

На правах рукописи



ЕВСТИФЕЕВ Евгений Валентинович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ
ПЕРЕМЕЖАЮЩЕГОСЯ ПОВЕДЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ
ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В
ОДНОНАПРАВЛЕННО И ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ
ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С РАЗЛИЧНОЙ
ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА

1.3.4. – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Саратов – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования “Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского” на кафедре физики открытых систем института физики.

Научный руководитель:

Москаленко Ольга Игоревна, д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского”, г. Саратов, профессор кафедры физики открытых систем

Официальные оппоненты:

Клиньшов Владимир Викторович, д.ф.-м.н., доцент, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук”, г. Нижний Новгород, ведущий научный сотрудник отдела нелинейной динамики

Андреев Андрей Викторович, к.ф.-м.н., федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова”, г. Москва, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского института прикладного искусственного интеллекта и цифровых решений

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского”, г. Нижний Новгород

Защита состоится “25” декабря 2025 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.2.392.01 на базе ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского” (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, 11 корпус, аудитория 515).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского” (Саратов, ул. Университетская, 42) и на сайте <https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-01/issledovanie-osobennostey-peremezhayuschegosya-povedeniya>.

Автореферат разослан “30” октября 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент



М.М. Слепченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследуемой проблемы.

Обобщенная хаотическая синхронизация является одним из наиболее интересных явлений радиофизики¹. Данное явление характеризуется существованием связи между состояниями взаимодействующих систем в виде функционального соотношения (в общем виде – функционала)². Примечательно, что такой тип синхронизации наблюдается в системах самой различной природы и может возникать при однонаправленной и взаимной связи между ними.

Изучение обобщенной синхронизации и явлений, происходящих вблизи ее границы, до сих пор не утратило актуальности, поскольку данное явление обладает широким потенциалом для применения в различных сферах человеческой деятельности, от исследования взаимодействия систем различной природы до скрытой передачи информации и моделирования динамики отдельных нейронов и нейронных сетей, и машинного обучения³.

Вблизи границы обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение – режим перемежающейся обобщенной синхронизации, причем тип перемежаемости, реализуемой в данном случае, в значительной степени определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем. Так, в системах с относительно простой топологией аттрактора (например, системах Ресслера с аттракторами ленточного типа на границе обобщенной синхронизации наблюдается перемежаемость типа on-off⁴, в то время как в системах со сложной топологией аттрактора (системах с двулистной структурой, как, например, у систем Лоренца или генераторов

¹А. С. Пиковский, М. Г. Розенблум, Ю. Куртс. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003; V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. 2nd Edition, Berlin: Springer, Heidelberg, 2007; A. G. Balanov, N. B. Janson, D. E. Postnov, O. V. Sosnovtseva, Synchronization: from simple to complex, Springer, 2009; S. Boccaletti, A. N. Pisarchik, C. I. del Genio, A. Amann, Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. 1st Edition, Cambridge University Press, 2018.

²N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, Phys. Rev. E 51 (2) (1995), 980–994; A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, Phys. Rev. E 84 (3) (2011), 037201; O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, S. Boccaletti, Phys. Rev. E 86 (2012), 036216.

³J. R. Terry, G. D. VanWiggeren, Chaos, Solitons and Fractals 12 (2001), 145–152; A. A. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, Успехи физических наук 179 (12) (2009), 1281–1310; O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. E. Hramov, Physics Letters A 374 (29) (2010), 2925–2931. V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, A. S. Karavaev, D. D. Kulminskiy, Nonlinear Dynamics 74 (2013), 1013–1020; S. Chishti, R. Ramaswamy, Phys. Rev. E 98 (3) (2018), 032217; O. Martinez-Fuentes, J. J. Montesinos-Garcia, J. F. Gomez-Aguilar, Digital Signal Processing: A Review Journal 126 (2022), 103494; M. Marwan, M. Han, R. Khan, PLoS ONE 18.10 (2023), e0288796; N. Kulagin, A. Andreev, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. P. Sergeev, A. Badarin, A. E. Hramov, Phys. Rev. E 111 (2) (2025), 024209; A. E. Hramov, N. Kulagin, A. N. Pisarchik, A. V. Andreev, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 35 (3) (2025), 033140.

⁴A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, Europhysics Lett. 70 (2) (2005), 169–175

Чуа) реализуется перемежаемость перескоков (jump intermittency)⁵.

Для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации могут использоваться как традиционные методы и подходы, основанные на методе вспомогательной системы⁶, так и новые методы и алгоритмы, учитывающие строение аттракторов этих систем⁷. Однако, все еще актуальным остается вопрос о разработке более универсальных подходов к диагностике и анализу данного режима, справедливых как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между взаимодействующими системами и независящих от вида аттракторов рассматриваемых систем. Поэтому настоящая диссертация посвящена, в первую очередь, разработке и применению к однонаправленно и взаимно связанным системам методов, основанных на непрерывном вейвлетном преобразовании и численном расчете локальных показателей Ляпунова, работоспособность которых в ряде случаев не зависит ни от топологии аттракторов взаимодействующих систем, ни от типа связи между ними.

Другим вопросом, тесно связанным с предыдущим, является анализ мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. При этом, под мультистабильностью в данном контексте подразумевается существование в фиксированные моменты времени фаз различного поведения (синхронного и асинхронного с точки зрения критерия обобщенной хаотической синхронизации) в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем⁸. Как будет показано в рамках настоящей диссертационной работы, такой режим имеет место в системах с дискретным и непрерывным временем как с относительно простой, так и со сложной топологией аттрактора и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи между ними.

Исследованию перемежающейся обобщенной синхронизации в таких системах, в том числе с точки зрения мультистабильности, и посвящена настоящая диссертационная работа.

Цель диссертационной работы. Целью настоящего диссертационного исследования является изучение особенностей перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, связанных однонаправленно или взаимно, выявление наличия мульти-

⁵А. А. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Pivovarov, V. A. Khanadeev, A. E. Hramov, A. N. Pisarchik, Physical Review E 102 (1) (2020), 012205; В. А. Ханадеев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Известия Российской академии наук. Серия физическая 85 (2) (2021), 265–269.

⁶H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, Physical Review E 53 (5) (1996), 4528–4535.

⁷О. И. Москаленко, А. А. Короновский, В. А. Ханадеев, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика 28 (3) (2020), 274–281.

⁸O. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, A. O. Selskii и E. V. Evstifeev, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 31 (8) (2021), 083106.

стабильности в рассматриваемых случаях, разработка новых универсальных методов анализа этого режима, в том числе с учетом мультистабильности, и их применение к исследуемым системам.

В соответствии с поставленной целью определены основные задачи диссертационного исследования:

- Разработка универсальных методов анализа перемежающейся обобщенной синхронизации, справедливых для систем с различной топологией аттрактора, связанных однонаправленно и взаимно, и их апробация на системах с однонаправленной связью. Сравнение результатов разработанных методов с результатами классических методов и алгоритмов.
- Выявление существования режима перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи и исследование ее характеристик.
- Оценка влияния шума на статистические характеристики перемежаемости вблизи границы обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора.
- Изучение возможности существования мультистабильности на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, введение в рассмотрение меры мультистабильности.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Применение непрерывного вейвлетного преобразования для определения статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации (распределений длительностей ламинарных фаз, зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности) в системах с различной топологией аттракторов с однонаправленной связью позволяет повысить как точность выделения характерных фаз поведения систем, так и устойчивость к аддитивному шуму по сравнению с использованием только метода вспомогательной системы.
- Выделение характерных фаз поведения систем с различной топологией аттракторов, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, и определение ее типа возможны при помощи метода, основанного на расчете локальных показателей Ляпунова, причем для

систем с однонаправленной связью результаты данного метода находятся в хорошем количественном соответствии с результатом метода вспомогательной системы.

- Тип перемежаемости, наблюдающейся вблизи границы обобщенной синхронизации, не зависит от типа связи между системами, а определяется топологиями аттракторов взаимодействующих систем. В однонаправленно и взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттракторов (с аттракторами ленточного типа) имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной (двулистной) топологией с теми же типами связи – перемежаемость перескоков.
- Для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, проявляющаяся в реализации в один и тот же момент времени фаз различного (синхронного или асинхронного) поведения в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем. Данный тип поведения характерен и для однонаправленной, и для взаимной связи между системами, а по поведению меры мультистабильности в зависимости от времени возможно определить тип перемежаемости, наблюдающийся в данном случае.

Научная новизна. Данная диссертационная работа содержит новые результаты в области изучения перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. В диссертационной работе впервые были получены следующие результаты:

- Разработан универсальный метод на основе оценки локальных показателей Ляпунова для выделения характерных фаз поведения систем и оценки статистических характеристик перемежаемости. Показано, что разработанный подход позволяет диагностировать режим перемежающейся обобщенной синхронизации вне зависимости от типа связи между системами и от топологии их аттракторов, в том числе в присутствии внешних шумов.
- Установлено, что тип перемежаемости, наблюдающийся вблизи границы обобщенной синхронизации, не зависит от типа связи между системами, а определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем. Так, в системах с простой топологией аттрактора, связанных однонаправленно и взаимно, имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией – перемежаемость перескоков.

- Проведено исследование влияния аддитивного шума на оценку статистических характеристик перемежаемости при взаимодействии систем с различной топологией аттрактора. Показано, что применение непрерывного вейвлетного преобразования к исследуемым временным рядам, полученным при помощи метода вспомогательной системы, позволяет существенно повысить устойчивость выделения ламинарных фаз поведения систем к аддитивному шуму.
- Обнаружено наличие мультистабильности на границе обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. Разработаны подходы, позволяющие оценить меру мультистабильности, а также более точно выделить характерные ламинарные фазы в системах вне зависимости от начальных условий.

Полученные результаты диссертационной работы находятся в хорошем соответствии с уже известными результатами в области обобщенной синхронизации. Они были опубликованы в ряде научных статей в престижных отечественных и зарубежных научных журналах, в том числе, с высоким импакт-фактором.

Научная и практическая значимость работы. В данной диссертационной работе была решена важная для современной радиофизики научная задача в области изучения перемежающейся обобщенной синхронизации в хаотических системах с различной топологией аттрактора.

Полученные в ходе работы результаты оказали, оказывают и будут оказывать влияние на дальнейшее развитие направления изучения перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации. Несмотря на то, что они носят, в первую очередь, фундаментальный характер, имеется также возможность их практического использования. Например, их можно использовать при разработке систем для скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью. Особенно интересен потенциал к применению в случае взаимной связи, что стало возможным благодаря разработанным универсальным подходам, основанным на оценке локальных ляпуновских показателей, не зависящим от типа связи между системами и топологии их аттракторов. Данные методы также позволяют установить существование мультистабильности в системах с различной топологией аттрактора, что несомненно открывает новые возможности для изучения и диагностики режима перемежающейся обобщенной синхронизации. Также разработанный метод на основе непрерывного вейвлетного преобразования может быть успешно применен для повышения устойчивости выделения характерных фаз по-

ведения по временному ряду исследуемого сигнала к аддитивному шуму. На компьютерные программы, реализующие данные методы, получено три свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Достоверность полученных результатов и выводов обеспечена использованием известных, хорошо изученных моделей и подходов, воспроизводимостью результатов и подтверждается их хорошим согласованием с другими работами и данными, полученными различными методами диагностики обобщенной синхронизации и выделения характерных фаз поведения в режиме перемежаемости. В частности, достоверность разработанного подхода, основанного на оценке локальных показателей Ляпунова, к анализу перемежающейся обобщенной синхронизации подтверждается путем сопоставления его результатов с аналогичными данными, полученными при помощи метода вспомогательной системы в случае однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца.

Личный вклад. Все защищаемые результаты и положения, вошедшие в настоящую диссертационную работу, получены соискателем лично. Автором разработаны программы, с применением которых осуществлялось численное моделирование исследуемых нелинейных динамических систем, производилась диагностика режима перемежающейся обобщенной синхронизации, оценка статистических характеристик перемежаемости и обработка результатов. Совместно с научным руководителем осуществлялись планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение полученных результатов, а также написание тезисов и научных статей, подготовка докладов для представления на научных конференциях.

Апробация работы. Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем института физики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» (СГУ).

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ, проводимых в СГУ, среди которых гранты Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук (проекты №№ МД-21.2020.2, МД-18.2022.1.2) и гранты Российского научного фонда (проекты №№ 14-12-00224, 19-12-00037).

Отраженные в диссертационной работе результаты, неоднократно представлялись на научных конференциях и школах и опубликованы в тезисах докладов: XVIII Научной школе «Нелинейные волны – 2018», 26 февраля – 4 марта 2018 г., Нижний Новгород, Российская Федерация (стендовый доклад), XIII Всероссийской конференции молодых ученых

“Нанoeлектроника, нанoфотоника и нелинейная физика”, 4–6 сентября 2018 г., Саратов, Российская Федерация (стендовый доклад), XVII Всероссийской школе-семинаре “Физика и применение микроволн” имени А.П. Сухорукова” (“Волны-2019”), 26-31 мая 2019 г., Москва, Российская Федерация (стендовый доклад), 12-ой Международной школе-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), 1–6 октября 2019 г., Саратов, Российская Федерация (стендовый доклад), XX Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, 23–27 ноября 2020 г., Нижний Новгород, Российская Федерация (устный доклад), Всероссийской школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2020”, 30 ноября - 4 декабря 2020г., Саратов, Российская Федерация (устный доклад), XXII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления: физика и применения имени профессора А.П. Сухорукова” (“Волны-2021”), 6-11 июня 2021 г., Москва, Российская Федерация (устный доклад), Конференции международных математических центров мирового уровня, 9-13 августа 2021 г., Сочи, Российская Федерация (устный доклад), XXI Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, 22–26 ноября 2021 г., Нижний Новгород, Российская Федерация (устный доклад), XIII научной конференции молодых ученых “Представляем научные достижения миру. Естественные науки”, 11–12 апреля 2022 г., Саратов, Российская Федерация (устный доклад), XXXIII Всероссийской школе-семинаре “Волновые явления: физика и применения” имени профессора А.П. Сухорукова, 5-10 июня 2022 г., Москва, Российская Федерация (устный доклад), Международной научной конференции “Динамические системы. Теория и приложения”, 26-29 июня 2022 г., Нижний Новгород, Российская Федерация (устный доклад), XXII Международной конференции “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, 14–17 ноября 2022 г., Нижний Новгород, Российская Федерация (устный доклад), XXX Всероссийской научной конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023”, 15–19 мая 2023 г., Саратов, Российская Федерация (устный доклад), VIII Scientific School “Dynamics of Complex Networks and their Applications”, 19-21 сентября 2024 г., Калининград, Российская Федерация (устный доклад).

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в научных журналах, входящих в международные системы цитирования Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК РФ для опубликования материалов кандидатских и докторских диссертаций (всего 10 статей), а также в сборниках научных конференций и семинаров всероссийского и между-

народного уровня (всего 13 статей и тезисов докладов). Автором получено три свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 142 страницы текста, включая 45 иллюстраций и 7 таблиц. Список литературы содержит 119 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** определена актуальность диссертационной работы, ее цели и задачи, научная новизна, практическая и научная значимость, приведены сведения о достоверности полученных результатов и апробации разработанных подходов, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, даны сведения о структуре и объеме работы, и приведено краткое содержание основных разделов диссертации.

В **первой главе** диссертационной работы приведены основные сведения об обобщенной синхронизации, рассмотрены классические методы ее диагностики в системах с простой и сложной топологией аттрактора, связанных однонаправленно или взаимно. Рассмотрены такие методы, как классический метод вспомогательной системы, применимый в случае однонаправленной связи, метод ближайших соседей и метод фазовых трубок, а также метод расчета спектра показателей Ляпунова.

Затем приведено описание перемежаемости на границе обобщенной синхронизации. Указано, что тип наблюдаемой перемежаемости зависит от топологии аттракторов связанных систем и может быть определен при помощи анализа основных статистических характеристик, таких как распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра связи и зависимости средней длительности ламинарных фаз либо от параметра надкритичности, либо от параметра связи. Особое внимание уделено возможности применения метода вспомогательной системы (модифицированного с целью анализа временной динамики) для исследования характеристик перемежаемости в однонаправленно связанных системах с различной топологией аттрактора.

Для исследования были выбраны связанные однонаправленно системы Ресслера (системы с простой топологией аттрактора) и системы Лоренца (системы со сложной топологией аттрактора). Наряду с методом вспомогательной системы для диагностики обобщенной синхронизации производился расчет спектров показателей Ляпунова, что позволило определить критическое значение параметра связи, при котором наблюдается установление режима обобщенной синхронизации. Анализ временных зависимостей модуля разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем по-

казал наличие перемежающегося поведения вблизи границы обобщенной синхронизации и возможность расчета характеристик при помощи введения порога разделения характерных фаз поведения. Далее в этой главе диссертационной работы приведены численно полученные основные статистические характеристики перемежаемости. Показано, что указанные характеристики подчиняются различным законам, зависящим от структуры аттракторов взаимодействующих систем, что находится в хорошем соответствии с известными ранее теоретическими закономерностями. В случае взаимодействующих систем Ресслера эти характеристики подчиняются степенным законам и соответствуют перемежаемости on-off типа; для систем Лоренца характеристики соответствуют экспоненциальным закономерностям и относятся к перемежаемости типа перескоков (jump-intermittency), характерной для аттракторов двулистного типа. Указанные выводы были подтверждены путем аппроксимации рассчитанных характеристик при помощи метода наименьших квадратов степенными и экспоненциальными закономерностями в случае систем Ресслера и систем Лоренца, соответственно. Установлено незначительное отклонение между параметрами аппроксимирующих функций и теоретическими зависимостями.

В первой главе диссертационной работы также продемонстрировано применение метода, основанного на непрерывном вейвлетном преобразовании

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^*\left(\frac{t - t'}{s}\right) dt', \quad (1)$$

где $\psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$ – базисный вейвлет Морле (звездочкой обозначено комплексное сопряжение), s – временной масштаб, для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации. В качестве исходного временного ряда $x(t)$, к которому применялось вейвлетное преобразование, была взята временная зависимость модуля разности $d(t) = x_a(t) - x_r(t)$ между состояниями ведомой и вспомогательной систем Ресслера (см. рисунок 1а). Показано, что введение мгновенного распределения энергии по временным масштабам $E(s, t) = |W(s, t)|^2$ (см. рисунок 1б), с последующим расчетом энергии вейвлетного спектра $\omega(t) = \int_s E(s, t) ds$ (см. рисунок 1в), приходящейся на диапазон характерных временных масштабов, позволило получить более удобную для выделения характерных фаз поведения временную зависимость по сравнению с исходной.

Указано, что при автоматическом определении диапазона характерных временных масштабов наиболее близким к заданию вручную является подход, основанный на исключении из рассмотрения всех временных масштабов, для которых энергия вейвлетного спектра оказывается ниже среднего

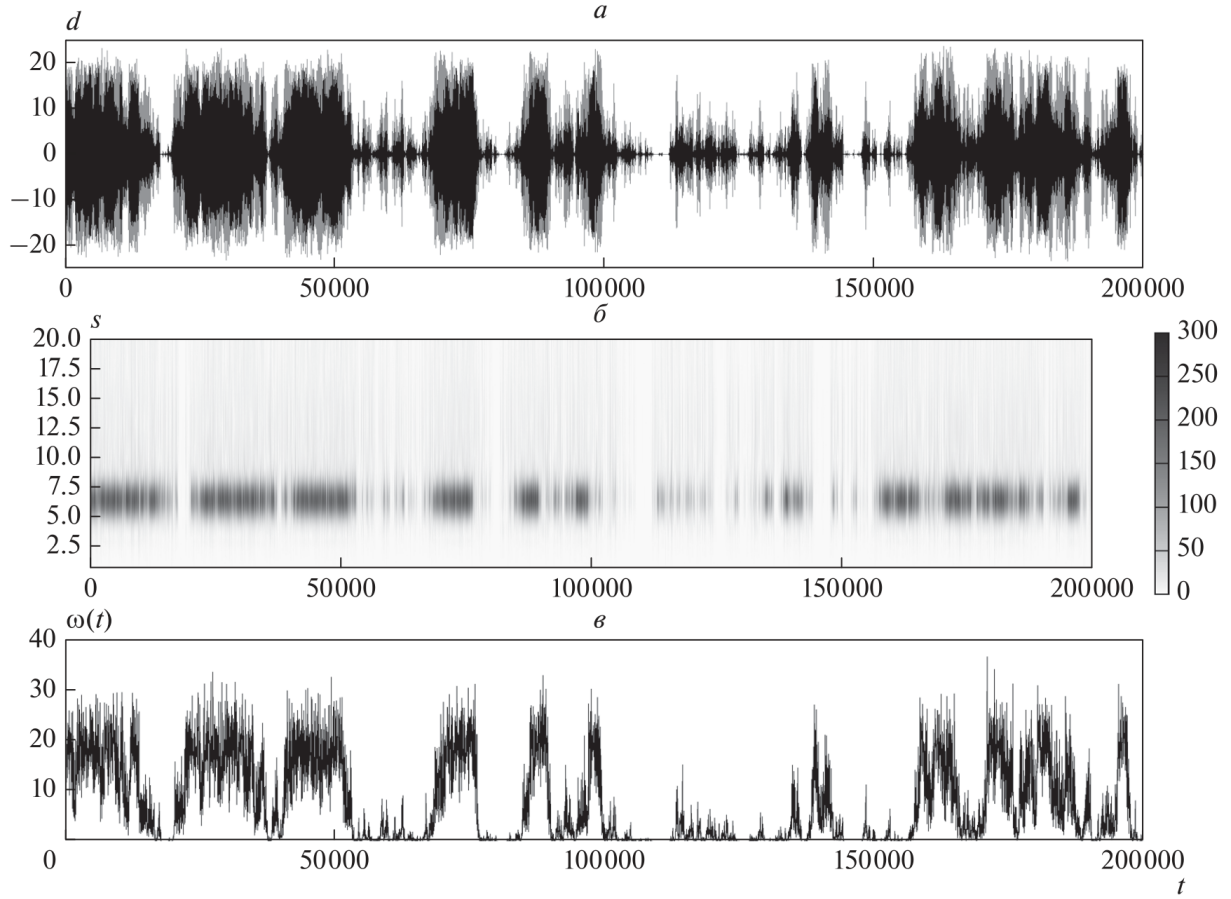


Рисунок 1 — (а) Временная зависимость разности $d(t)$ между состояниями ведомой и вспомогательной систем Ресслера $\dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d$, $\dot{y}_d = \omega_d x_d + a y_d$, $\dot{z}_d = b + z_d(x_d - c)$, $x_{r,a} = -\omega_r y_{r,a} - z_{r,a} + \varepsilon(x_d - x_{r,a})$, $\dot{y}_{r,a} = \omega_r x_{r,a} + a y_{r,a}$, $\dot{z}_{r,a} = b + z_{r,a}(x_{r,a} - c)$, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_d = 0.99$, $\omega_r = 0.95$. (б) Проекция вейвлетной поверхности $W(s, t)$ на плоскость (t, s) для временной зависимости $d(t)$. Градация цвета пропорциональна модулю вейвлетной поверхности $|W(s, t)|$. (в) Энергия вейвлетного спектра $\omega(t)$, приходящаяся на диапазон характерных временных масштабов $S \in (5.0, 7.0)$. Параметр надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon = 0.004$, $\varepsilon_c = 0.11$

значения, из-за чего именно этот подход и использовался в дальнейшем. Расчет основных характеристик перемежаемости показал, что применение разработанного подхода на основе вейвлетного преобразования действительно привело к более низкому их отклонению от теоретических зависимостей. Наконец, было проведено исследование влияния аддитивного белого шума, добавленного к исходному временному ряду, на оценку статистических характеристик перемежаемости как при помощи только метода вспомогательной системы, так и с использованием непрерывного вейвлетного преобразования. Была численно получена зависимость относительного отклонения рассчитанного показателя степенной функции, аппроксимиру-

ющей распределение длительностей ламинарных фаз, от отношения амплитуды белого шума к амплитуде входного сигнала. Показано, что разработанный метод позволил значительно повысить точность оценки статистических характеристик перемежаемости.

Вторая глава диссертации посвящена разработке универсального метода анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, справедливого как для однонаправленно, так и взаимно связанных систем с различной топологией аттрактора, основанного на оценке локальных показателей Ляпунова. В начале главы приведено описание самого метода и особенностей его применения для изучения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи. Эффективность его работы продемонстрирована на примере однонаправленно связанных систем Ресслера и однонаправленно связанных систем Лоренца, рассмотренных в первой главе. В режиме перемежающейся обобщенной синхронизации для этих систем были получены временные зависимости старшего условного локального показателя Ляпунова, на основе которых были рассчитаны статистические характеристики перемежаемости. Результаты работоспособности нового подхода сопоставлены с результатами метода вспомогательной системы, описанными в первой главе, показано хорошее соответствие между ними для обеих систем.

Далее приведены результаты применения разработанного подхода к системам с взаимным типом связи: тем же системам Ресслера и Лоренца, но связанным взаимно. Впервые показано, что на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттрактора имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией реализуется перемежаемость перескоков, что свидетельствует о независимости типа перемежаемости на границе обобщенной синхронизации от типа связи между системами. Для иллюстрации вышесказанного на рисунках 2 и 3 представлены полученные распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях параметра связи и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности (параметра связи) в случае взаимно связанных систем Ресслера и Лоренца, соответственно. Из рисунков видно, что численно полученные распределения полностью соответствуют теоретическим зависимостям, характерным для указанных типов перемежаемости.

В конце второй главы диссертационной работы приведены результаты исследования влияния аддитивного шума на определение статистических характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации двух систем Лоренца в случае однонаправленной и взаимной связи при помощи разра-

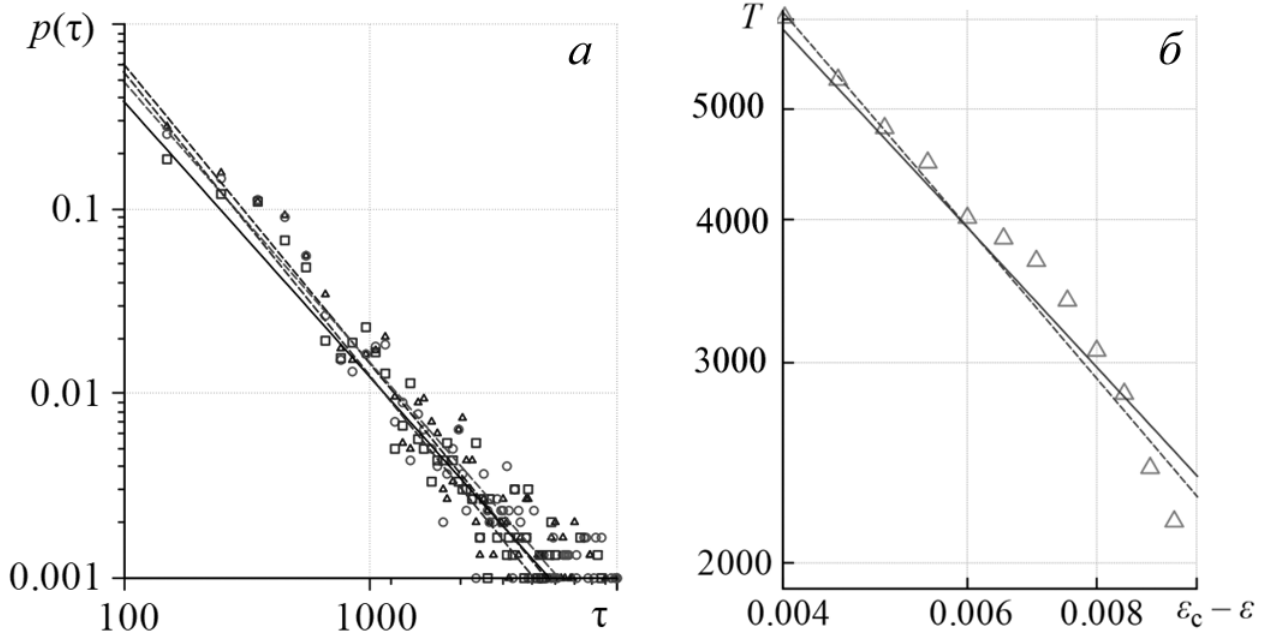


Рисунок 2 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз $p(\tau)$ при значениях параметра связи $\varepsilon = 0.1$ (треугольники), $\varepsilon = 0.105$ (кружки) и $\varepsilon = 0.11$ (квадраты) (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $\varepsilon_c - \varepsilon$, $\varepsilon_c \approx 0.116$ (б), полученные для взаимно связанных систем Ресслера $\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2})$, $\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}$, $\dot{z}_{1,2} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c)$, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_1 = 0.99$, $\omega_2 = 0.95$. Сплошные линии соответствуют теоретическим степенным функциям $p(\tau) \sim \tau^{-3/2}$ (а) и $T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}$ (б), пунктирные линии – аппроксимациям численных данных степенным законом $f(x) = bx^a$ (где $x = \tau$, $f(x) = p(\tau)$ на рисунке (а), $x = \varepsilon_c - \varepsilon$, $f(x) = T(\varepsilon)$ на рисунке (б)) при помощи метода наименьших квадратов

ботанного подхода. Установлено, что при увеличении интенсивности шума средняя длительность ламинарных фаз уменьшается, причем в случае взаимной связи это проявляется сильнее. Продемонстрировано, что при относительно небольшой интенсивности шума оцененные основные характеристики перемежаемости хорошо аппроксимируются теоретическими закономерностями, характерными для перемежаемости перескоков.

В **третьей главе** диссертационной работы рассматривается возможность существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в потоковых системах с различной топологией аттрактора и дискретных отображениях. В начале главы представлены необходимые теоретические сведения, введено определение мультистабильности, описаны подходы для иллюстрации ее наличия, основанные на построении бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний в различные моменты времени и введении в рассмотрение меры мультистабильности как

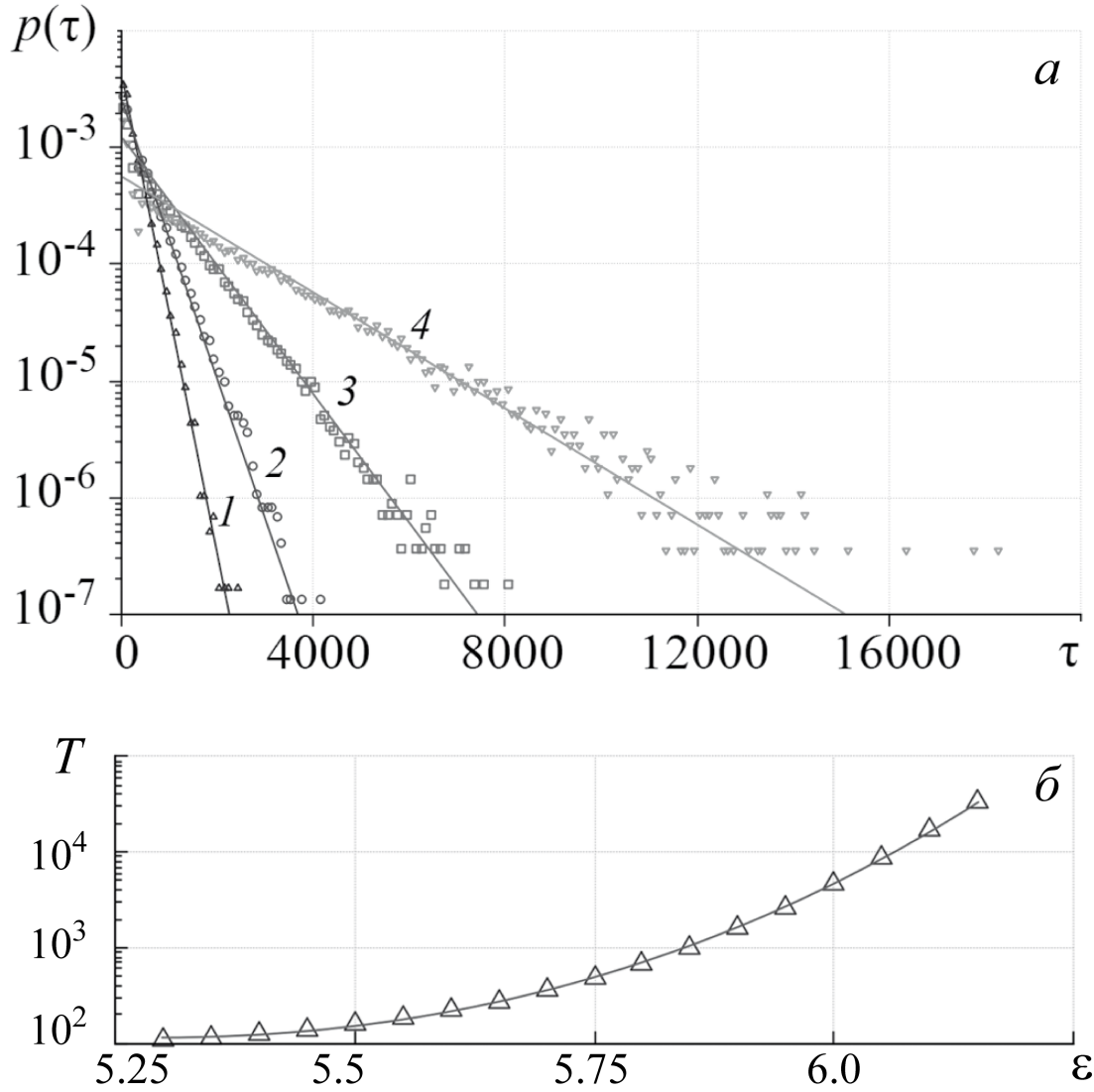


Рисунок 3 — Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз при значениях параметра связи $\varepsilon = 5.6, 5.7, 5.8$ и 5.9 (цифры 1, 2, 3 и 4, соответственно) (а) и зависимость средней длительности ламинарных фаз T от параметра связи ε (б), полученные для взаимно связанных систем Лоренца $\dot{x}_{1,2} = \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2})$, $\dot{y}_{1,2} = (r_{1,2})x_{1,2} - y_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2}$, $\dot{z}_{1,2} = -b_{1,2}z_{1,2} + x_{1,2}y_{1,2}$, $\sigma = 10.0$, $b_1 = 2$, $b_2 = 8/3$, $r_1 = 40$, $r_2 = 35$. Символы соответствуют численно полученным данным, сплошные линии — экспоненциальным законам $\ln p(\tau) = -\tau/T - \ln T$ (а) и $\ln T = a + e^{b\varepsilon} + \frac{2}{a}(\frac{1}{12} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3^{5/4}}\varepsilon^{3/2} + \frac{\varepsilon^2}{12})$ (б)

при помощи модификации метода вспомогательной системы (для однонаправленной связи), так и метода расчета локальных показателей Ляпунова (для однонаправленной и взаимной связи). В роли меры мультистабильности выступала вероятность P_a детектирования асинхронных участков временной динамики при фиксированном значении параметра связи между взаимодействующими системами после завершения переходного процесса, для чего был осуществлен переход от рассмотрения нескольких взаимодействующих систем к ансамблю (имитирующему системы, стартующие с различных начальных условий). В качестве объектов исследования рассмотрены однонаправленно связанные логистические отображения, а также системы Ресслера и системы Лоренца в случае однонаправленной и взаимной связи между ними.

Показано, что введенное определение меры мультистабильности может быть использовано также для более точного (по сравнению с традиционными методами) определения критического значения параметра связи, соответствующего возникновению режима обобщенной синхронизации. Полученные для однонаправленно связанных систем при помощи метода расчета локальных ляпуновских показателей и метода вспомогательной системы оценки меры мультистабильности хорошо согласуются друг с другом и с результатами работ предшественников, что подтверждает их корректность (см. рисунки 4 и 5, где представлены зависимости усредненной по безразмерному времени меры мультистабильности $P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T P_a(t) dt$ от параметра связи ε , рассчитанные различными способами для двух разных систем).

Установлено, что предложенный подход позволяет не только дать количественную оценку мультистабильности при различных значениях параметра связи, но и может быть использован для получения статистических характеристик перемежаемости на границе обобщенной синхронизации и определения ее типа. На примере однонаправленно связанных систем Ресслера и логистических отображений установлено, что данные, полученные при помощи нового подхода, полностью соответствуют перемежаемости on-off типа и оказываются более точными по сравнению с результатами классического метода вспомогательной системы.

В Заключение приведены основные результаты и выводы диссертационного исследования:

1. Разработан универсальный метод диагностики и анализа перемежаемости на границе обобщенной хаотической синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, основанный на расчете локаль-

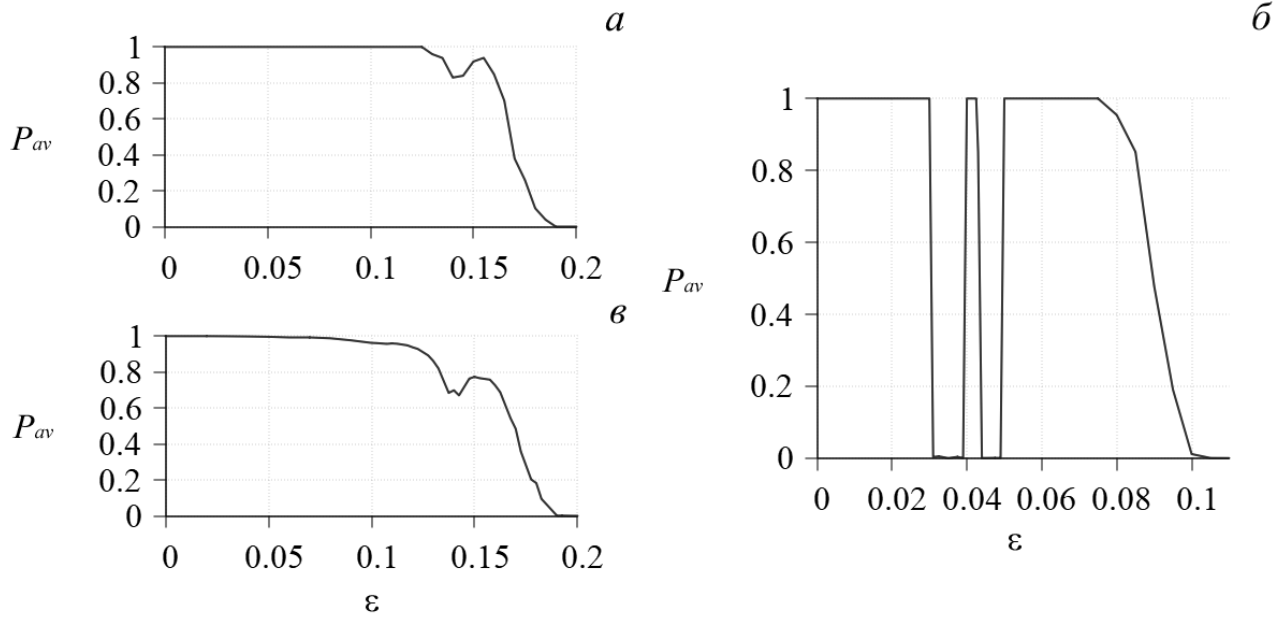


Рисунок 4 — Зависимости усредненной по безразмерному времени меры мультистабильности P_{av} от параметра связи ε , рассчитанные для ансамбля систем Ресслера $\dot{x}_{1,2}^i = -(\omega_{1,2} + \delta_{1,2})y_{1,2}^i - z_{1,2}^i + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1}^i - x_{1,2}^i)$, $\dot{y}_{1,2}^i = (\omega_{1,2} + \delta_{1,2})x_{1,2}^i + ay_{1,2}^i$, $\dot{z}_{1,2}^i = b + z_{1,2}^i(x_{1,2}^i - c)$, $i = 1, 2, \dots, 1000$, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_1 = 0.93$, $\omega_2 = 0.95$ в случае однонаправленной ($\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon$) (а, в) и взаимной ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) (б) связи, полученные при помощи расчета локальных показателей Ляпунова (а, б) и метода вспомогательной системы (в)

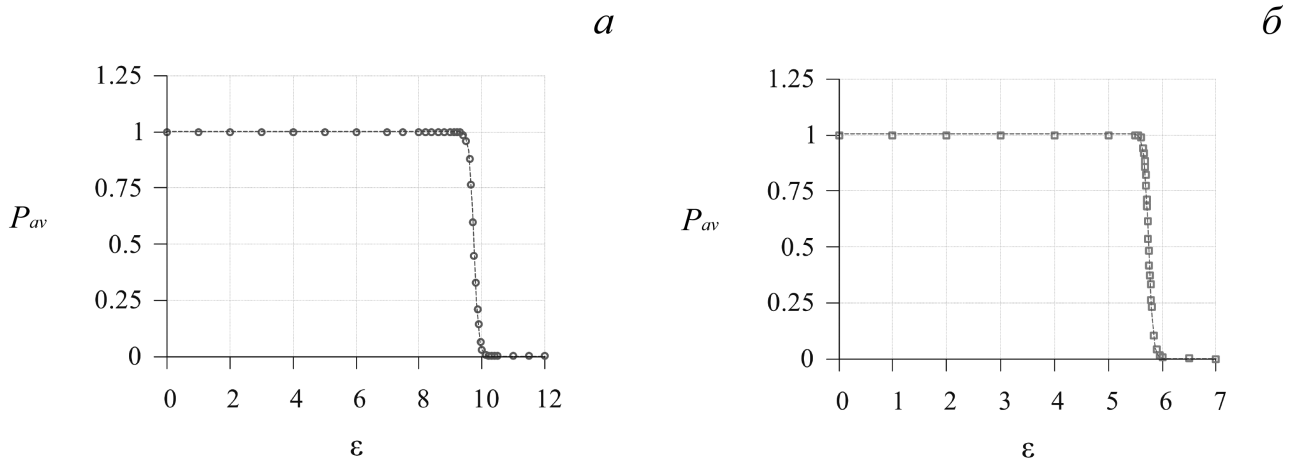


Рисунок 5 — Зависимости усредненной по безразмерному времени меры мультистабильности P_{av} от параметра связи ε , рассчитанные для ансамбля систем Лоренца $\dot{x}_{1,2}^i = -\sigma(y_{1,2}^i - x_{1,2}^i) + \varepsilon_{1,2}(x_{2,1}^i - x_{1,2}^i)$, $\dot{y}_{1,2}^i = r_{1,2}x_{1,2}^i - y_{1,2}^i - x_{1,2}^iz_{1,2}^i$, $\dot{z}_{1,2}^i = -bz_{1,2}^i + x_{1,2}^iy_{1,2}^i$, $i = 1, 2, \dots, 4000$, $\sigma = 10$, $b = 2$, $r_1 = 40$, $r_2 = 35$ при однонаправленной ($\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon$) (а) и взаимной ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$) (б) связи. Маркеры соответствуют рассчитанным при помощи локальных показателей Ляпунова значениям, пунктирные линии — аппроксимирующим функциями сигмоида вида: $P_{av} = \frac{1}{1 + \exp(\frac{\varepsilon - a}{b})}$, где параметры $a = 9.74$, $b = 0.08$ при однонаправленной связи и $a = 5.749$, $b = 0.04$ при взаимной

ных показателей Ляпунова. Показано, что данный подход может быть использован для расчета статистических характеристик перемежаемости и классификации ее типа в системах как с относительно простой, так и относительно сложной топологией аттрактора и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи между ними.

2. При помощи метода вспомогательной системы и разработанного метода оценки локальных показателей Ляпунова исследован режим перемежаемости на границе обобщенной синхронизации в случае однонаправленной связи. Установлено, что оба метода обладают высокой точностью и скоростью, что позволяет их успешно использовать при диагностировании перемежающейся обобщенной синхронизации в данном случае. Оцененные характеристики перемежаемости, полученные при помощи обоих методов, совпадают с теоретическими, что подтверждает корректность применяемых подходов.
3. При помощи разработанного метода установлено, что, как и в системах с однонаправленным типом связи, на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с относительно простой топологией аттрактора имеет место перемежаемость типа on-off, а в системах со сложной топологией реализуется перемежаемость переключений, что свидетельствует о независимости типа перемежаемости на границе обобщенной синхронизации от типа связи между системами.
4. Проведено исследование влияния аддитивного шума на оценку характеристик перемежаемости в однонаправленно и взаимно связанных системах. При помощи расчета локальных показателей Ляпунова установлено, что при относительно небольшой интенсивности шума он не оказывает существенного влияния на характеристики перемежаемости в случае обоих типов связи, сохраняя ее тип. При этом, применение непрерывного вейвлетного преобразования к исходному временному ряду, полученному с помощью метода вспомогательной системы, позволяет существенно увеличить точность оценки статистических характеристик перемежаемости, если амплитуда шума не превышает половину средней амплитуды исходного сигнала.
5. Обнаружена мультистабильность в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора. При помощи метода локальных ляпуновских показателей установлено, что данное явление может возникать как в случае однонаправленной, так и взаимной связи между системами. При этом, для

однаправленной связи наблюдается хорошее соответствие результатов метода, основанного на использовании локальных показателей Ляпунова, и результатов, полученных методом вспомогательной системы. Разработаны подходы, позволяющие оценить меру мультистабильности и более точно выделить характерные фазы поведения в различных системах вне зависимости от начальных условий.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

- [1] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, Известия Российской академии наук. Серия физическая 84 (2) (2020) 300–304 (Scopus, УБСЗ).
- [2] О. И. Москаленко, **Е. В. Евстифеев**, А. А. Короновский, Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей Ляпунова, Письма в журнал технической физики 46 (16) (2020) 12–15 (Web of Science, Scopus, УБС2, K1).
- [3] А. А. Koronovskii, О. I. Moskalenko, А. А. Pivovarov, **Е. V. Evstifeev**, Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 30 (8) (2020) 083133 (Web of Science, Scopus, Q1, УБС1).
- [4] О. I. Moskalenko, А. А. Koronovskii, А. О. Selskii, **Е. V. Evstifeev**, On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 31 (8) (2021) 083106 (Web of Science, Scopus, Q1, УБС1).
- [5] **Е. V. Evstifeev**, О. I. Moskalenko, Noise Influence on the Estimation of Characteristics of Intermittent Generalized Synchronization Using Local Lyapunov Exponents, Communications in Computer and Information Science 1413 (2021) 161–168 (Scopus).
- [6] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Применение метода расчета локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, Проблемы информатики 2 (55) (2022) 5–16 (K2).
- [7] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. О. Сельский, **Е. В. Евстифеев**, Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима, Письма в журнал технической физики 48 (2) (2022) 3–6 (Web of Science, Scopus, УБС2, K1).
- [8] О. И. Москаленко, **Е. В. Евстифеев**, О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора, Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика 30 (6) (2022) 676–684 (Web of Science, Scopus, УБС2, K2).
- [9] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, Известия Российской академии наук. Серия физическая 86 (2) (2022) 282–286 (Scopus, УБСЗ).

- [10] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Известия Российской академии наук. Серия физическая 87 (1) (2023) 115–119 (Scopus, УБСЗ).
- [11] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации методом расчета локальных показателей Ляпунова, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020661280. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 21.09.2020 (2020).
- [12] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Программа для анализа перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи метода непрерывного вейвлетного преобразования, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020664348. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 12.11.2020 (2020).
- [13] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, Программа для построения бассейнов притяжения синхронных и асинхронных состояний ведомой системы, находящейся вблизи границы обобщенной синхронизации с ведущей системой, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023680961. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 08.10.2023 (2023).
- [14] **Е. В. Евстифеев**, Перемежающаяся обобщенная синхронизация в двух связанных хаотических системах, Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: Сборник трудов XIII Всероссийской конференции молодых ученых, Изд-во: Техно-Декор, Саратов, 2018, сс. 60–61.
- [15] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Метод выделения характерных фаз поведения в связанных системах, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, Нелинейные волны – 2018. XVIII научная школа. Тезисы докладов молодых ученых, Изд-во: ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2018, сс. 46–47.
- [16] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Применение непрерывного вейвлет-преобразования для определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, Труды школы-семинара “Волны-2019”. Нелинейная динамика, Можайск, 2019, сс. 10–13.
- [17] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Определение характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи непрерывного вейвлет-преобразования, Материалы XII Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), Саратов, 2019, сс. 71–72.
- [18] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Применение локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XX Международной конференции. Под ред. проф. В.П. Гергеля, Нижний Новгород, 2020, Нижний Новгород, 2020, сс. 156–157.
- [19] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации при помощи расчета локальных показателей Ляпунова, Труды школы-семинара “Волны-2021”. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 2021, сс. 2–4.
- [20] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Применение локальных показателей Ляпунова для исследования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации, Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXI Международной конференции. Сер. “Суперкомпьютерные дни в России”, Нижний Новгород, 2021, сс. 108–111.

- [21] **Е. В. Евстифеев**, Studying the presence of multistability using the local Lyapunov exponents, Представляем научные достижения миру. Естественные науки: Материалы XIII научной конференции молодых ученых “Presenting academic achievements to the world”. Выпуск 12, Изд-во: Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2022, сс. 68–73.
- [22] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Исследование возможности существования мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора, Труды школы-семинара “Волны-2022”. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 2022, сс. 13–14.
- [23] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Анализ характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи расчета меры мультистабильности в однонаправленно связанных системах Лоренца, Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXII Международной конференции. Сер. “Суперкомпьютерные дни в России”, Нижний Новгород, 2022, сс. 32–34.
- [24] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, **Е. В. Евстифеев**, В. А. Ханадеев, Особенности обобщенной синхронизации в системах с различной топологией аттрактора, Динамические системы. Теория и приложения. Тезисы докладов международной конференции, Нижний Новгород, 2022, сс. 66–67.
- [25] **Е. В. Евстифеев**, О. И. Москаленко, Оценка меры мультистабильности в однонаправленно связанных хаотических системах с различной топологией аттрактора, Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023. Материалы XXX Всероссийской научной конференции. Выпуск 17, Саратов, 2023, сс. 25–26.
- [26] О. I. Moskalenko, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, V. A. Khanadeev, **E. V. Evstifeev**, Intermittent behavior near the boundary of generalized synchronization in systems with different topologies of attractors, Proceedings of the VIII Scientific School “Dynamics of Complex Networks and their Applications” (DCNA’2024). Kaliningrad, 2024, pp. 177–178.