УДК 517.984

О полноте системы собственных функций оператора Шредингера с комплексным степенным потенциалом[1]

С. Н. Туманов (Москва, Россия)
sergey.tumanov@yahoo.com

Для $\alpha \in (0, 2)$ система собственных функций комплексного оператора Шрёдингера $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^\alpha$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с краевым условием Дирихле полна при всех c: $|\arg c| < 2\pi\alpha/(\alpha+2) + \Delta t(\alpha)$ для некоторого $\Delta t(\alpha) > 0$.

Ключевые слова: спектральная теория; полнота системы собственных функций; несамосопряженный оператор Шрёдингера.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 20-11-20261).

On the completeness of the system of eigenfunctions of the Schroedinger operator with the complex power potential[1]

S. N. Tumanov (Moscow, Russia)
sergey.tumanov@yahoo.com

For $\alpha \in (0, 2)$ the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^\alpha$ in $L_2(\mathbb{R}_+)$ with the Dirichlet boundary conditions is complete for all c: $|\arg c| < 2\pi\alpha/(\alpha+2) + \Delta t(\alpha)$ with some $\Delta t(\alpha) > 0$.

Keywords: spectral theory; completeness of eigenfunctions; non-selfadjoint Schrödinger operators.

Acknowledgements: the article is done with the financial support of Russian Science Foundation (grant 20-11-20261).

Рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_{c,\alpha} = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^\alpha$$

в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием Дирихле при $c \in \mathbb{C}$, $|\arg c| < \pi$, $\alpha > 0$.

Оператор $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ имеет компактный обратный, спектр его дискретный, корневые подпространства одномерны [1].

При $0 < |\arg c| < \pi$ он не самосопряжён, более того, обладает плохими спектральными свойствами: норма резольвенты экспоненциально растёт при удалении от спектра [2]; растут нормы спектральных проекторов [3]. В этих условиях оператор не может быть подобным самосопряжённому, его собственные функции не образуют базиса Рисса в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Тем не менее, вопрос полноты его системы собственных функций (с.с.ф.) в $L_2(\mathbb{R}_+)$, вообще говоря, открыт.

Для $\alpha \geq 2$ задача о полноте с.с.ф. $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ вполне исследована [2, 4]: система полна при всех $c \in \mathbb{C}$: $|\arg c| < \pi$.

При $\alpha \in (0, 2)$ полнота доказана для $|\arg c| < t_0(\alpha) = 2\pi\alpha/(\alpha+2)$ [4]. В то же время, при $t_0(\alpha) \leq |\arg c| < \pi$ вопрос почти не изучен, так как является гораздо более сложной задачей. Соответствующие аргументы приводятся в работах [1, 4].

Нам удалось доказать доказать полноту системы собственных функций при более слабых условиях на $\arg c$.

Сформулируем основной результат работы.

Для комплексных чисел $\zeta = |\zeta|e^{i\arg\zeta}$, $-\pi < \arg\zeta \leq \pi$ и вещественных β, через ζ^β будем обозначать главную ветвь: $\zeta^\beta = |\zeta|^\beta e^{i\beta\arg\zeta}$.

Для $\theta \in [t_0(\alpha), \pi) \cap [t_0(\alpha), \pi\alpha)$, положим

$$\zeta_0(\theta) = e^{i(t_0(\alpha)-\theta)/\alpha}, \quad Z_0(\theta) = (\sin t_0(\alpha)/\sin\theta)^{1/\alpha},$$

и определим функцию

$$\rho(\theta) = \operatorname{Re}\Big\{ \int_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta - 2\int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta \Big\} =$$

$$= \operatorname{Re}\Big\{ \int_{\zeta_0(\theta)}^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta - \int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta \Big\},$$

где интегрирование ведётся по отрезкам, а ветви корня выбрана так, чтобы

$$\operatorname{Re}\int_0^{Z_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta > 0, \quad \operatorname{Re}\int_0^{\zeta_0(\theta)} \sqrt{e^{i\theta}\zeta^\alpha - e^{it_0(\alpha)}}\, d\zeta > 0.$$

Теорема 1. *Для любого $\alpha \in (0, 2)$ функция $\rho(\theta)$ имеет единственный ноль $\theta_0(\alpha)$ внутри интервала: $(t_0(\alpha), \pi) \cap (t_0(\alpha), \pi\alpha)$*

$$\theta_0(\alpha) = t_0(\alpha) + \Delta t(\alpha), \quad \Delta t(\alpha) > 0.$$

Функция $\theta_0(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (0, 2)$.

При $|\arg c| < \theta_0(\alpha)$ с.с.ф. оператора $\mathcal{L}_{c,\alpha}$ полна в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Tumanov S.* Completeness theorem for the system of eigenfunctions of the complex Schrödinger operator $\mathcal{L}_c = -d^2/dx^2 + cx^{2/3}$ // J. Funct. Anal. 2020. `https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108820`.

[2] *Davies E. B.* Wild spectral behaviour of anharmonic oscillators // Bull. Lond. Math. Soc. 2000. Vol. 32, iss. 4. C. 432–438.

[3] *Mityagin B., Siegl P., Viola J.* Differential operators admitting various rates of spectral projection growth // J. Funct. Anal. 2017. 272:8, C. 3129–3175.

[4] *Савчук А. М. и Шкаликов А. А.* Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил., 51:1, 2017, 82–98.