\hat{X}^1_{45}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \Longleftrightarrow \delta_{31}(s) = \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0$.

Для определителя $\hat{X}^1_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}})$ аналогично получим

$$\hat{X}^1_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) =$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ \hat{\gamma}_2 & 1 & 0 & 0 & a_3 \\ \hat{\gamma}_3 & 0 & 1 & 0 & a_4 \\ \hat{\gamma}_4 & 0 & 0 & 1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_2 \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \theta_{21} \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_1 \end{vmatrix} \doteq \delta_{11}a_1 = \delta_{11}sa_5.$$

Так как $a_5 \neq 0$, $s \neq 0$, то $\hat{X}^1_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \iff \delta_{11}(s) = \hat{\gamma}_1 - s\hat{\gamma}_5 = 0$.

Наконец, рассмотрим последний определитель из первой строки таблицы (3.214), то есть определитель $\hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}})$. Имеем

$$\hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_3 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}_4 & a_3 & 0 & 1 & 0 \\ \hat{\gamma}_5 & a_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \hat{\gamma}_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \delta_{21} & \theta_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\gamma}_1 & a_5 \\ \delta_{21} & 0 \end{vmatrix} \doteq \delta_{21}a_5.$$

Так как $a_5 \neq 0$, то $\hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}}) = 0 \iff \delta_{21}(s) = \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0$.

Из полученных утверждений вытекает справедливость доказываемой леммы. Тем самым, лемма 3.63 доказана. □

Лемма 3.64. *Если* $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ *и выполняется условие* (3.215), *то векторы* $\mathbf{\Gamma}^k_j = \mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{\Gamma}}^k_j$, $j = \overline{1{,}5}$, *при* $k = 1$, *и при* $k = 2$ *линейно независимы и удовлетворяют условию* (α), *где*

1) *в случае* $s^5 \neq 1$:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1 = \left(1,\, s,\, s^2,\, s^3,\, s^4\right)^T, \hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2 = \left(s^4,\, 1,\, s,\, s^2,\, s^3\right)^T, \hat{\mathbf{\Gamma}}^1_3 = \left(s^3,\, s^4,\, 1,\, s,\, s^2\right)^T,$$
$$\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_4 = \left(s^2,\, s^3,\, s^4,\, 1,\, s\right)^T, \hat{\mathbf{\Gamma}}^1_5 = \left(s,\, s^2,\, s^3,\, s^4,\, 1\right)^T; \quad (3.218)$$

2) *в случае* $s^5 = 1$, *то есть когда* $s = \varepsilon_j$, $j = \overline{1{,}5}$, *где* ε_j — *различные корни 5-й степени из 1,*

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}^2_j = (1,\, \varepsilon_j,\, \varepsilon_j^2,\, \varepsilon_j^3,\, \varepsilon_j^4)^T \quad j = \overline{1{,}5}. \quad (3.219)$$

Доказательство. В соответствии с леммой 3.63 «плохие» коэффициенты группы (i) в таблице (3.214) будут равны нулю, если потребовать

$$\delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = 0. \quad (3.220)$$

Это приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$, $\ldots \hat{\gamma}_5$

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_1 - s\hat{\gamma}_5 = 0, \\ \hat{\gamma}_2 - s\hat{\gamma}_1 = 0, \\ \hat{\gamma}_3 - s\hat{\gamma}_2 = 0, \\ \hat{\gamma}_4 - s\hat{\gamma}_3 = 0, \\ \hat{\gamma}_5 - s\hat{\gamma}_4 = 0. \end{cases} \tag{3.221}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -s \\ -s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} = 1 - s^5.$$

Система (3.221) имеет нетривиальное решение только тогда, когда ее определитель равен нулю, то есть $s^5 = 1$ или $s = \varepsilon_j$, $j = \overline{1{,}5}$, где ε_j есть различные корни 5-й степени из 1. В каждом из этих случаев решением этой системы с точностью до умножения на константу будут векторы (3.219). Так как $\det(\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^2, \ldots, \hat{\mathbf{\Gamma}}_5^2) \neq 0$, как определитель Вандермонда различных чисел, то векторы (3.219) линейно независимы.

Пусть $\mathbf{\Gamma}_j^2 = \mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2$, $j = \overline{1{,}5}$. Покажем, что $\mathbf{\Gamma}_j^2 \in (\alpha)$ для каждого $j = \overline{1{,}5}$.

Зафиксируем любое $j = \overline{1{,}5}$. По построению, в силу леммы 3.63 и условий (3.220), при $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2$ все коэффициенты группы (i) в таблице (3.214) обратятся в ноль.

Имеет место равенство

$$S\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_j \\ \varepsilon_j^2 \\ \varepsilon_j^3 \\ \varepsilon_j^4 \end{pmatrix} = \varepsilon_j \hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2.$$

В силу этого равенства, лемм 3.62 и 3.63 коэффициенты группы (ii) таблицы (3.214) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}_3^2(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^0)$

$$\hat{X}_3^2(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \hat{X}_2^1(S\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \varepsilon_j \hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = 0.$$

Аналогично можно показать, что коэффициенты группы (iii) таблицы (3.214) также равны нулю. В самом деле, имеем, например, для $\hat{X}_4^3(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^0)$

$$\hat{X}_4^3(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \hat{X}_3^2(S\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \varepsilon_j \hat{X}_3^2(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \varepsilon_j \hat{X}_2^1(S\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = \varepsilon_j^2 \hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^2) = 0.$$

И так далее аналогично для остальных групп коэффициентов (iv)–(v).

В результате получим, что все «плохие» коэффициенты функции $g(x,\rho;\Gamma(\rho))$ (коэффициенты из таблицы (3.214)) в этом случае равны нулю, а, следовательно, х.м. $M(\mathbf{\Gamma}_j^2)$ будет совпадать с многоугольником $M_\Delta = M_1$ (см. рисунок 3.16). Таким образом, $\mathbf{\Gamma}_j^2 \in (\alpha)$.

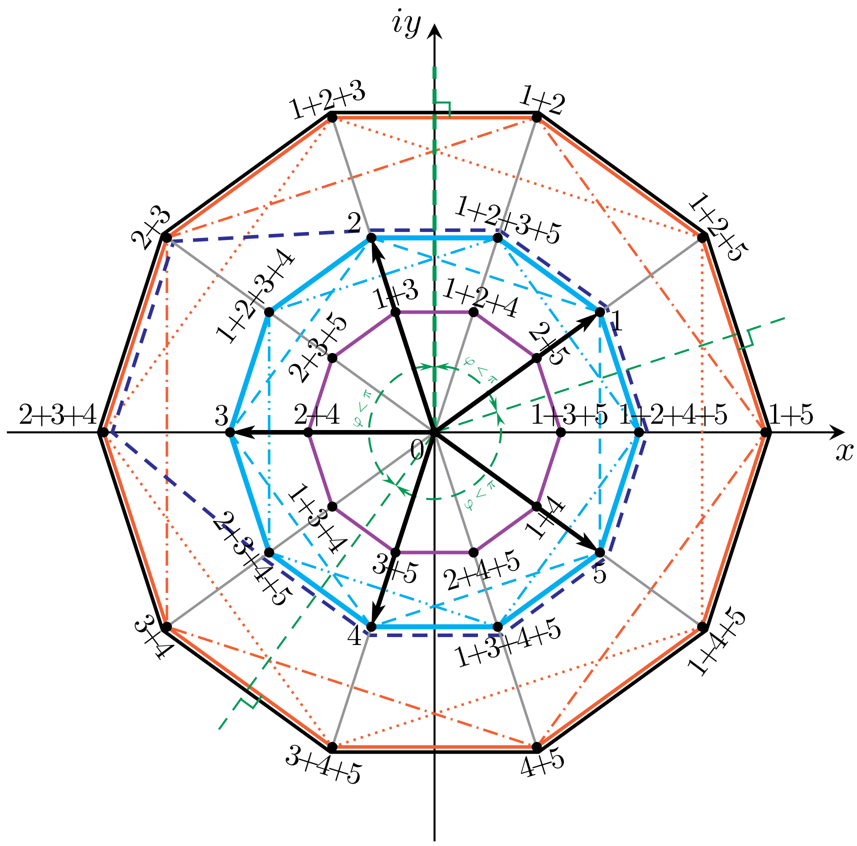

Рисунок 3.16 — Множество $M_\Delta = M_1$ (средний 10-уголник) и $M(\Gamma_1^1)$ (неправильный многоугольник, ограниченный штриховой линией)

Рассмотрим теперь случай, когда $s^5 \neq 1$. В этом случае система (3.221) имеет только тривиальное решение. Поэтому, в этом случае пытаемся искать вектор $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ из условия выполнения всех равенств нулю справа в утверждениях (α)–(ε) леммы 3.63 кроме одного. В результате также получим пять векторов-параметров $\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^1$ (с точностью до умножения на отличную от нуля константу), определяемых формулой (3.218).

При этом имеют место следующие утверждения:

1°) для $\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1$ не выполняется равенство (ε), то есть $\hat{X}_{234}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (3.214) равны нулю ($\delta_{11}(s) \neq 0$, $\delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = 0$);

2°) для $\hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1$ не выполняется равенство (α), то есть $\hat{X}_{34}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{345}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (3.214) равны нулю ($\delta_{21}(s) \neq 0$, $\delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = 0$);

3°) для $\hat{\mathbf{\Gamma}}_3^1$ не выполняется равенство (β), то есть $\hat{X}_{45}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_3^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (3.214) равны нулю ($\delta_{31}(s) \neq 0$, $\delta_{41}(s) = \delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = 0$);

4°) для $\hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1$ не выполняется равенство (γ), то есть $\hat{X}_5^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1) \neq 0$ и $\hat{X}_{25}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (3.214) равны нулю ($\delta_{41}(s) \neq 0$, $\delta_{51}(s) = \delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = 0$);

5°) для $\hat{\mathbf{\Gamma}}_5^1$ не выполняется равенство (δ), то есть $\hat{X}_2^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_5^1) \neq 0$, а все остальные коэффициенты группы (i) таблицы (3.214) равны нулю ($\delta_{51}(s) \neq 0$, $\delta_{11}(s) = \delta_{21}(s) = \delta_{31}(s) = \delta_{41}(s) = 0$).

Справедливы следующие соотношения

$$|\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_3^1\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_5^1| = \begin{vmatrix} 1 & s^4 & s^3 & s^2 & s \\ s & 1 & s^4 & s^3 & s^2 \\ s^2 & s & 1 & s^4 & s^3 \\ s^3 & s^2 & s & 1 & s^4 \\ s^4 & s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix} = (1 - s^5)^4 \neq 0,$$

откуда следует линейная независимость векторов $\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^1$, $j = \overline{1{,}5}$.

Покажем теперь, что $\mathbf{\Gamma}_j^1 = \mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{\Gamma}}_j^1 \in (\alpha)$, для каждого $j = \overline{1{,}5}$.

Рассуждения проведём только для случая $j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Очевидно,

$$S\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1 = \hat{\mathbf{\Gamma}}_5^1,\ \ S\hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1 = \hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1,\ \ S\hat{\mathbf{\Gamma}}_3^1 = \hat{\mathbf{\Gamma}}_2^1,\ \ S\hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1 = \hat{\mathbf{\Gamma}}_3^1,\ \ S\hat{\mathbf{\Gamma}}_5^1 = \hat{\mathbf{\Gamma}}_4^1. \tag{3.222}$$

Выясним, какие коэффициенты из таблицы (3.214) на векторе $\mathbf{\Gamma}_1^1$ не равны нулю.

По построению в силу леммы 3.63 и утверждения 1°) выше имеем $\hat{X}_{234}^1(\hat{\mathbf{\Gamma}}_1^1) \neq 0$. Далее, используя соотношения (3.214), леммы 3.62, 3.63 и и утверждения 2°)–2°), будем иметь

$$\begin{array}{ll}
0 \neq \hat{X}^1_{34}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^5_{23}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^5_{23}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^5_{23}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}^1_{345}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^5_{234}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^5_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^5_{234}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}^1_{45}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_3) = \hat{X}^5_{34}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^4_{23}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^4_{23}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}^1_{5}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_4) = \hat{X}^5_{4}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_3) = \hat{X}^4_{3}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^3_{2}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^3_{2}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}^1_{25}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_4) = \hat{X}^5_{14}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_3) = \hat{X}^4_{35}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_2) = \hat{X}^3_{24}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^3_{24}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0; \\
0 \neq \hat{X}^1_{2}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_5) = \hat{X}^5_{1}(S\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_4) = \cdots = \hat{X}^2_{3}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) & \Longrightarrow \hat{X}^2_{3}(\hat{\mathbf{\Gamma}}^1_1) \neq 0.
\end{array}$$

Следовательно, все коэффициенты из таблицы (3.214) на векторе $\mathbf{\Gamma}^1_1$ обращаются в нуль, кроме коэффициентов $X^1_{234}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^5_{23}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^5_{234}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^4_{23}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^3_{2}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^3_{24}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, $X^2_{3}(\mathbf{\Gamma}^1_1)$.

В этом случае нетрудно установить, что х.м. вектора-параметра $\mathbf{\Gamma}^1_1$ есть многоугольник $M(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, вершинами которого являются точки

$$\omega_2,\ \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5,\ \omega_1, \omega_1+\omega_2+\omega_4+\omega_5,\ \omega_5,\ \omega_1+\omega_3+\omega_4+\omega_5,$$
$$\omega_4,\ \omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5,\ \omega_2+\omega_3+\omega_4,\ \omega_2+\omega_3$$

(см. на рисунке 3.16 неправильный многоугольник, ограниченный штриховой линией).

Рассмотрим многоугольники $M(\mathbf{\Gamma}^1_1)$ и $M_\Delta = M_1$. В качестве трёх перпендикуляров, исходящих из начала координат, к сторонам многоугольника $M(\mathbf{\Gamma}^1_1)$, на которых лежат вершины многоугольника M_Δ, обладающих свойством, что угол между соседними перпендикулярами меньше π, можно взять лучи (см. рисунок 3.16): $(0,\omega_1+\omega_2+\omega_3/2)$, $(0,\omega_3+\omega_4+\omega_5/2)$, $(0,\omega_1+\omega_5+\omega_2/2)$. А это означает, что $\mathbf{\Gamma}^1_1 \in (\alpha)$.

Аналогично рассматриваются случаи $j = 2,3,4,5$. Геометрически там будут рисунки, аналогичные рисунку 3.16, но повернутые на углы, кратные $2\pi/5$.

Таким образом, лемма 3.64 полностью доказана. □

Таким образом, в случае общего положения $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ и $s^5 \neq 1$ в соответствии с леммой 3.64 получили пять линейно независимых векторов-параметров Γ^1_j, $j = \overline{1,5}$, для которых $\mathbf{\Gamma}^1_j \in (\alpha)$. Воспользовавшись теперь теоремой 3.21, отсюда получим 5-кратную полноту системы к.-ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ в пространстве $L_2[0,1]$ в случае, когда $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$, $s^5 \neq 1$.

В случае $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$ и $s^5 = 1$ (это пять подслучаев сильно-нерегулярных о.-ф. $L^0(\rho)$, которые являются в определенном смысле вырожденными подслучаями случая общего положения $s^5 \neq 1$) в соответствии с леммой 3.64 будем иметь для каждого $s = \varepsilon_j$, $j = \overline{1,5}$, только один вектор-параметр $\mathbf{\Gamma}_j^2 \in (\alpha)$ и воспользоваться теоремой 3.21 в этих подслучаях нельзя. Но для таких $s = \varepsilon_j$ по построению все «плохие» коэффициенты таблицы (3.214) равны нулю и, кроме того, зануляются дополнительно еще десять коэффициентов в представлении (3.213) о.п.ф. $g(x,\rho,\Gamma(\rho))$. Используя этот сильно упрощенный вид обобщённой п.ф. $g(x,\rho,\Gamma(\rho))$ и теорию роста целых функций, принцип Фрагмена-Линделёфа и рассуждения, аналогичные рассуждениям [60; 205], можно непосредственно доказать 5-кратную полноту системы к.ф. и в этих вырожденных случаях $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_1$, $s = \varepsilon_j$, $j = \overline{1,5}$. Подробности опускаем.

Тем самым, в случае множества NR_1 5-кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.-ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ доказана.

3.7.7.3 Доказательство теоремы 3.50 для множества NR_1^0 и NR_1^1

Предположим, о.-ф. $L^0(\rho)$ принадлежит множествам NR_1^0 или NR_1^1. Доказательство теоремы 3.50 в этих случаях проводится по схеме, аналогичной схеме из пункта 3.7.7.2 для множества NR_1, основанной на использовании леммы 3.58, с учетом специфики рассматриваемых случаев NR_1^0 или NR_1^1, которая отражена в леммах 3.59 и 3.60, соответственно. Поэтому подробности опускаем.

Тем самым, в случае множеств NR_1^0 и NR_1^1 5-кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы к.-ф. оператор-функции $L^0(\rho)$ также имеет место.

3.7.7.4 Доказательство теоремы 3.50 для множества NR_2

Предположим $L^0(\rho) \in \mathrm{NR}_2$. Утверждение теоремы 3.50 в рассматриваемом случае следует из леммы 3.61. В этом случае о.-ф. $L^0(\rho)$ вырожденная.

Следовательно, в случае множества NR_2 утверждение теоремы 3.50 также установлено.

На основании пунктов 3.7.7.1–3.7.7.4 и замечания в начале подраздела 3.7.6 получим утверждение доказываемой теоремы 3.50.

Следовательно, теорема 3.50 полностью доказана.

3.7.8 Доказательство теоремы 3.49 о полноте системы корневых функций

На основании леммы 3.61 из доказанной теоремы 3.50 получим утверждение теоремы 3.49.

Таким образом, теорема 3.49 полностью доказана.

Заключение

В диссертации исследованы следующие вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и дифференциальных о.-ф.:

— асимптотика по спектральному параметру экспоненциального вида ф.с.р. обыкновенного дифференциального уравнения общего вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [a,b], \tag{4.1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, и фундаментальной матрицы решений общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y'(x) - A(x,\lambda)Y(x) = 0,\ x \in [a,b], \tag{4.2}$$

где $A(x,\lambda)$ и $Y(x)$ — $n \times n$ матрицы-функции, $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр,

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \frac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda);$$

— равномерная оценка внутри основного интервала разности частичных сумм разложений в ряды по с.п.ф. дифференциального оператора L, определяемого д.в.

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y, \qquad p_j(x) \in L[0,1], \tag{4.3}$$

с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и регулярными по Биркгофу краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1}(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

и в обычный тригонометрический ряд Фурье в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента $p_1(x)$ в терминах общих модулей непрерывности, равномерная равносходимость этих разложений в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности логарифмическими функциями;

— m- кратная полнота ($1 \leqslant m \leqslant n$) в пространстве $L_2[0,1]$ системы корневых функций сильно нерегулярных дифференциальных оператор-функций $L(\lambda)$, порожденных дифференциальным выражением

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{4.5}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.6}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами.

Получены следующие основные результаты.

1. Для дифференциального уравнения (4.1) найдены асимптотические формулы экспоненциального типа решений при наименьших условиях на коэффициенты

$$a_0(x) \in W_1^1[a,b], \quad a_j(x) \in L_1[a,b], \quad j = \overline{1,n} \quad a_0(x) \neq 0, \quad x \in [a,b]$$

   и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ дифференциального выражения.

2. Для дифференциальной системы (4.2) найдены асимптотические формулы экспоненциального типа фундаментальной матрицы решений при наименьших условиях на коэффициенты

$$A_1(x) \in \mathfrak{W}_1^1[a,b],\ A_0(x) \in \mathfrak{L}_1[a,b],\ A_{-1}(x,\lambda) \in \mathfrak{L}_1[a,b],$$

   и новым видом остаточного члена, учитывающего свойства главных по степени влияния на асимптотику коэффициентов $A_1(x)$ и $A_0(x)$ дифференциальной системы (аналогов коэффициентов $a_0(x)$ и $a_1(x)$ в случае уравнения (4.1)).

3. Найдены оценки разности частичных сумм нового типа разложений в ряды по собственным и присоединённым функциям дифференциального оператора L вида (4.3)–(4.4) и в обычный тригонометрический ряд Фурье в терминах общих модулей непрерывности коэффициента при $n-1$-й производной и разлагаемой функции.

4. Доказаны новые теоремы равносходимости в равномерной метрике внутри основного интервала разложений в ряды по собственным и присоединённым функциям дифференциального оператора L вида (4.3)–(4.4) и в обычный тригонометрический ряд Фурье при наименьших требованиях на коэффициенты дифференциального выражения в случае, когда модули непрерывности коэффициента при $n-1$-й

производной и разлагаемой функции оцениваются сверху медленно меняющимися и логарифмическими функциями.

5. Предложен новый подход, а именно метод обобщённых порождающих функций, к исследованию m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n$) полноты в $L_2[0,1]$ системы корневых функций оператор-функций вида (4.5)–(4.6). Получены достаточные условия кратной полноты.
6. Исследованы приложения метода обобщённых порождающих функций к отдельным новым сильно нерегулярным оператор-функциям, к новому классу сильно нерегулярных оператор-функций, определённых дифференциальным выражением (4.5) с характеристиками, лежащими на двух лучах, исходящих из начала, и распадающимися краевыми условиями
$$U_i^1(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,l},$$
$$U_i^1(y,\lambda) := \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1,n},$$
где α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$, и к новым дифференциальным операторам, порожденным простейшим дифференциальным выражением
$$\ell^0(y) := y^{(5)}(x), \tag{4.7}$$
и двухточечными двучленными краевыми условиями
$$U_\nu^0(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{1,5}, \tag{4.8}$$
где $\alpha_\nu,\beta_\nu \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$, $\nu = \overline{1,5}$.

Перспективы развития разработанных в диссертации методов и подходов весьма обширны. В дальнейшем эти методы и подходы могут быть перенесены на другие классы операторов и о.-ф. или обобщены.

Метод получения асимптотических формул для решений дифференциального уравнения (4.1) и дифференциальной системы (4.2) может быть перенесён на случай уточнённых асимптотических формул, а также на случай кратных характеристик.

Подход к исследованию равносходимости с тригонометрическим рядом разложений в ряды по с.п.ф. оператора L вида (4.3)–(4.4) и получения оценок разности соответствующих частичных сумм может быть обобщён на случай, когда присутствует старший коэффициент $p_0(x)$, перенесён на случай сходимости в метрике пространства $L_p[0,1]$ при $1 \leqslant p < \infty$, на случай дифференциального оператора с многоточечными краевыми условиями, на случай дифференциального оператора с коэффициентами-распределениями, на случай дифференциального оператора на графах.

Метод обобщённых порождающих функций исследования кратной полноты системы к.ф. $L(\lambda)$ вида (4.5)–(4.6) может быть обобщён на о.-ф, порождённые более общими д.в., в частности, неоднородными д.в. с постоянными коэффициентами, перенесён на о.-ф. с кратными характеристиками, на о.-ф. с многоточечными краевыми условиями, на о.-ф. на графах, на дифференциальные операторы вида (4.7)–(4.8) произвольного порядка с более общими краевыми условиями, а также на другие аналогичные о.-ф.

Для метода обобщённых порождающих функций исследования кратной полноты системы к.ф. оператор-функции $L(\lambda)$ n-го порядка было бы весьма интересным получить более точные достаточные условия m-кратной полноты в случае $1 \leqslant m \leqslant n-1$, а также исследовать кратную полноту системы к.ф. в специальных гильбертовых пространствах, введённых А. А. Шкаликовым [205–207].

Результаты работы носят достаточно общий характер и могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к исследованию несамосопряжённых операторов.

Результаты диссертации могут составить содержание спецкурсов по спектральной теории дифференциальных о.-ф. для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Список сокращений и условных обозначений

Основные условные обозначения:

$AC[a,b]$ — класс абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$;

$BV[a,b]$ — класс функций ограниченной вариации;

$W_p^k[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — нормированные пространства гладких функций на отрезке $[a,b]$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывных производных и k-ю производную из $L_p[a,b]$;

$\|f(x)\|_{W_p^k[a,b]} := \|f(x)\|_{L_p[a,b]} + \|f^{(k)}(x)\|_{L_p[a,b]}$;

$W_p^0[a,b] := L_p[a,b]$;

$\|f(x)\|_p := \|f(x)\|_{L_p[a,b]}$ — в случае, когда ясно, по какому отрезку $[a,b]$ берется норма;

$\|f(x)\|_{pk} := \|f(x)\|_{W_p^k[a,b]}$ — в случае, когда ясно, по какому отрезку $[a,b]$ берется норма;

$\|f(x)\| := \|f(x)\|_{C[a,b]}$ — в случае, когда ясно, по какому отрезку $[a,b]$ берется норма;

$\mathfrak{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — нормированное пространство $n\times n$ матриц-функций с компонентами из пространства $L_p[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_p := \max\limits_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_p$ для $n \times n$ матрицы-функции $X(t)$ с компонентами $\{X(t)\}_{ij}$;

$\mathfrak{W}_p^1[a,b]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — нормированное пространство $n \times n$ матриц-функций с компонентами из пространства $W_p^1[a,b]$ и с нормой, определяемой формулой $|||X(t)|||_{p1} := \max\limits_{i,j} \|\{X(t)\}_{ij}\|_{p1}$;

$\mathbb{P}_k$ — множество алгебраических многочленов степени не выше k;

$E_k(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике пространства $L_p[a,b]$ алгебраическими многочленами степени не выше k;

δ_{kj} — символ Кронекера ($\delta_{kj} = 1$ при $k = j$ и $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$);

$\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 0$ при $x < 0$ и $\chi(x) = 1$ при $x \geqslant 0$.

$\operatorname{conv}\{X\}$ — выпуклая оболочка множества X;

$\operatorname{cl} X$ — замыкание множества X;

$\operatorname{int} X$ — внутренность множества X;

$\rho_j = \rho\omega_j$, $\rho_{js} = \rho(\omega_j - \omega_s)$;

C, $C(\cdot)$, $C(\cdot,\cdot)$, $\ldots$, — различные константы, в скобках записываются параметры, от которых могут зависеть эти константы.

Основные сокращения:

в.-п. — вектор-параметр;

в.-ф. — вектор-функция;

д.в. — дифференциальное выражение;

к.д. — квазидифференциальный;

к.п.ф. — классическая порождающая функция;

к.ф. — корневые функции;

м.-ф. — матрица-функция;

м.м.ф. — медленно меняющаяся функция;

метод о.п.ф. — метод обобщённых порождающих функций;

о.п.ф. — обобщённая порождающая функция;

о.-ф. — оператор-функция;

п.в. — почти всюду;

п.м.ф. — правильно меняющаяся функция;

п.ф. — порождающая функция;

с.д. — сопряженная диаграмма:

с.з. — собственные значения;

с.п.ф. — собственные и присоединённые функции;

с.ф. — собственная функция;

схема ДКП — схема доказательства кратной полноты;

условие МИ — условие медленного изменения;

ф.с.р. — фундаментальная система решений;

ф.м.р. — фундаментальная матрица решений;

х.м. — характеристический многоугольник;

х.о. — характеристический определитель;

ц.ф.э.т. — целая функция экспоненциального типа.

Приложение А

Сопряжённая диаграмма целой функции экспоненциального типа

В данном приложении приводятся сведения из [109] о сопряженной диаграмме целой функции экспоненциального типа (ц.ф.э.т) и ее связи с индикаторной диаграммой, даваемой теоремой Д. Пойа (D. Pólya).

Пусть $f(z)$ есть целая функция, представляющаяся рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \tag{A.1}$$

Введём функцию

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Целая функция не выше чем первого порядка и нормального типа называется *целой функцией конечной степени*, причем *степенью функции* называется величина

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r}.$$

Таким образом, функция порядка меньшего единицы или первого порядка, но минимального типа есть функции нулевого порядка.

Функции конечной степени часто встречаются в краевых задачах теории дифференциальных уравнений.

Целая функция порядка $\rho = 1$ и нормального типа называется *целой функцией экспоненциального типа* (ц.ф.э.т.). Ясно, что множество ц.ф.э.т. есть подмножество множества целых функций конечной степени.

Степень ц.ф.э.т. совпадает с типом этой функции. Если σ — степень ц.ф.э.т. $f(z)$, то, как показано в [109, с. 113], справедливо равенство

$$\sigma = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{A.2}$$

Каждой ц.ф.э.т. (A.1) ставится в соответствие функция

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \tag{A.3}$$

которую называют *ассоциированной по Борелю функции* $f(x)$.

Ввиду (A.2), ряд (A.3) представляет функцию, аналитическую в области $|z| > \sigma$.

Наименьшая выпуклая область $\bar{I}_f$, содержащая все особенности $\varphi(z)$, называется *сопряжённой диаграммой функции* $f(z)$. Она, очевидно, расположена в круге $|z| \leqslant \sigma$.

Для характеристики зависимости роста целых функций конечного порядка ρ от направления, по которому точка z стремится к бесконечности, Э. Фрагмен и Э. Линделёф [27] ввели функцию, которую назвали *индикатором функции* $f(z)$. Для ц.ф.э.т. эта функция определяется следующей формулой

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Индикатор $h_f(\theta)$ имеет простую геометрическую интерпретацию.

Если G есть ограниченная выпуклая область, то *опорной функцией* этой области называется функция

$$k(\theta) = \sup_{x+iy\in G} (x\cos\theta + y\sin\theta) = \sup_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}).$$

Как показано в [109, с. 104], индикатор роста произвольной целой функции первого порядка и, в частности, ц.ф.э.т. есть опорная функция некоторой ограниченной выпуклой области. Эта выпуклая область называется *индикаторной диаграммой* данной функции.

Д. Пойа [28] принадлежит следующая теорема [109, с. 114]. Сформулируем эту теорему только для случая ц.ф.э.т.

Теорема A.1. *Сопряженная диаграмма произвольной целой функции экспоненциального типа есть зеркальное отражение в вещественной оси её индикаторной диаграммы.*

Таким образом, если $\bar{I}_f$ есть сопряженная диаграмма ц.ф.э.т. $f(z)$, то I_f есть индикаторная диаграмма функции $f(z)$.

Приведём два примера ц.ф.э.т. из [109, с. 116] и построим для них сопряженные диаграммы. Сопряжённые диаграммах именно таких функций рассматриваются в главе 3.

Пример A.2. Если

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{\mu_k z},$$

то ассоциированной по Борелю к $f(z)$ является функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{z - \mu_k}.$$

Особенностями функции $\varphi(z)$ являются точки μ_k, $k = \overline{1,n}$. В соответствии с определением, сопряженная диаграмма функции $f(z)$ есть наименьшая выпуклая область (многоугольник), содержащая все точки μ_k, т. е. справедливо равенство

$$\bar{I}_f = \operatorname{conv}\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n\}. \tag{A.4}$$

Пример А.3. Если

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \big(b_{k0} + b_{k1}z + \cdots + b_{k\rho_k} z^{\rho_k}\big) e^{\mu_k z},$$

то ассоциированной по Борелю к $f(z)$ является функция

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_{k0}}{z - \mu_k} + \frac{b_{k1}}{(z - \mu_k)^2} + \cdots + \frac{b_{k\rho_k}\rho_k!}{(z - \mu_k)^{\rho_k+1}} \right).$$

Особенностями функции $\varphi(z)$ являются те же самые точки μ_k, $k = \overline{1,n}$. В соответствии с определением, сопряженная диаграмма функции $f(z)$ есть то же самое ограниченное выпуклое множество $\bar{I}_f$, что и в предыдущем примере, т. е. справедливо равенство (А.4).

Список литературы

1. *Alimov Š. A., Joó I.* Equiconvergence theorem with exact order // *Stud. Sci. Math. Hung.* — 1980. — Vol. 15. — Pp. 431–439.

2. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and Inverse Scattering on the Line. — Providence: AMS, 1988. — Vol. 28 of *Mathematical Surveys and Monographs.* — 209 pp.

3. *Benzinger H. E.* Green's function for ordinary differential operators // *J. Dif. Equations.* — 1970. — Vol. 7, no. 3. — Pp. 478–496.

4. *Benzinger H. E.* The L_p behavior of eigenfunction expansions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 174. — Pp. 333–344.

5. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 pp.

6. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1908. — Vol. 9. — Pp. 219–231.

7. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order // *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.* — 1923. — Vol. 58. — Pp. 51–128.

8. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // *Indiana Univ. Math. J.* — 2012. — Vol. 61, no. 1. — Pp. 359–398.

9. *Eberhard W.* Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme // *Math. Z.* — 1976. — Vol. 146, no. 3. — Pp. 213–221.

10. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // *Math. Z.* — 1984. — Vol. 188, no. 1. — Pp. 55–68.

11. *Freiling G.* Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in $L_2[0,1]$ // *ZAMM.* — 1985. — Vol. 65, no. 5. — Pp. 336–338. — URL: https://doi.org/10.1007/s00025-016-0599-7.

12. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // *Math. Ann.* — 1910. — Vol. 69. — Pp. 331–371. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01456326.

13. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // *Math. Ann.* — 1911. — Vol. 71. — Pp. 38–53. — URL: https://doi.org/10.1007/BF01456927.

14. *Hobson E. W.* On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions // *Proc. London Math. Soc.* — 1908. — Vol. 6. — Pp. 349–395.

15. *Horn J.* Über eine lineare Differetialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkülichen Parameter // *Math. Ann.* — 1899. — Vol. 52. — Pp. 271–292.

16. *Ignatiev M. Y.* Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* — 2020. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 17–28. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-17-28.

17. *Karamata J.* Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood // *Mathematica (Cluj).* — 1930. — Vol. 3. — Pp. 33–48.

18. *Kaufmann F. J., Luther W. J.* Degree of convergence of Birkhoff series, direct and inverse theorems // *J. Math. Anal. Appl.* — 1994. — Vol. 187, no. 1. — Pp. 156–168.

19. *Kurbanov V. M.* Dependence rate of equiconvergence on the module of continuity of potential of the Sturm-Liouville operator // *Stud. Sci. Math. Hung.* — 2004. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 347–364.

20. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1939. — Vol. 46. — Pp. 151–190.

21. *Liouville J.* Second Mémoire. Sur le développment des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramétre variable // *J. Math. Pures Appl.* — 1837. — Vol. 2. — Pp. 19–35.

22. *Maric V.* Regular variation. — New York: Springer Verlag, 2000. — 127 pp.

23. *Mennicken R., Möller M.* Boundary eigenvalue problems // *Notas de algebra y analisis.* — 1986. — Vol. 46. — Pp. 1–100.

24. *Mennicken R., Möller M.* Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. — Amsterdam: Elsevier Science, 2003. — Vol. 192 of *North-Holland Math. Stud.* — 518 pp. — URL: https://books.google.ru/books?id=ze2tvoola9wC.

25. *Minkin A. M.* Equiconvergence theorems for differential operators // *J. Math. Sci.* — 1999. — Vol. 96, no. 6. — Pp. 3631–3715. — URL: https://doi.org/10.1007/bf02172664.

26. *Parameswaran S.* Partition functions whose logarithms are slowly oscillating // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1961. — Vol. 100. — Pp. 217–240.

27. *Phragmén E., Lindelöf E.* Sur une extension d'un principe classique de l'analyse // *Acta Math.* — 1908. — Vol. 31. — Pp. 381–406.

28. *Pólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreichen // *Math. Z.* — 1929. — Vol. 29. — Pp. 549–640.

29. *Radzieskii G. V.* The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions // Some problems of the modern theory of differential equations. — Kiev: Inst. Math. Ukr. Nat. Acad. Sci., 1994. — Pp. 14–27.

30. *Reshnick S. I.* Extreme values, regular variation and point processes. — New York: Springer Verlag, 1987. — 320 pp.

31. *Rykhlov V. S.* On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n-1)$-st derivative // *Soviet Math. Dokl.* — 1984. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 777–779. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с

ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // *Докл. АН СССР.* — 1984. — Т. 279, № 5. — С. 1053–1056.).

32. *Rykhlov V. S.* Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n-1)$-th derivative // *Differential Equations.* — 1990. — Vol. 26, no. 6. — Pp. 704–715. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // *Дифференц. уравнения.* — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 975–989.).

33. *Rykhlov V. S.* Completeness of eigenfunctions of quadratic pencils of ordinary differential operators // *Russian Math. (Iz. VUZ).* — 1992. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 33–42. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // *Изв. вузов. Мат.* — 1992. — № 2. — С. 35–44.).

34. *Rykhlov V. S.* Asymptotics of the system of solutions of a general differential equation with parameter // *Ukr. Math. J.* — 1996. — Vol. 48, no. 1. — Pp. 108–121. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром // *Укр. мат. журн.* — 1996. — Т. 48, № 1. — С. 96–108.).

35. *Rykhlov V. S.* Eigenfunction completeness for a third-order ordinary differential bundle of operators // *Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 1996. — Vol. 3, no. 3/4. — Pp. 406–411.

36. *Rykhlov V. S.* Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators // *Res. Math.* — 1996. — Vol. 29. — Pp. 153–168. — URL: https://doi.org/10.1007/BF03322215.

37. *Rykhlov V. S.* On the completeness of eigenfunctions of differential pencils of operators // *Russian Math. Surveys.* — 1996. — Vol. 51, no. 5. — Pp. 926–927. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций дифференциальных пучков операторов // *Успехи мат. наук.* — 1996. — Т. 51, № 5(311). — С. 153–154.).

38. *Rykhlov V. S.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh

Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 7. — Simferopol: Simferopol State University, 1997. — Pp. 70–73.

39. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // *Res. Math.* — 1999. — Vol. 36. — Pp. 342–353. — URL: https://doi.org/10.1007/BF03322121.

40. *Rykhlov V. S.* Completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients // *Russian Math. (Iz. VUZ).* — 2009. — Vol. 53, no. 6. — Pp. 33–43. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // *Изв. вузов. Мат.* — 2009. — № 6. — С. 42–53.). URL: https://doi.org/10.3103/S1066369X09060061.

41. *Rykhlov V. S.* Completeness of root functions of the simplest strongly irregular differential operators with two-point two-term boundary conditions // *Doklady Mathematics.* — 2009. — Vol. 80, no. 2. — Pp. 762–764. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями // *Доклады Академии Наук.* — 2009. — Т. 428, № 6. — С. 740–743.). URL: https://doi.org/10.1134/S1064562409050342.

42. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // *Res. Math.* — 2015. — Vol. 68, no. 3–4. — Pp. 427–440. — URL: https://doi.org/10.1007/s00025-015-0450-6.

43. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of ordinary differential pencils with constant coefficients // *Lobachevskii J. Math.* — 2017. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 730–740. — URL: https://doi.org/10.1134/S1995080217040187.

44. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients // *Res. Math.* — 2017. — Vol. 72, no. 1–2. — Pp. 281–301. — URL: https://doi.org/10.1007/s00025-016-0599-7.

45. *Rykhlov V. S.* On multiple completeness of root functions for ordinary differential polynomial pencils with constant coefficients // *J. Math. Sci.* — 2020. — Vol. 250, no. 4. — Pp. 340–361. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка с постоянными коэффициентами // *СМФН.* — 2017. — Vol. 63, № 2. — С. 340–361. — URL: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361). URL: https://doi.org/10.1007/s10958-020-05034-2.

46. *Rykhlov V. S.* On eigenfunction Expansions for a class of irregular quadratic pencils of second-order differential operators // *Lobachevskii J. Math.* — 2021. — Vol. 42, no. 5. — Pp. 1014–1026. — URL: https://doi.org/10.1134/S1995080221050152.

47. *Rykhlov V. S.* On the completeness of eigenfunctions of one 5th-order differential operator // *J. Math. Sci.* — 2024. — Vol. 282, no. 2. — Pp. 254–291. — (Trans.: *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного дифференциального оператора 5-го порядка // *СМФН.* — 2022. — Т. 68, № 2. — С. 338–375. — URL: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-2-338-375). URL: https://doi.org/10.1007/s10958-024-07173-2.

48. *Schlesinger L.* Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters // *Math. Ann.* — 1907. — Vol. 63. — Pp. 277–300.

49. *Sadovnichaya I. V.* Equiconvergence theorems for Sturm–Lioville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ -norm) // *Eurasian Math. J.* — 2010. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 137–146.

50. *Steinhaus H.* Sur le développment du produit de deux fonctions en une série de Fourier // Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie. — Kraków, 1913. — Pp. 113–116.

51. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1926. — Vol. 28. — Pp. 695–761.

52. *Stone M. H.* Irregular differential systems of order two and related expansion problems // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1927. — Vol. 29. — Pp. 23–53.

53. *Tamarkine J. D.* Sur quelques points de la theory des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1912. — Vol. 34. — Pp. 345–382.

54. *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // *Math. Z.* — 1928. — Vol. 27(1). — Pp. 1–54. — URL: https://doi.org/10.1007/bf01171084.

55. *Афонин С. В., Ломов И. С.* О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // *Докл. РАН.* — 2010. — Т. 431, № 2. — С. 151–153.

56. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

57. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

58. *Блинкова О. В., Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентам // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2014. — Т. 14, № 4. — С. 574–584. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-4-574-584.

59. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов // *Мат. заметки.* — 2011. — Т. 90, № 1. — С. 22–33. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm8628.

60. *Вагабов А. И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.02. — Москва, 1987. — 201 с.

61. *Вагабов А. И.* Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина // *Дифференц. уравнения.* — 1993. — Т. 29, № 1. — С. 41–49.

62. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994. — 160 с.

63. *Вагабов А. И.* Об асимптотике по параметру решений дифференциальных систем с коэффициентами из класса L_q // *Дифференц. уравнения.* — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 16–22.

64. *Вазов В. Р.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Перевод с англ. В. Ф. Бутузова и [др.] / Под ред. [и с предисл.] А. Б. Васильевой. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

65. *Вербицкий Б. В.* Одно глобальное свойство матриц-функций, зависящих от нескольких переменных // *Изв. вузов. Мат.* — 1978. — № 1. — С. 8–17.

66. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье // *Докл. РАН.* — 2001. — Т. 380, № 6. — С. 731–735.

67. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Асимптотика решений уравнения Штурма-Лиувилля с сингулярными коэффициентами // *Мат. заметки.* — 2015. — Т. 98, № 6. — С. 832–841. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm10976.

68. *Волков В. Е., Йо И.* Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // *Дифференц. уравнения.* — 1986. — Т. 22, № 11. — С. 1865–1876.

69. *Гасымов М. Г.* К теории полиномиальных операторных пучкове // *Докл. АН СССР.* — 1971. — Т. 199, № 4. — С. 747–750.

70. *Гасымов М. Г., Магеррамов А. М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // *Докл. АН Азерб. ССР.* — 1974. — Т. 30, № 12. — С. 9–12.

71. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // *Укр. мат. журн.* — 1990. — Т. 42, № 11. — С. 1460–1469.

72. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 3. — С. 384–396.

73. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // *Докл. АН СССР.* — 1991. — Т. 316, № 2. — С. 265–270.

74. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // *Мат. заметки.* — 1994. — Т. 56, № 1. — С. 3–15.

75. *Гуреев В. С., Рыхлов В. С.* О двукратной полноте корневых функций одного сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов 5-го порядка // Мат. Мех.: сб. науч. трудов. Вып. 20. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2018. — С. 23–27.

76. *Гуреев В. С., Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов пятого порядка с распадающимися краевыми условиями // Сб. материалов междун. конф. КРОМШ-2018 «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 66–68.

77. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Пер. с анл. — М.: Мир, 1974. — Т. 3. — 664 с.

78. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // В сб.: Математика и ее приложения. Теория, методы, алгоритмы. Межвуз. сб. научн. трудов. Вып. 2. — Саратов: Изд-во СГУ, 1991. — С. 70–72.

79. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Мат. Мех.: Сб. науч. трудов. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. — С. 40–42.

80. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф.* — 2007. — Т. 7, № 2. — С. 10–14. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2007-7-2-10-14.

81. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи пятого порядка // В сб.: Исследования по алгебре, теории чисел,

функциональному анализу и смежным вопросам. Межвуз. сб. научн. трудов. Вып. 5. — Саратов: Изд-во СГУ, 2009. — С. 14–17.

82. *Игнатьев М. Ю.* О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью // *Мат. заметки.* — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 846–863.

83. *Ильин В. А.* О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // *Докл. АН СССР.* — 1975. — Т. 223, № 3. — С. 548–551.

84. *Ильин В. А.* О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка М. В. Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов // *Докл. АН СССР.* — 1975. — Т. 225, № 3. — С. 497–499.

85. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I // *Дифференц. уравнения.* — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 771–794.

86. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II // *Дифференц. уравнения.* — 1980. — Т. 16, № 6. — С. 980–1009.

87. *Ильин В. А.* Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // *Дифференц. уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 11. — С. 1862–1879.

88. *Ильин В. А.* Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1 // *Дифференц. уравнения.* — 1991. — Т. 27, № 4. — С. 577–597.

89. *Ильин В. А., Йо И.* Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции // *Докл. АН СССР.* — 1978. — Т. 243, № 6. — С. 1381–1383.

90. *Ильин В. А., Йо И.* Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма–Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции // *Дифференц. уравнения.* — 1979. — Т. 15, № 7. — С. 1175–1193.

91. *Кабанов С. Н., Рыхлов В. С.* Скорость равносходимости в аналоге теоремы Штейнгаза и оптимизация ее порядка в одном частном случае. — Саратов: Саратовский университет, 1990. — 17 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 13.06.90, № 4378-В90.

92. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *Докл. АН СССР.* — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11–14.

93. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // *Успехи мат. наук.* — 1971. — Т. 26, № 4. — С. 15–41.

94. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Перевод с англ. Б. М. Левитина. — М.: ИЛ, 1958. — 474 с.

95. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // *Мат. сб.* — 2001. — Т. 192, № 10. — С. 33–55. — URL: https://doi.org/10.4213/sm601.

96. *Косарев А. П., Шкаликов А. А.* Спектральные асимптотики решений 2×2-системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // *Мат. заметки.* — 2021. — Т. 110, № 6. — С. 939–943. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm13337.

97. *Косарев А. П., Шкаликов А. А.* Асимптотики по спектральному параметру для решений (2×2)-систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Мат. заметки.* — 2023. — Т. 114, № 4. — С. 543–562. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm14119.

98. *Косарев А. П., Шкаликов А. А.* Асимптотические представления решений $(n \times n)$-систем обыкновенных дифференциальных уравнений

с большим параметром // *Мат. заметки.* — 2024. — Т. 116, № 2. — С. 266–289. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm14398.

99. *Косарев А. П., Шкаликов А. А.* Асимптотические разложения решений $(n \times n)$-систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром // *Мат. заметки.* — 2024. — Т. 116, № 6. — С. 923–940. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm14508.

100. *Купцов Н. П.* Теорема равносходимости для разложении Фурье в пространствах Банаха // *Мат. заметки.* — 1967. — Т. 1, № 4. — С. 469–474.

101. *Курбанов В. М.* Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям дифференциального оператора n-го порядка с локально-суммируемыми коэффициентами. — Баку, 1994. — 73 с. — Деп. в АзНИИНТИ 14.07.94, № 21.

102. *Курбанов В. М.* О неравенстве Хаусдорфа–Юнга для систем корневых вектор-функций дифференциального оператора n-го порядка // *Дифференц. уравнения.* — 1997. — Т. 33, № 3. — С. 358–367.

103. *Курбанов В. М.* О скорости равносходимости спектральных разложений // *Докл. РАН.* — 1999. — Т. 365, № 4. — С. 444–449.

104. *Курбанов В. М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. I // *Дифференц. уравнения.* — 1999. — Т. 35, № 12. — С. 1619–1633. — URL: http://mi.mathnet.ru/de10045.

105. *Курбанов В. М.* Равносходимость биортогональных разложений по корневым функциям дифференциальных операторов. II // *Дифференц. уравнения.* — 2000. — Т. 36, № 3. — С. 319–335. — URL: http://mi.mathnet.ru/de10107.

106. *Лажетич Н.* О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // *Дифференц. уравнения.* — 1981. — Т. 17, № 12. — С. 2149–2159.

107. *Лажетич Н.* О сходимости спектральных разложений, отвечающих неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Штурма–Лиувилля, для функций из класса H_p^α // *Дифференц. уравнения.* — 1984. — Т. 20, № 1. — С. 61–68.

108. *Лебедь Г. К.* Нервенства для полиномов и их производных // *Докл. АН СССР.* — 1957. — Т. 117, № 4. — С. 570–572.

109. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1956. — 632 с.

110. *Ломов И. С.* О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля в интегральной метрике // *Дифференц. уравнения.* — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1480–1493.

111. *Ломов И. С.* Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех.* — 1995. — № 4. — С. 43–54.

112. *Ломов И. С.* Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера // *Докл. РАН.* — 1995. — Т. 342, № 6. — С. 735–738.

113. *Ломов И. С.* Коэффициентные условия сходимости в $L_p(0,1)$ биортогональных разложений функций // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 31–39.

114. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т. 34, № 5. — С. 619–628. — URL: https://mi.mathnet.ru/de9712.

115. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II // *Дифференц. уравнения.* — 1998. — Т. 34, № 8. — С. 1066–1077. — URL: https://www.mathnet.ru/rus/de9749.

116. *Ломов И. С.* Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими

коэффициентами // *Дифференц. уравнения.* — 1999. — Т. 35, № 8. — С. 1046–1057.

117. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I // *Дифференц. уравнения.* — 2001. — Т. 37, № 3. — С. 328–342. — URL: https://doi.org/10.1023/A:1019242515472.

118. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II // *Дифференц. уравнения.* — 2001. — Т. 37, № 5. — С. 648–660. — URL: https://doi.org/10.1023/A:1019268615898.

119. *Ломов И. С.* Равномерная сходимость и сходимость в L_p на замкнутом интервале спектральных разложений неклассических обыкновенных дифференциальных операторов: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.02. — Москва, 2002. — 291 с.

120. *Ломов И. С.* Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка // *Дифференц. уравнения.* — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 632–646.

121. *Ломов И. С.* Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложенийот расстояния внутреннего компакта до границы // *Дифференц. уравнения.* — 2010. — Т. 46, № 10. — С. 1409–1420.

122. *Ломов И. С.* Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений // *Дифференц. уравнения.* — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1077–1086.

123. *Ломов И. С.* Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф.* — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 405–418. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418.

124. *Ломов И. С.* Спектральный метод В. А. Ильина. Несамосопряженные операторы. II. Оценка скорости равносходимости спектральных разложений. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2023. — 380 с.

125. *Ломов И. С., Марков А. С.* Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка // *Дифференц. уравнения.* — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 557–563. — URL: https://doi.org/10.1134/S03740641130.

126. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

127. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 259 с.

128. *Минкин А. М.* Принцип локализации для рядов по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. — С. 68–80.

129. *Минкин А. М.* Теорема равносходимости для разложений по обобщенной операторной функции симметрического дифференциального оператора и в интеграл Фурье // Функц. анализ. Спектральная теория. Вып. 14. — Ульяновск: УГПИ имени И. Н. Ульянова, 1980. — С. 109–112.

130. *Минкин А. М.* Теорема равносходимости для одного класса диссипативных дифференциальных операторов // Исследования по математике, физике и их приложениям. Тезисы докладов. — Уфа: РТП БФАН СССР, 1981. — С. 28–30.

131. *Минкин А. М.* Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Саратов, 1982. — 129 с.

132. *Минкин А. М.* Разложение по собственным функциям одного класса негладких дифференциальных операторов // *Дифференц. уравнения.* — 1990. — Т. 26, № 2. — С. 356–358.

133. *Мисеев Е. И.* Формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения // *Докл. АН СССР.* — 1975. — Т. 223, № 3. — С. 562–565.

134. *Моисеев Е. И.* Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения дифференциального уравнения // *Дифференц. уравнения.* — 1980. — Т. 16, № 5. — С. 827–844.

135. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

136. *Никольская Е. И.* Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса L_1 // *Дифференц. уравнения.* — 1992. — Т. 28, № 4. — С. 598–612.

137. *Радзиевский Г. В.* О свойствах решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, зависящих от параметра // *Укр. мат. журн.* — 1991. — Т. 43, № 9. — С. 1213–1231.

138. *Радзиевский Г. В.* Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // *Функц. анал. и его прил.* — 1995. — Т. 29, № 3. — С. 87–90.

139. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 292 с.

140. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964. — 464 с.

141. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям одного класса квазидифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 1. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1977. — С. 151–169.

142. *Рыхлов В. С.* Равносходимость для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной // Функц. анализ. Спектральная теория. Вып. 14. — Ульяновск: УГПИ имени И. Н. Ульянова, 1980. — С. 113–115.

143. *Рыхлов В. С.* Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 2. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. — С. 57–75.

144. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Саратов, 1981. — 129 с.

145. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных операторов // Исследования по математике, физике и их приложениям. Тезисы докладов. — Уфа: РТП БФАН СССР, 1981. — С. 36–38.

146. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений квазидифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения и теория функций. Разложение и сходимость. Вып. 5. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. — С. 51–59.

147. *Рыхлов В. С.* Безусловная сходимость разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Вычислительные методы и программирование. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. — С. 64–71.

148. *Рыхлов В. С.* О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза // Функц. анализ. Спектральная теория: Межвуз. сб. науч. тр. — Ульяновск: УГПИ имени И. Н. Ульянова, 1984. — С. 102–110.

149. *Рыхлов В. С.* Зависимость скорости равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов от структурных характеристик разлагаемой функции и коэффициентов операторов // Теория функций и приближений. Труды 2-й Саратовской зимней школы. 24 января — 5 февраля 1984 г.: Межвуз. науч. сб. Ч. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. — С. 78–81.

150. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка // Исследования по теории операторов: Сб. статей. — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 128–140.

151. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений дифференциального уравнения в терминах модулей непрерывности // Конструктивная теория функций и ее приложения. — Махачкала: Изд-во Дагестанского ун-та, 1994. — С. 100–101.

152. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром. — Саратов: Саратовский университет, 1994. — 19 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 14.02.95, № 434-В95.

153. *Рыхлов В. С.* Асимптотические формулы для решений дифференциальной системы первого порядка. — Саратов: Саратовский университет, 1995. — 19 с. — Рукопись депонирована ВИНИТИ 19.10.95, № 2781-В95.

154. *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. Мех.: Сб. науч. трудов. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. — С. 114–117.

155. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // *Интегр. преобр. и спец. функции: Информ. бюллетень.* — 2001. — Т. 2, № 1. — С. 85–103.

156. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота собственных функций простейшего пучка 5-го порядка // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2001). Vol. 12. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, 2002. — С. 42–51.

157. *Рыхлов В. С.* Полнота собственных функций некоторых классов нерегулярных дифференциальных операторов // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Thirteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2002). Vol. 13. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, 2003. — С. 165–169.

158. *Рыхлов В. С.* О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче // *Докл. РАЕН.* — 2004. — № 4. — С. 72–79.

159. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Fifteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2004). Vol. 15. — Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University, 2005. — С. 47–54.

160. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. Мех.: Сб. науч. трудов. Вып. 7. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. — С. 107–110.

161. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // *Уч. Зап. Тавр. Нац. ун-та, сер.: Мат. Мех. Инф. и киберн.* — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 87–91.

162. *Рыхлов В. С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка // *Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Збірник праць Ін-ту мат. НАН України.* — 2009. — Т. 6, № 1. — С. 237–249.

163. *Рыхлов В. С.* О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2009. — Т. 9, № 1. — С. 31–44. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-1-31-44.

164. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2010. — Т. 10, № 2. — С. 24–34. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-2-24-34.

165. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2013. — Т. 13, № 1. — С. 21–26. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-21-26.

166. *Рыхлов В. С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // *ТВИМ.* — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

167. *Рыхлов В. С.* О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза // *ТВИМ.* — 2015. — № 3(28). — С. 62–81.

168. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов третьего порядка // *ТВИМ.* — 2016. — № 1(31). — С. 87–103.

169. *Рыхлов В. С.* Разложение по корневым функциям сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с кратными характеристиками // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 165–174. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-2-165-174.

170. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций нерегулярных пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // *ТВИМ.* — 2018. — № 4(41). — С. 90–112.

171. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и распадающимися краевыми условиями // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 134–151. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-2-134-151.

172. *Рыхлов В. С.* Оценка близости частичных сумм разложений по корневым функциям регулярного линейного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Сб. материалов междун. конф. КРОМШ-2024 «XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2024. — С. 11–13.

173. *Рыхлов В С.* Об оценке разности частичных сумм разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы международ. Воронеж. зимней мат. школы (30 января — 4 февраля 2025 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2025. — С. 291–295.

174. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф.* — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 45–58. — URL: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-4-45-58.

175. *Рыхлов В. С., Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов с весом // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. — С. 32–49.

176. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями // *СМФН.* — 2020. — Т. 66, № 3. — С. 373–530. — URL: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2020-66-3-373-530.

177. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // *Мат. заметки.* — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.

178. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотические формулы для фундаментальной системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с коэффициентами распределениями // *arXiv: 1704.02736V1.* — 2017. — С. 1–28.

179. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // *Мат. сб.* — 2020. — Т. 211, № 11. — С. 129–166. — URL: https://doi.org/10.4213/sm9340.

180. *Садовничая И. В.* О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением // *Дифференц. уравнения.* — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 656–664.

181. *Садовничая И. В.* О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // *Мат. сб.* — 2010. — Т. 201, № 9. — С. 61–76. — URL: https://doi.org/10.4213/sm7598.

182. *Садовничая И. В.* Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями // *Докл. РАН.* — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 162–163.

183. *Садовничая И. В.* Вопросы равносходимости для операторов Штурма-Лиувилля и Дирака : дис. ... доктора физ.-мат. наук : 01.01.01. — Москва, 2016. — 204 с.

184. *Садовничая И. В.* Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега // *Труды МИАН.* — 2016. — Т. 293. — С. 296–324. — URL: https://doi.org/10.1134/S0371968516020205.

185. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. Пер. с анл. / Под ред. Золотарева В. М. — М.: Наука. Физматлит, 1985. — 144 с.

186. *Стеклов В. А.* Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations différentielles du second ordre et leurs applications au probléme du devéloppement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les dites fonctions // *Сообщ. Харьк. мат. об-ва.* — 1907. — Т. 10. — С. 97–199. — Пер. на рус.: Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям / Ред. и коммент. Н. С. Ландскофа. Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956. С. 1—138.

187. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917. — 308 с.

188. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: ИЛ, 1961. — Т. 2. — 555 с.

189. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Саратов, 1987. — 126 с.

190. *Федорюк М. В.* Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка // В кн.: Хеминг Дж. Введение в метод фазовых инегралов (метол ВКБ). — М.: Мир, 1965. — С. 169–176.

191. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

192. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов в конечноном интервале // *Докл. АН СССР.* — 1962. — Т. 146, № 6. — С. 1294–1297.

193. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... доктора физ.-мат. наук : 01.01.01. — Новосибирск, 1973. — 242 с.

194. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов // *Мат. сборник.* — 1977. — Т. 102(104), № 3. — С. 457–472.

195. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // *Мат. сб.* — 1981. — Т. 114(156), № 3. — С. 378–405. — URL: https://doi.org/10.1070/SM1982v042n03ABEH002257.

196. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // В сб.: Исследования по теории операторов. — Уфа: БФ АН СССР, 1988. — С. 182–193.

197. *Хромов А. П.* Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // *Дифференц. уравнения.* — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1691–1696.

198. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех.* — 2000. — № 2. — С. 21–26.

199. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // *СМФН.* — 2004. — Т. 10. — С. 3–163. — URL: http://mi.mathnet.ru/cmfd5.

200. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // *Мат. сб.* — 2006. — Т. 197, № 11. — С. 115–142. — URL: https://doi.org/10.4213/sm1534.

201. *Хрыптун В. Г.* Разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям // Обратные задачи для дифференц. уравнений. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1972. — С. 132–140.

202. *Черных Н. И.* О приближении функций полиномами со связями // *Труды МИАН.* — 1967. — Т. 88. — С. 75–130.

203. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // *Докл. АН СССР.* — 1938. — Т. 18, № 8. — С. 523–526.

204. *Шин Д.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // *Мат. сб.* — 1940. — Т. 7(49), № 3. — С. 479–532.

205. *Шкаликов А. А.* О полноте и базисности собственных и присоединенных функций краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. — Москва, 1976. — 121 с.

206. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // *Функц. анал. и его прил.* — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 69–80.

207. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 9. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. — С. 190–229.

208. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // *Дифференц. уравнения.* — 1992. — Т. 28, № 8. — С. 1355–1362.

209. *Юрко В. А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // *Мат. сб.* — 1995. — Т. 186, № 6. — С. 133–160.