УДК 517.538.52+517.538.53

О полиортогональных системах функций[1]

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

В данной работе с помощью процесса полиортогонализации произвольной конечной подсистемы линейно независимой системы функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ в предгильбертовых функциональных пространствах, порождённых мерами $\mu_1, ..., \mu_k$, построены полиортогональные системы функций. Основным результатом является обобщение на многомерный случай теоремы Э. Шмидта об ортогонализации.

Ключевые слова: полиортогональне многочлены, нормальный индекс, совершенная система, определители Грама.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

About polyorthogonal system of function[1]

A. P. Starovoitov, E. P. Kechko (Gomel, Belarus)
email@mail.ru

This article constructed polyorthogonal systems of functions using the process polyorthogonalization of an arbitrary of a finite subsystem of a linearly independent system of functions $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$ in pre-Hilbert function spaces generated by measures $\mu_1, ..., \mu_k$. The main result is a generalization of E. Schmidt's theorem on orthogonalization to the multidimensional case.

Keywords: polyorthogonal polynomials, normal index, perfect system, Gram determinants.

Acknowledgements: this work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus.

Пусть $\mu_1, ..., \mu_k$ – положительные борелевские меры на вещественной прямой, носителями которых являются отрезки $\Delta_1, ..., \Delta_k$. Рассмотрим систему функций $\varphi = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x), ...\}$, каждая из которых измерима на отрезке Δ_j относительно меры μ_j при всех $j = 1, ..., k$. Будем считать, что система φ линейно независима на каждом из отрезков Δ_j и

$$\int\limits_{\Delta_j} |\varphi_p(x)|^2 d\mu_j(x) < +\infty, \ j = 1, ..., k; \ p = 0, 1, \dots . \tag{1}$$

Если выполняются условия (1), то кратко будем писать, что $\varphi \in L^2_\mu$, $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$. Скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ в предгильбертовом пространстве, порожденном мерой μ_j, обозначим через

$$(f, g)^j = \int\limits_{\Delta_j} f(x) g(x) d\mu_j(x).$$

Везде в дальнейшем предполагаем, что $\varphi \in L^2_\mu$. Множество k–мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, ..., n_k)$, т.е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим через $\mathbb{Z}^k_+$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + ... + n_k$.

Определение 1. *Пусть $n = (n_1, ..., n_k) \in \mathbb{Z}^k_+$ — ненулевой мультииндекс. Тогда $\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_{|n|}\varphi_{|n|}(x)$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$ и $\alpha_0^2 + ... + \alpha_{|n|}^2 \neq 0$, будем называть n-ой полиортогональной функцией для набора мер μ, порожденной системой φ , если*

$$\int\limits_{\Delta_j} \psi_n(x)\varphi_p(x)d\mu_j(x) = 0,\ p = 0, 1, ..., n_j - 1;\ j = 1, ..., k. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что $n_j \neq 0$. Если $n_{j_0} = 0$, то в (2) индекс j пробегает значения $\{1, ..., j_0 - 1, j_0 + 1, ..., k\}$, т.е. мера μ_{j_0} в определении полиортогональной функции $\psi_n(x)$ не учитывается.

Если в определении 1 положить $k = 1$ (или индекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$), то отождествляя меру μ_1 с μ, а n_1 с $n \in \mathbb{Z}^1_+$, будем находится в условиях теоремы Э. Шмидта, т.е. n-ая полиортогональная функция является n-ой ортогональной функцией и для неё имеет место хорошо известная формула Шмидта (подробнее см., например, [1, гл. 3, § 1])

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_n, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_n, \varphi_{n-1}) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

В представлении $\psi_n(x) = \alpha_0\varphi_0(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x)$, которое легко получить из формулы (3), коэффициент α_n равен определителю Грама [2]

$$G_n = \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \dots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{vmatrix}$$

для системы функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$. Хорошо известно (см., например, [1, гл. 3, § 1]), что для системы $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x)\}$ определитель Грама G_n отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта система линейно независима на отрезке Δ.

Полиортогональная функция условиями (2) определяется не однозначно, а с точностью до числового множителя. Эта неединственность может быть и более существенной (см., например, [3]– [4]).

Определение 2. *Будем говорить, что n-я полиортогональная функция $\psi_n(x)$ однозначно определяется условиями (2), если для любых двух таких функций $\psi_n(x)$, $\psi_n^*(x)$ найдётся действительное число λ, что $\psi_n(x) \equiv \lambda\psi_n^*(x)$ на всех отрезках Δ_j.*

Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$, при которых n-я полиортогональная функция определяется однозначно. В одномерном случае однозначность вытекает из линейной независимости системы φ.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+^k$ – ненулевой мультииндекс. Для $n_j \neq 0$ определим матрицы порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^j & (\varphi_1,\varphi_0)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^j \\ (\varphi_0,\varphi_1)^j & (\varphi_1,\varphi_1)^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_1)^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_j-1})^j & (\varphi_1,\varphi_{n_j-1})^j & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_j-1})^j \end{vmatrix},$$

а затем матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^k \end{bmatrix}.$$

При $n_j = 0$ матрица F_n не содержит блок-матрицу F^j. Если, например, мультииндекс $n = (n_1, 0, ..., 0)$, то матрица F_n состоит только из одного блока F^1 и является матрицей Грама: она состоит из элементов определителя (3), стоящих выше последней строки этого определителя.

Если к матрице F_n добавить в качестве последней строки строку

$$E(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & ... & \varphi_{|n|}(x) \end{pmatrix},$$

то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы имеет вид

$$det \begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (\varphi_0,\varphi_0)^1 & (\varphi_1,\varphi_0)^1 & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_1-1})^1 & (\varphi_1,\varphi_{n_1-1})^1 & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_1-1})^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_0)^k & (\varphi_1,\varphi_0)^k & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_0)^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_0,\varphi_{n_k-1})^k & (\varphi_1,\varphi_{n_k-1})^k & \dots & (\varphi_{|n|},\varphi_{n_k-1})^k \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_{|n|}(x) \end{vmatrix}.$$

Определение 3. *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *будем называть слабо нормальным для* μ, *если ранг матрицы* F_n *максимальный, т.е. равен* $|n|$.

Определение 4. *Систему мер* $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ *будем называть слабо совершенной, если все ненулевые индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются слабо нормальными для* μ.

Теорема 1. *Для того, чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и системы мер* $\mu = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$ n*-ая полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *определялась условиями (2) однозначно, необходимо и достаточно, чтобы индекс* n *был слабо нормальным для* μ, *т.е.* $rang\, F_n = |n|$.

Если $rang\, F_n = |n|$, *то при определённом выборе нормирующего множителя* n*-ая полиортогональная функция представима в виде*

$$\psi_n(x) = det \begin{bmatrix} F_n \\ E(x) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Следствие. *Полиортогональная функция* $\psi_n(x)$ *определена однозначно для всех ненулевых мультииндексов* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *тогда и только тогда, когда система* μ *является слабо совершенной.*

Заметим, что компонента n_j мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ определяет насколько значима мера μ_j в определении полиортогональной функции: чем больше n_j, тем больше условий в (2) с участием меры μ_j. Таким образом, число n_j количественно характеризует вклад меры μ_j в построение n-ой полиортогональной функции $\psi_n(x)$. В частности, если, например, $n = (n_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$, то мы находимся в условиях теоремы Шмидта, и формула (4) в точности совпадает с классической формулой (3).

В случае, когда $\varphi = \{1, x, x^2, ...\}$, n-ая полиортогональная функция $\psi_n(x)$ является n-ым полиортогональным многочленом. Для так называемых совершенных наборов мер μ полиортогональные многочлены хорошо изучены и нашли применение в различных областях алгебры, анализа, теоретической физики (см., например, [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.- Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.

[2] *Gram J. P.* Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate // Journ. für Math. 1883. Vol. 94. P. 41–73.

[3] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О явном виде полиортогональных многочленов // Известия вузов. Математика. 2021. № 4. С. 80–89.

[4] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа // Математические заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 424–433.

[5] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.