УДК 517.9

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ В p-ВАРИАЦИОННОЙ МЕТРИКЕ

С. С. Волосивец, А. А. Тюленева (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

В данной статье мы изучаем степень приближения частными суммами Фурье в p-вариационной норме. Мы приводим два критерия сходимости этих сумм с данной скоростью в терминах роста норм производных продифференцированных частных сумм Фурье. Так же мы устанавливаем связь между приближением функции и ее сопряженной.

Ключевые слова: функция ограниченной p-вариации, частные суммы Фурье, скорость сходимости. производная, сопряженная функция.

APPROXIMATION PROPERTIES OF PARTIAL FOURIER SUMS IN p-VARIATIONAL NORM

S. S. Volosivets, A. A. Tyuleneva (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

In the paper we study the degree of approximation by Fourier partila sums in p-variational norm. We give two criterions for convergence of these sums with a given rate in terms of growth of norms of the differentiated Fourier partial sums. Also we establish the connection between approximation of a function and its conjugate.

Keywords: function of bounded p-variation, partial Fourier sums, rate of convergence, derivative, conjugate function.

Пусть $f(x) \in L^1_{2\pi}$, т.е. $f(x)$ является 2π-периодической интегрируемой по Лебегу функцией, а ряд

$$a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) =: \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f)(x) \qquad (1)$$

является рядом Фурье функции $f(x)$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx) =: \sum_{k=1}^{\infty} B_k(f)(x) \qquad (2)$$

называется сопряженным к ряду (1). Известно, что для $f \in L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, ряд (2) сходится по норме $L^p_{2\pi}$ к функции $\widetilde{f} \in L^p_{2\pi}$, а ряд (1) сходится по норме $L^p_{2\pi}$ к функции $f(x)$ (см. [1, гл. VIII] и лемму 1). Рассмотрим частные суммы рядов (1) и (2)

$$S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} A_j(f)(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \widetilde{S_n}(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} B_k(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Р. Салем и А.Зигмунд [2] получили следующие результаты

Теорема A. 1) *Пусть* $\alpha > 0$, $f \in C_{2\pi}$ *и*

$$\|f - S_n(f)\|_\infty := \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - S_n(f)(x)| = O(n^{-\alpha}), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Тогда функция $\widetilde{f}$ *эквивалентна (т.е. равна п.в.) функции* $\widetilde{f}_0 \in C_{2\pi}$ *и при этом* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f})\|_\infty = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$.

2) *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$, $f \in C_{2\pi}$ *и* f *удовлетворяет условию* (3). *Тогда* $\|S_n'(f)\|_\infty = O(n^{1-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$.

Аналоги результата части 2) теоремы А доказывались в основном для полиномов наилучшего приближения (см. обзор в [3]).

Пусть f 2π-периодическая действительная ограниченная функция, $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ разбиение периода и $æ_\xi^p(f) := \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Положим по определению для $1 < p < \infty$

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup\{æ_\xi^p(f) : \lambda(\xi) := \max_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \delta\}$$

и $\|f\|_{V_p} := \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi))$. Для $1 < p < \infty$ введем пространство V_p, состоящее из всех 2π-периодических ограниченных функций со свойством $\|f\|_{V_p} < \infty$, и пространство $C_p = \{f \in V_p : \lim_{\delta\to 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0\}$. Пространство V_p функций ограниченной p-вариации было введено в случае $p = 2$ Н.Винером [1], тогда как пространство p-абсолютно непрерывных функций C_p в другой, но эквивалентной форме было рассмотрено Л.С.Юнгом [5]. Оба пространства V_p и C_p являются банаховыми относительно нормы $\|\cdot\|_{V_p}$.

Если T_n пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, то n-е наилучшее приближение в V_p вводится равенством $E_n(f)_{V_p} := \inf_{t_n\in T_n} \|f - t_n\|_{V_p}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится наилучшее приближение $E_n(f)_p$ по норме $\|f\|_p = \left(\int_{[0,2\pi]} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ пространства $L^p_{2\pi}$, $1 \le p < \infty$. Теория приближений в C_p тесно связана с аналогичной теорией в L^p (см. [6, 7]).

Пусть последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ убывает к нулю. Скажем, что $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ принадлежит классу B, если $\sum_{k=n}^\infty k^{-1}\varepsilon_k \le C\varepsilon_n$, соответственно, классу B_α, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^n k^{\alpha-1}\varepsilon_k \le Cn^\alpha\varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Эти определения аналогичны данным Н.К.Бари и С.Б.Стечкиным для мажорант модулей гладкости [8].

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p_{2\pi}$. *Тогда 1)* $\|S_n(f)\|_p \le C_1(p)\|f\|_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$; *2)* $\|f - S_n(f)\|_p \le (C_1(p)+1)E_n(f)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$; *3) ряд* (2) *сходится к* $\widetilde{f} \in L^p_{2\pi}$ *в* $L^p_{2\pi}$ *и* $\|\widetilde{f}\|_p \le C_2(p)\|f\|_p$.

Лемма 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $f, f', \ldots, f^{(r-1)}$ *абсолютно непрерывны на любом периоде и* $f^{(r)} \in L^p_{2\pi}$. *Тогда* $E_n(f)_p \le Cn^{-r}\|f^{(r)}\|_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 3. *1) Пусть* $1 < p < \infty$, $t_n \in \mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\|t_n\|_{V_p} \le Cn^{1/p}\|t_n\|_p$.

2) Пусть $1 < p < \infty$, $f \in V_p$. *Тогда* $n^{1/p}E_n(f)_p \le CE_n(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *1) Пусть* $1 < p < \infty$, $t_n \in \mathbb{T}_n$, $n, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1) $\|t_n^{(k)}\|_{V_p} \le n^k\|t_n\|_{V_p}$;

2)$\|t_n^{(k)}\|_p \le \pi^{1/p}n^{k-1/p}\|t_n\|_{V_p}$.

Лемма 1 принадлежит М.Риссу (см. [1, гл. VIII, §§ 14,20]). Лемма 2 является одной из форм неравенства Джексона (см. [9, § 5.5.5, (17)]. Первое утверждение леммы 3 установлено А.П.Терехиным [7], второе можно найти в работе авторов [10]. Оба утверждения леммы 4 можно найти в работе А.П.Терехина [6].

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L^p_{2\pi}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \in B$ *и* $\|f - S_n(f)\|_p = O(n^{-1/p}\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\widetilde{f}$ *эквивалентна* $\widetilde{f}_0 \in C_p$ *и* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Применяя лемму 3, лемму 1 и условие $\|f - S_n(f)\|_p = O(n^{-1/p}\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_{V_p} \le C_1 \sum_{k=0}^{\infty} (2^k n)^{1/p} \|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_p \le$$

$$\le C_2 \sum_{k=0}^{\infty} (2^k n)^{1/p} \|S_{2^{k+1}n}(f) - f + f - S_{2^k n}(f)\|_p \le$$

$$\le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} (2^k n)^{1/p} ((2^{k+1}n)^{-1/p}\varepsilon_{2^{k+1}n} + (2^k n)^{-1/p}\varepsilon_{2^k n}) \le C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{2^k n} \le C_5 \varepsilon_n, \tag{4}$$

поскольку $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \in B$. Из (4) вытекает сходимость $S_{2^k n}(\widetilde{f}) \in C_p$ в V_p к функции $\varphi \in C_p$. Но по лемме 1 $S_{2^k n}(\widetilde{f})(x)$ сходится к $\widetilde{f}(x)$ в $L^p_{2\pi}$, поэтому $\widetilde{f}(x) = \varphi(x)$ п.в. на $\mathbb{R}$. Обозначая $\varphi \in C_p$ через $\widetilde{f}_0$, в силу (4) получаем

$$\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} \le \sum_{k=0}^{\infty} \|S_{2^{k+1}n}(\widetilde{f}) - S_{2^k n}(\widetilde{f})\|_{V_p} \le C_5 \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B$ *и* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\widetilde{f}$ *эквивалентна* $\widetilde{f}_0 \in C_p$ *и* $\|\widetilde{f}_0 - S_n(\widetilde{f}_0)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B \cap B_k$. *Тогда для* $f \in V_p$ *условия* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\|S_n^{(k)}(f)\|_{V_p} = O(n^k \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in B \cap B_{k-1/p}$. *Тогда для* $f \in V_p$ *условия* $\|f - S_n(f)\|_{V_p} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\|S_n^{(k)}(f)\|_p = O(n^{k-1/p} \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 936 с.

[2] *Salem R., Zygmund A.* Approximation by partial sums of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 59, № 1. P. 14–22.

[3] *Butzer P. L., Scherer K.* On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin // Aequationes Math. 1969. Vol. 3. P. 170–185.

[4] *Wiener N.* The quadratic variation of a function and the Fourier coefficients // J. Math and Phys. (MTI). 1924. Vol. 3. P. 72–94.

[5] *Young L. C.* An inequality of Hölder type connected with Stieltjes integration // Acta Math. 1936. Vol. 67. P. 251–282.

[6] *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

[7] *Терехин А. П.* Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Матем. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 289–300.

[8] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С.483–522.

[9] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. 624 с.

[10] *Volosivets S. S., Tyuleneva A. A.* Generalized monotonicity of sequences and functions of bounded p-variation // Acta Sci. Math. (Szeged). 2016. Vol. 82, № 1–2. P. 111–124.