УДК 519.853

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

М. А. Осипцев, С. И. Дудов, В. В. Абрамова
(Саратов, Россия)
Osipcevm@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru, Veronika0322@rambler.ru

Рассматривается конечномерная задача о вложении заданного компакта $D \subset \mathbb{R}^p$ в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ выпуклой функции $f(\cdot)$ с наименьшим значением α за счёт смещения D. Её математическая формализация приводит к задаче минимизации функции $\phi(x) = \max_{y \in D} f(y - x)$ на $\mathbb{R}^p$. Исследованы свойства функции $\phi(x)$, получены необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи. В качестве базового для приложений выделен случай, когда $f(\cdot)$ — калибровочная функция Минковского некоторого выпуклого тела M. Показано, что если M — многогранник, то задача сводится к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: калибровочная функция, внешняя оценка, субдифференциал, квазивыпуклая функция, сильно выпуклое множество, сильно выпуклая функция.

ON CHARACTERIZATION OF THE SOLUTION FOR THE PROBLEM ON THE ESTIMATION OF A COMPACT BY THE LEBESGUE SET OF A CONVEX FUNCTION

M. A. Osiptsev, S. I. Dudov, V. V. Abramova
(Saratov, Russia)
Osipcevm@gmail.com, DudovSI@info.sgu.ru, Veronika0322@rambler.ru

We consider the finite-dimensional problem of embedding a given compact $D \subset \mathbb{R}^p$ into the lower Lebesgue set $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leqslant \alpha\}$ of the convex function $f(\cdot)$ with the smallest value of α due to the offset of D. Its mathematical formalization leads to the problem of minimizing the function $\phi(x) = \max_{y \in D} f(y - x)$ on $\mathbb{R}^p$. The properties of the function $\phi(x)$ are investigated, necessary and sufficient conditions and conditions for the uniqueness of the solution of the problem are obtained. As a important case for applications, we reviewed the case when $f(\cdot)$ is the Minkowski gauge function of some convex body M. It is shown that if M is a polyhedron, then the problem reduces to a linear programming problem.

Keywords: gauge function, external estimate, subdifferential, quasiconvex function, strongly convex set, strongly convex function.

1. Постановка задачи

Оценка сложных множеств множествами простой структуры — одно из актуальных направлений негладкого анализа [1, 2]. В рамках этого направления находится и рассматриваемая здесь задача.

Пусть D — ограниченное замкнутое множество из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, а $f(\cdot)$ — выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция. Требуется вложить множество D в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p :$

$f(y) \leqslant \alpha\}$ этой функции с наименьшим значением α за счёт смещения D. То есть решить задачу

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{(\alpha,x)\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ D - x \subset G(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Для корректности и нетривиальности задачи будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^p$, её минимальное значение достигается, множество $G(\alpha_0)$, где $\alpha_0 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} f(x)$, является ограниченым и при этом

$$G(\alpha_0) \overset{*}{-} D = \{z \in \mathbb{R}^p : z + D \subset G(\alpha_0)\} = \emptyset.$$

Легко видеть, что задача (1) эквивалентна следующей минимаксной задаче

$$\phi(x) \equiv \max_{y\in D} f(y - x) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{2}$$

При этом, если $\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x)$, то пара (ϕ^*, x^*), где $\phi^* = \phi(x^*)$, является решением задачи (1).

Нетрудно сделать вывод, что при сделанных предположениях решение задачи существует. Отметим также, что на задачу (2) можно смотреть как на обобщение задачи о чебышёвском центре множество D (случай, когда $f(\cdot)$ — некоторое норма на $\mathbb{R}^p$).

Цель работы — указать на основные свойства целевой функции, получить необходимые и достаточные условия и условия единственности решения задачи (2).

Далее используются следующие обозначения:
$\bar{A}$, $int\ A$, $co\ A$ — соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A, $\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$, $\underline{\partial} f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x, $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leqslant r\}$ — шар с центром в точке x и радиусом r, $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y из $\mathbb{R}^p$, $0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

2. Свойства целевой функции. Критерий решения

Основные свойства функции $\phi(x)$ отражает

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ является выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией. Тогда функция $\phi(x)$ является:*

1) выпуклой конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией, а её субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ может быть выражен в виде

$$\underline{\partial}\phi(x) = -co\{\underline{\partial} f(z - x) : z \in Q^{\phi}(x)\}, \tag{3}$$

где $Q^{\phi}(x) = \{z \in D : f(z - x) = \phi(x)\}$*;*

2) строго выпуклой, если функция $f(\cdot)$ *строго выпукла на* $\mathbb{R}^p$*;*

3) сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ *с константой* $C > 0$*, то есть для любых точек* x_0*,* x_1 *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in [0, 1]$ *выполняется*

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) \leqslant (1-\alpha)\phi(x_0) + \alpha\phi(x_1) - \frac{C}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_0 - x_1\|^2,$$

если функция $f(\cdot)$ *сильно выпукла на* $\mathbb{R}^p$ *с константой* C*;*

4) строго квазивыпуклой, то есть для любых точек $x_0 \neq x_1$ *из* $\mathbb{R}^p$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *выполняется*

$$\phi((1-\alpha)x_0 + \alpha x_1) < \max\{\phi(x_0), \phi(x_1)\},$$

если функция $f(\cdot)$ *строго квазивыпукла на* $\mathbb{R}^p$*.*

Необходимые и достаточные условия решения задачи (2) выражаются следующей теоремой.

Теорема 2. *1. Для того, чтобы точка* x^* *была точкой минимума функции* $\phi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}. \tag{4}$$

2. Если существует $\delta > 0$ *такое, что*

$$B(0_p, \delta) \subset co\{\underline{\partial} f(z - x^*) : z \in Q^{\phi}(x^*)\}, \tag{5}$$

то x^* *является единственной точкой минимума функции* $\phi(x)$ *на* $\mathbb{R}^p$*, причём*

$$\phi(x) \geqslant \phi(x^*) + \delta\|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \tag{6}$$

Замечание 1. Очевидно, единственность решения задачи (2), кроме соотношения (5), обеспечивает также строгая квазивыпуклость выпуклой функции $f(\cdot)$, и тем более ее строгая или сильная выпуклость. Это вытекает из теоремы 1.

3. Базовый случай

Базовым для возможного подхода к разработке метода приближённого решения задачи (2) является случай, когда функция $f(\cdot)$ является калибром (калибровочной функцией Минковского) некоторого выпуклого телесного компакта M, причём $0_p \in int\ M$, т. е.

$$f(x) = k(x, M) \equiv \inf\{\alpha \geqslant 0 : x \in \alpha M\}. \tag{7}$$

Выделим для рассмотрения два частных случая.

3.1 Пусть выпуклое тело M является многогранником заданным в виде

$$M = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_i, y\rangle \leqslant 1,\ i = \overline{1,m}\},$$

где $A_i \in \mathbb{R}^p$, $i = \overline{1,m}$, $0_p \in int\, co\{A_i : i = \overline{1,m}\}$.

В этом случае, в силу положительной однородности калибра, имеет место формула.

$$k(x, M) = \max_{i=\overline{1,m}} \langle A_i, x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда задача (2) принимает вид

$$\max_{i=\overline{1,m}}\{a_i - \langle A_i, x\rangle\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \quad a_i = \max_{y\in D}\langle A_i, y\rangle. \tag{8}$$

Задача (8) известным приемом [4] сводится к задаче линейного программирования. А именно справедлива

Теорема 3. *Задача* (8) *эквивалентна следующей задаче линейного программирования*

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(p+1)} \to \displaystyle\min_{(x,x^{(p+1)})\in\mathbb{R}^{p+1}}, \\ \langle A_i, x\rangle + x^{(p+1)} - a_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Причём, если $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$ *— решение задачи* (9), *то* x_0 *— решение задачи* (8). *А если* x_0 *— решение задачи* (8), *то* $\widetilde{x_0} = (x_0, x_0^{(p+1)})$, *где* $x_0^{(p+1)} = \max\limits_{i=\overline{1,m}}\{a_i - \langle A_i, x_0\rangle\}$, *решение задачи* (9).

3.2 Теперь предположим, что M является сильно выпуклым множеством. Посмотрим, как это отразится на свойствах функции $f(\cdot)$ вида (7) и соответственно на функции $\phi(\cdot)$.

Укажем на важное свойство калибра.

Теорема 4. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^p$ *является* r*-сильно выпуклым множеством и* $C_M = \sup\limits_{x\in M}\|x\|$. *Тогда функция* $\Psi(\cdot) = k^2(\cdot, M)$ *является сильно выпуклой на* $\mathbb{R}^p$ *с константой равной* $\dfrac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Очевидным следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *Если множество M является r-сильно выпуклым и $C_M = \sup\limits_{x \in M} \|x\|$, то функция $\phi^2(x) = \max\limits_{y \in D} k^2(y - x, M)$ является сильно выпуклой на $\mathbb{R}^p$ с константой* $\dfrac{2}{C_M(C_M + r)}$.

Замечание 2. Сама функция $\phi(\cdot)$ как и $f(\cdot)$ вида (7), не является сильно выпуклой, независимо от свойств множества M. Минимизация функции $\phi(\cdot)$ при $f(\cdot)$, имеющий вид (7), эквивалентна минимизации функции $\phi^2(x)$. А применение к минимизации сильно выпуклой функции численных методов (например, субградиентного типа) позволяет рассчитывать на сходимость последовательности приближений к решению со скоростью геометрической прогрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Пшеничный Б. Н.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.

[2] *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.

[3] *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004.

[4] *Авдеева Л. И., Зуховицкий С. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964.