УДК 517.518.82

Линейные операторы конечного ранга на нескольких отрезках[1]

А. Л. Лукашов (Москва, Россия)
alexey.lukashov@gmail.com

Построены семейства линейных операторов конечного ранга на нескольких отрезках, обобщающие конструкции Й. Сабадоша и В.С. Виденского, исследованы их аппроксимативные свойства.

Ключевые слова: Полиномы Бернштейна, несколько отрезков, операторы конечного ранга.

Finite-rank operators on several intervals[1]

A. L. Lukashov (Moscow, Russia)
alexey.lukashov@gmail.com

Constructions of linear finite-rank operators on several intervals are given. They generalize J. Sabados' and V.S. Videnskii's operators.

Keywords: Bernstein polynomials, several intervals, finite-rank operators.

При решении ряда задач гармонического анализа и теории приближений важную роль играет метод полиномиальных прообразов отрезка (см., например, обзор [1], а также более поздние работы со ссылками на него). Одной из составляющих этого метода является приближение произвольных систем отрезков полиномиальными прообразами путем вариации некоторых концов отрезков.

Тем не менее даже в вопросах полиномиальных аппроксимаций иногда такая вариация не приносит хороших результатов (см., например, [2]). В работе [3] было продемонстрировано, что даже в случае интерполирования многочленами на нескольких отрезках полезным может оказаться аналог этого метода для прообразов отрезка при отображениях рациональными фунциями с фиксированным знаменателем.

Цель данной заметки - показать, как можно строить семейства линейных операторов конечного ранга (со значениями в конечномерных пространствах рациональных функций с фиксированным знаменателем) на нескольких отрезках.

Начнем с конструкции операторов типа Бернштейна (развивая конструкцию соответствующих линейных полиномиальных операторов, определенных в [4] лишь для весьма ограничительного случая систем отрезков, являющихся полиномиальными прообразами одного отрезка).

Пусть $s \geq 1$, $0 = a_1 < b_1 < \ldots < a_s < b_s = 1$ – разбиение отрезка $[0,1]$, $J_s = \cup_{j=1}^{s} I_j$, $I_j = [a_j, b_j]$ – система отрезков. Пусть $m > s$, $r(x)$ – рациональная функция степени m со знаменателем $S(x)$ степени s такая, что $r^{-1}([0,1]) = J_s$, причем $r(0) = 0$. Существование такой функции r было отмечено, например, в [3].

Для $n \in \mathbb{N}$ через $x_{k1} < \ldots < x_{km_k}$ обозначим такие точки системы отрезков J_s, для которых

$$r(x_{ki}) = \frac{k}{n},\ i = 1, \ldots, m_k;\ k = 0, \ldots, n,$$

где

$$m_k = \begin{cases} m + s - \left[\frac{m+s}{2}\right], & k = 0, \\ m, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \left[\frac{m+s}{2}\right], & k = n. \end{cases}$$

Теперь для произвольной непрерывной на J_s функции обозначим через

$$L_k(f,x) = \sum_{i=1}^{m_k} f(x_{ki}) \ell_{ki}(x),\ k = 0, \ldots, n,$$

ее интерполяционные многочлены Лагранжа,

$$\ell_{ki}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_k} \frac{x - x_{kj}}{x_{ki} - x_{kj}}$$

– фундаментальные многочлены Лагранжа.

Линейные операторы типа Бернштейна определяются по формуле

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(f,x) b_{nk}(r(x)),\ x \in J_s,$$

где

$$b_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

– фундаментальные многочлены Бернштейна. Очевидно, что $B_n(f,x)$ являются рациональными функциями степени $mn + m - 1$ со знаменателями $S^n(x)$. Если система отрезков J_s является полиномиальным прообразом отрезка, то есть найдется многочлен $p(x)$ степени $m \geq s$ такой, что $J_s = p^{-1}([0,1])$, то, положив $r(x) = p(x)$, получим операторы, построенные Й. Сабадошем [4].

Построенные операторы не являются положительными, но обладают следующими воспроизводящими свойствами: $B_n(q,x) = q(x)$ для любого многочлена $q(x)$ степени m_n, $B_n(r,x) = r(x)$. Кроме того, они интерполируют заданную функцию во всех концах отрезков данной системы (и в других точках вида $r^{-1}(0), r^{-1}(1)$).

На них также переносятся оценки скорости аппроксимации из работы [4].

Более общая конструкция получится, если вместо многочленов Бернштейна рассмотреть линейные положительные операторы конечного ранга на отрезке, введенные В.С. Виденским (см. [5, п.13,с.60–62], [6]).

Операторы Виденского имеют вид

$$U_n\left(f,x\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tau_{nk}\right) u_{nk}\left(x\right)$$

где τ_{nk} определяются равенствами

$$\phi_n\left(\tau_{nk}\right) = \frac{k}{n}, \quad k = 0,1,..,n,$$

$$\phi_n\left(x\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}\left(x\right),$$

и фундаментальные функции операторов Виденского (впервые рассмотренные Дж. П. Кингом) определяются с помощью порождающей функции по формулам

$$h_{ni}\left(x\right) = \frac{\rho_{ni}x}{1+\rho_{ni}-x}, \ \rho_{ni} > 0, i = 0,1,...,$$

$$g_n\left(x,y\right) = \sum_{k=0}^{n} y^k u_{nk}(x),$$

$$g_n\left(x,y\right) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(h_{ni}\left(x\right)y + \left(1 - h_{ni}\left(x\right)\right)\right).$$

Теперь для определения линейных операторов на системе отрезков J_s надо, как и ранее, ввести рациональную функцию $r(x)$, для которой $J_s = r^{-1}([0,1])$. На сей раз $L_k(f,x)$ – интерполяционные многочлены Лагранжа по узлам x_{ki}, являющимся решениями уравнений

$$r(x_{ki}) = \tau_{nk}, \ i = 1,\ldots,m_k; \ k = 0,\ldots,n,$$

и операторы определяются по формуле

$$V_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} L_k(f,x)u_{nk}(r(x)).$$

Из свойств операторов Виденского следует, что $V_n(f,x)$ являются рациональными функциями со знаменателями

$$S^n(x)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\rho_{ni}-r(x)\right),$$

они сохраняют те же воспроизводящие свойства для полиномов, что и операторы типа Бернштейна, а для рациональных функций соответствующее свойство имеет вид $V_n(\phi_n\circ r,x)=\phi_n\circ r(x)$.

В случае $\phi_n(x)=x$ операторы $V_n(f,x)$ совпадают с $B_n(f,x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Totik V.* The polynomial inverse image method // Approximation theory XIII: San Antonio 2010, Springer Proc. Math., 2013. Vol. 13. P. 345–365.

[2] *Kroo A., Szabados J.* Inverse polynomial mappings and interpolation on several intervals // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 436. P. 1165–1179.

[3] *Lukashov A. L., Szabados J.* The order of Lebesgue constant of Lagrange interpolation on several intervals // Period. Math. Hung. 2016. Vol. 72. P. 103–111.

[4] *Szabados J.* Bernstein-type polynomials on several intervals // Progress in approximation theory and applicable complex analysis, Springer Optimization and its applications, 2017. Vol. 117. P. 301–315.

[5] *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. Многочлены Бернштейна. Санкт-Петербург : Лань, 2023. 144 с.

[6] *Dikmen A. B.,Lukashov A.* Generating functions method for classical positive operators, their q-analogues and generalizations // Positivity. 2016. Vol. 20. P. 385–398.