УДК 517.9

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, А. А. Драпеза
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс, вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов сформулированы и доказаны критерии единственности решений двух задач Эрмита – Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля.

REPRESENTATION OF HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A. P. Starovoitov, N. V. Ryabchenko, A. A. Drapeza
(Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, nmankevich@tut.by

In this article new concepts are introduced: quite normal index, quite perfect system of functions. Using these concepts for an arbitrary system of power series, a criteria for the uniqueness the solution of the two Hermite–Padé problems was formulated and proved, explicit determinant presentations of type I and type II Hermite–Padé polynomials obtained. The proven assertions complement the well-knowresults in the theory of Hermite–Padé approximations.

Keywords: Hermite–Padé polynomials, normal index, perfect system, Hankel determinant..

1. Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода

Постановка задачи

Пусть $f = (f_1, ..., f_k)$ – набор степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, ..., k \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_k)$ — это сумма $m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу [1].

Задача A. *Найти тождественно не равный нулю многочлен* $Q_m(z) = Q_{n,\overrightarrow{m}}(z; f)$, $\deg Q_m \leqslant m$ *и многочлены* $P_{n_j}^j(z) = P_{n,\overrightarrow{m}}^j(z; f)$, $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, чтобы при $j = 1, ..., k$

$$R_{n,\overrightarrow{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j\, z^{n+m+1} + \ \ldots\ .$$

В отдельных частных случаях решение задачи А в явном виде найдено Паде и Эрмитом [1]. В общем случае решение задачи А существует, а многочлены Q_m, $P^j_{n_j}$ находятся с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить, что задача А имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: $(\lambda Q_m, \lambda P)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а (Q_m, P) — некоторое одно фиксированное решение.

Определение 1. Если пара (Q_m, P), где $P = (P^1_{n_1}, \ldots, P^k_{n_k})$ — решение задачи А, то многочлены Q_m, $P^1_{n_1}$, $\ldots$, $P^k_{n_k}$ называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для набора f степенных рядов (1).

Определение 2. Индекс $(n, \overrightarrow{m}) = (n, m_1, ..., m_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$ называется нормальным для системы f относительно задачи А, если для любого решения (Q_m, P) задачи А с индексом n и мультииндексом $\overrightarrow{m}$

$$\deg Q_m = m, \ \deg P^j_{n_j} = n_j, \ \ j = 1, ..., k.$$

Если индекс $(n, \overrightarrow{m})$ является нормальным, то задача А имеет единственное решение [1]. Однако, нормальность индекса (n, m) не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Критерий единственности решения задачи А

Далее считаем, что $\overrightarrow{m}$ — ненулевой мультииндекс. Для нулевого мультииндекса $\overrightarrow{m}$ решение задачи А очевидно: $Q_m(z) \equiv 1$, а P^j_n — многочлены Тейлора функции f_j.

Для каждого $j = 1, ..., k$, фиксированных индекса n и мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы $F^j_i = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+i} & f^j_{n-m_j+i+1} & \ldots & f^j_{n_j+i} \end{pmatrix}$ порядка $1 \times (m+1)$, где $i = 1,\, 2,\, \ldots$; матрицу порядка $m_j \times (m+1)$

$$F^j = \begin{bmatrix} F^j_1 & F^j_2 & \ldots & F^j_{m_j} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F^j_1 \\ \vdots \\ F^j_{m_j} \end{bmatrix},$$

матрицу $F_{n,\overrightarrow{m}} = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k \end{bmatrix}^T$ порядка $m \times (m+1)$ и определители $d^j_{n,\overrightarrow{m},i} = det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & F^j_{m_j+i} \end{bmatrix}^T$ $(m+1)$-го порядка.

Определим также функциональные матрицы порядка $1 \times (m+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \ldots & z & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{m_j}(z) = \left(\sum_{i=0}^{n-m_j} f^j_i\, z^{m+i} \quad \sum_{i=0}^{n-m_j+1} f^j_i\,, z^{m+i-1} \quad \ldots \quad \sum_{i=0}^{n_j} f^j_i\, z^i \right).$$

Определение 3. Индекс $(n, \overrightarrow{m})$ будем называть вполне нормальным для f относительно задачи А, если ранг матрицы $F_{n,\overrightarrow{m}}$ равен m.

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного индекса $(n, \overrightarrow{m})$ задача А имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n, \overrightarrow{m})$ был вполне нормальным для f относительно задачи А.*

В случае, если $rang\, F_{n,\overrightarrow{m}} = m$, для решений задачи (Q_m, P) справедливы следующие детерминантные представления:

$$Q_m(z) = \ det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T ,$$

$$P^j_{n_j}(z) = \ det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_{m_j}(z) \end{bmatrix}^T ,$$

$$R^j_{n,\overrightarrow{m}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d^j_{n,\overrightarrow{m},i} z^{n+m+i} .$$

2. Многочлены Эрмита – Паде 1-го рода

Постановка задачи

Рассмотрим задачу, двойственную задаче А [1].

Задача В. *Для системы f степенных рядов (1) и ненулевого индекса $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ найти такой набор не равных тождественно нулю одновременно многочленов $A_1 = A^1_n, ..., A_k = A^k_n$, $\deg A_1 \leqslant n_1 - 1, \dots, \deg A_k \leqslant n_k - 1$, для которых*

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) = c_n z^{|n|-1} + \dots \ .$$

Многочлены A_j (их называют многочлены Эрмита – Паде 1-го рода для f) находятся с точностью до мультипликативного множителя. Эта неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить, что задача В имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде: λA, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а $A = (A_1, \dots, A_k)$ — некоторое одно фиксированное решение.

Критерий единственности решения задачи В

Для каждого $j = 1, ..., k$ и индекса $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ при $n_j \neq 0$, определим матрицы $G^j_i = \begin{pmatrix} f^j_{1-i} & f^j_{2-i} & \dots & f^j_{|n|-i-1} \end{pmatrix}^T$ порядка $(|n|-1) \times 1$, где $i = 1, ..., n_j$; матрицы $G^j = \begin{pmatrix} G^j_1 & G^j_2 & \dots & G^j_{nj} \end{pmatrix}$ порядка $(|n| - 1) \times n_j$ и матрицу $G_n = \begin{pmatrix} G^1 & G^2 & \dots & G^k \end{pmatrix}$ порядка $(|n| - 1) \times |n|$.

Рассмотрим также функциональные матрицы–строки порядка $1 \times |n|$

$$U_j(z) = \Big(\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & z & \ldots & z^{n_j - 1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \Big),$$

$$U(z) = U_1(z) + \ldots + U_k(z) .$$

Если в матрице G_n добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n| \times |n|$. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Если в определителе $A_j(z)$ последнюю строку заменить строкой

$$\Big(f^1_{i+|n|-2} f^1_{i+|n|-3} \ldots f^1_{i+|n|-n_1-1} \ldots f^k_{i+|n|-2} f^k_{i+|n|-3} \ldots f^k_{i+|n|-n_k-1} \Big) ,$$

то полученный определитель обозначим через $\widetilde{d}_{n,i}$.

Определение 4. Ненулевой индекс $n \in \mathbb{Z}^k_+$ назовем вполне нормальным для f относительно задачи B, если $rang\, G_n = |\, n| - 1$.

Теорема 2. *Для того, чтобы для ненулевого индекса $n \in \mathbb{Z}^k_+$ задача B имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f относительно задачи B.*

В случае, если $rang\, G_n = |\, n| - 1$, при определенном выборе мультипликативного множителя справедливы следующие представления:

$$A_j(z) = det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(z) \end{bmatrix} , \;\; j = 1, ..., k \,;$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,i} \, z^{|n|+i-2} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.