

С.А. Акимова

**ОТНОСИТЕЛЬНО ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
КЛАССА УНИВЕРСАЛЬНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ
ПОЛУАВТОМАТОВ В КЛАССЕ ПОЛУГРУПП**

В настоящей статье рассматриваются универсальные упорядоченные полуавтоматы $Atm(X) = (X, End X, \delta)$ с упорядоченным множеством состояний $X = (X, \leq)$, полугруппой входных сигналов $End X$ (состоящей из эндоморфизмов упорядоченного множества X) и функцией переходов $\delta(x, \varphi) = \varphi(x)$ (здесь $x \in X, \varphi \in End X$). В статье [1] для универсальных упорядоченных полуавтоматов решена задача о конкретной характеристике [2]. Главным инструментом решения задачи конкретной характеристики универсальных упорядоченных полуавтоматов является техника канонических отношений полугрупп преобразований, которые определяются в исходных полугруппах формулами языка узкого исчисления предикатов. В настоящей статье с целью последовательного изучения взаимосвязи абстрактных и элементарных свойств универсальных упорядоченных полуавтоматов и их полугрупп входных сигналов доказана относительно элементарная определимость [3] класса таких полуавтоматов в классе всех полугрупп. Это дает возможность с помощью соответствующего эффективного преобразования формул элементарной теории полуавтоматов в формулы элементарной теории полугрупп получить следующие результаты:

- 1) исследовать вопрос о том, как универсальные упорядоченные полуавтоматы определяются своими полугруппами входных сигналов;
- 2) проанализировать взаимосвязь различных проблем разрешимости элементарных теорий классов полуавтоматов и классов полугрупп.

Следующий результат доказывает относительно элементарную определимость [3] класса универсальных упорядоченных полуавтоматов в классе всех полугрупп.

Теорема 1. *Существуют такие формулы*

$$M(x), \quad D(x, y, z), \quad P(u, v; x, y)$$

сигнатуры языка элементарной теории полугрупп L_S , что для любого универсального упорядоченного полуавтомата $A = \text{Atm}(X)$ с нетривиально упорядоченным множеством состояний $X = (X, \leq_X)$ и полугруппой входных сигналов $S = \text{End}X$ выполняются следующие условия:

- 1) множество $\bar{X} = \{x \in S : M(x)\}$ не пусто;
- 2) формула $D(x, y, z)$ задает тернарное отношение $\bar{\delta} \subset \bar{X} \times S \times \bar{X}$, удовлетворяющее условию

$$(x, y, z_1), (x, y, z_2) \in \bar{\delta} \implies z_1 = z_2;$$

- 3) в полугруппе S входных сигналов полуавтомата A найдутся такие элементы x_0, y_0 , что формула $P(x_0, y_0; x, y)$ задает отношение порядка \leq на множестве \bar{X} , для которого упорядоченный полуавтомат $\bar{A} = (\bar{X}, S, \bar{\delta})$ изоморфен универсально упорядоченному полуавтомату $A = \text{Atm}(X)$;
- 4) для любой формулы Ψ языка элементарной теории упорядоченных полуавтоматов эффективно строится такая формула $\bar{\Psi}$ языка элементарной теории полугрупп, что если Ψ истинна на универсальном упорядоченном полуавтомате A , то формула $\bar{\Psi}$ истинна на его полугруппе входных сигналов $\text{Inp}(A)$ и, с другой стороны, если $\bar{\Psi}$ истинна на полугруппе $\text{Inp}(A)$, то на универсальном упорядоченном полуавтомате A истинна формула Ψ или двойственная ей формула $\check{\Psi}$.

Следующий результат показывает, как универсальные упорядоченные полуавтоматы абстрактно определяются своими полугруппами входных сигналов. Полученный результат непосредственно связан с известным результатом Л.М. Глускина.

Теорема 2. Пусть X_1, X_2 – упорядоченные множества, причем порядок на одном из множеств X_1, X_2 отличен от тождественного. Тогда для универсальных упорядоченных полуавтоматов $A_1 = \text{Atm}(X_1), A_2 = \text{Atm}(X_2)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) полугруппы $\text{Inp}(A_1), \text{Inp}(A_2)$ входных сигналов полуавтоматов A_1, A_2 изоморфны,
- 2) полуавтомат A_1 изоморфен полуавтомату A_2 или двойственному для него полуавтомату \check{A}_2 .

Доказанная в теореме 1 относительно элементарная определимость класса универсальных упорядоченных полуавтоматов в классе полугрупп дает

возможность проанализировать взаимосвязь проблем разрешимости [3] элементарных теорий классов универсальных упорядоченных полуавтоматов и классов полугрупп.

Для формального языка L некоторой сигнатуры Ω символом P_L обозначим множество всех предложений этого языка. Теория T языка L называется *разрешимой*, если существует алгоритм для решения вопроса, принадлежит или нет произвольное предложение из P_L теории T . В противном случае теория T называется *неразрешимой*. Теория T называется *наследственно неразрешимой*, если любая подтеория теории T той же сигнатуры Ω неразрешима. Для класса \mathbf{K} алгебраических систем сигнатуры Ω символом \mathbf{K}_{fin} обозначается класс конечных систем из \mathbf{K} . Теория $Th(\mathbf{K})$ называется *эффективно неотделимой*, если рекурсивно неотделимы множества $Th(\mathbf{K})$ и $P_L \setminus Th(\mathbf{K}_{fin})$, т. е. не существует таких непересекающихся рекурсивных множеств $\Phi, \Psi \subset P_L$, что $Th(\mathbf{K}) \subset \Phi$ и $P_L \setminus Th(\mathbf{K}_{fin}) \subset \Psi$.

Теорема 3. *Для любого класса \mathbf{K} универсальных нетривиально упорядоченных полуавтоматов справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если элементарная теория класса \mathbf{K} наследственно неразрешима, то и элементарная теория класса полугрупп $Inp \mathbf{K}$ наследственно неразрешима [3];*
- 2) *если элементарная теория класса \mathbf{K} эффективно неотделима, то и элементарная теория класса полугрупп $Inp \mathbf{K}$ эффективно неотделима [3].*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акимова С.А.* О характеристике упорядоченных автоматов // Социально-экономическое развитие России: Проблемы, поиски, решения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд. центр Сарат. гос. соц.-экон. ун-та, 2005. Ч. 2. С. 105–106.
2. *Визинг В.Г.* Некоторые нерешенные задачи в теории графов // УМН. 1968. Т. 23, № 6. С. 117–134.
3. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 320 с.

УДК 519.4

Д.А. Бредихин

О МНОГООБРАЗИИ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК С ДОМИНО ОПЕРАЦИЯМИ

В статье находится базис тождеств многообразия дистрибутивных решеток, порожденного классом решеток бинарных отношений, оснащенных домино операцией над отношениями.

Общеизвестно, что теория булевых алгебр является алгебраической версией логики высказываний. Рассмотрение позитивной части логики высказываний (совокупности предложений, в записи которых используются только операции конъюнкции и дизъюнкции) сводится к изучению класса дистрибутивных решеток.

Попытки алгебраизации логики предикатов привели к необходимости рассмотрения наряду с булевыми операциями ряда специфических операций над отношениями. К таким операциям относятся операции умножения и обращения, операции цилиндрификации и ряд других операций над отношениями, имеющих многочисленные приложения в различных областях математики и логики [1]. Рассмотрение множеств отношений относительно заданных на них операций приводит к концепции алгебры отношений. Основы алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А.Тарского [2]. Им были рассмотрены алгебры отношений вида $(\Phi, \circ, {}^{-1}, \cup, \cap, -, \Delta, \emptyset, U)$, где $\circ, {}^{-1}$ – операции умножения и обращения отношений; $\cup, \cap, -$ – булевы операции объединения, пересечения и дополнения; Δ, \emptyset, U – тождественное, пустое и универсальное отношения соответственно. Другой подход к алгебраической трактовке классической логики предикатов был реализован с помощью цилиндрических алгебр [3]. Аппарат алгебр отношений нашел применение также в теории полугрупп [4] и модальной логике [5].

Обозначим через $Rel(X)$ множество всех бинарных отношений, заданных на базисном множестве X . Множество бинарных отношений $\Phi \subset Rel(X)$, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую алгеброй отношений. Обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ – многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Рассмотрим используемые в модальной логике [5, 6] домино операции S_1 и S_2 над бинарными отношениями. Для всякого бинарного отношения $\rho \in Rel(X)$ положим

$$S_1(\rho) = pr_2\rho \times X \text{ и } S_2(\rho) = X \times pr_1\rho,$$

где $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$ – первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

Класс алгебр $R\{\cup, \cap, -, S_2\}$ был охарактеризован в [6], а класс $R\{\cup, \cap, -, S_1, S_2\}$ – в [5]. Нами будут рассмотрены классы $R\{\cup, \cap, S_1\}$ и $R\{\cup, \cap, S_2\}$. Исключение из числа операций булевой операции дополнения приводит к невозможности использования в доказательствах аппарата булевых алгебр и требует новых подходов. В связи с этим заметим, что операции рассматриваемых алгебр являются позитивными, то есть могут быть заданы с помощью формул исчисления предикатов первого порядка, содержащих в

своей записи лишь конъюнкцию и дизъюнкцию, а также кванторы существования. Это позволяет применить к таким классам общую теорию многообразий и квазимногообразий алгебр отношений с позитивными операциями [7–9].

Основной результат работы формулируется в следующей теореме.

Теорема. *Многообразие $Var\{\cup, \cap, S_1\}$ и многообразие $Var\{\cup, \cap, S_2\}$ совпадают. Алгебра $(A, \vee, \wedge, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\cup, \cap, S_1\}$ тогда и только тогда, когда $(A, \vee, \wedge, *)$ — дистрибутивная решетка и выполняется следующая система тождеств:*

$$(x \vee y)^* = x^* \vee y^*,$$

$$x \wedge (x^*)^* = x,$$

$$((x^* \wedge y^*)^*)^* = (x^* \wedge y^*)^*,$$

$$((x^*)^* \wedge y)^* = (x^*)^* \wedge y^*.$$

В заключение приведем ряд проблем, иницируемых сформулируемым результатом.

Проблема 1. Являются ли классы $R\{\cup, \cap, S_1\}$ и $R\{\cup, \cap, S_2\}$ многообразиями (квазимногообразиями)?

Проблема 2. Охарактеризовать многообразие $Var\{\cup, \cap, S_1, S_2\}$. Является ли это многообразие конечно базлируемым?

Проблема 3. Является ли класс $Var\{\cup, \cap, S_1, S_2\}$ многообразием (квазимногообразием)?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
2. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 6. P. 73–89.
3. Henkin L., Monk J.D., Tarski A. Cylindric Algebras. Part I. North-Holland, Amsterdam, 1971.
4. Schein B.M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1. P. 1–62.
5. Venema Y. Many-Dimensional Logic. Universitiet van Amsterdam, 1989.
6. Kuhn S. The domino relation: flattening a two-dimensional logic // J. of Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 173–195.
7. Бредихин Д.А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Сер. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
8. Бредихин Д.А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
9. Бредихин Д.А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.

С.А. Бутерин

**ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

1. Пусть $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ – спектр краевой задачи $L = L(q, M)$ вида

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x-t)y(t) dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $q(x), (\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$. Собственные значения $\lambda_k, k \geq 1$, имеют вид

$$\lambda_k = \left(k + \frac{1}{2\pi k} \int_0^\pi q(x) dx + \frac{\kappa_k}{k} \right)^2, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \quad (3)$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ найти функцию $M(x)$ в предположении, что функция $q(x)$ известна априори.

В [1] доказана разрешимость этой обратной задачи «в малом», то есть когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ достаточно близка в метрике пространства l_2 к спектру известной модельной задачи $\tilde{L} = L(q, \tilde{M})$. Кроме того, там доказана устойчивость и глобальная единственность решения. Иным методом мы доказываем глобальную разрешимость рассматриваемой обратной задачи.

Теорема 1. Пусть дана функция $q(x) \in L_2(0, \pi)$. Тогда для всякой последовательности комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ вида (3) существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция $M(x), (\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$, такая что $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ является спектром краевой задачи $L(q, M)$ вида (1), (2).

Таким образом, асимптотика (3) является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи.

Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает алгоритм решения обратной задачи, которая сводится к решению так называемого основного нелинейного интегрального уравнения относительно функции $M(x)$ (см. ниже уравнение (9)). Доказана его глобальная разрешимость в соответствующем классе функций. В [2] теорема 1 была получена для частного случая $q(x) \equiv \text{const}$. Отметим, что общий случай функции $q(x)$ значительно осложняет исследование основного уравнения обратной задачи.

2. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1, приведем несколько вспомогательных утверждений. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
2P(x, t) = & \int_{\frac{t}{2}}^{x-\frac{t}{2}} q(s) ds + \int_0^t (x-t)M(s) ds + \int_t^x q(s) ds \int_0^t P(s, \xi) d\xi + \\
& + \int_{\frac{t}{2}}^t q(s) ds \int_0^{2s-t} P(s, \xi) d\xi - \int_{x-\frac{t}{2}}^x q(s) ds \int_0^{2(s-x)+t} P(s, \xi) d\xi + \\
& + \int_0^t M(s) ds \int_t^x d\xi \int_0^{t-s} P(\xi-s, \eta) d\eta + \\
& + \int_0^t M(s) ds \int_{\frac{t+s}{2}}^t d\xi \int_0^{2\xi-t-s} P(\xi-s, \eta) d\eta - \\
& - \int_0^t M(s) ds \int_{\frac{s-t}{2}+x}^x d\xi \int_0^{2(\xi-x)+t-s} P(\xi-s, \eta) d\eta, \quad 0 \leq t \leq x \leq \pi.
\end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 1. Уравнение (4) имеет единственное решение $P(x, t)$, являющееся непрерывной функцией. При этом

$$P(x, x) = 0, \quad P(x, 0) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt.$$

Пусть функция $S(x, \lambda)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$S(0, \lambda) = 0, \quad S'(0, \lambda) = 1.$$

Лемма 2. Положим $\rho^2 = \lambda$. Тогда имеет место представление

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x P(x, t) \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} dt, \tag{5}$$

где $P(x, t)$ – решение уравнения (4).

Собственные значения λ_k краевой задачи L совпадают с нулями ее характеристической функции $\Delta(\lambda) := S(\pi, \lambda)$. Согласно (4), (5) будем иметь

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} dx, \quad w(x) \in W_2^1[0, \pi], \tag{6}$$

причем

$$w(0) = 0, \quad w(\pi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx. \tag{7}$$

Здесь

$$w(\pi - x) = P(\pi, x). \tag{8}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость $P(x, t)$ от $M(x)$ будем писать $P(x, t; M)$. Обозначим

$$R(x, t; M) := \frac{\partial}{\partial t} P(x, t; M).$$

Тогда, дифференцируя обе части (8) по x , получим

$$-w'(\pi - x) = R(\pi, x; M), \quad 0 < x < \pi. \quad (9)$$

На соотношение (9) можно смотреть как на нелинейное уравнение относительно функции $M(x)$, которое назовем основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи. Отметим, что формула (8) принимает в частном случае $q := q(x) \equiv \text{const}$ наиболее простой вид [2]

$$w(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(x), \quad 0 < x < \pi,$$

где $H^{*1}(x) = H(x)$, $H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x)$, а функция $H(x)$ связана с $M(x)$ соотношением

$$q + \int_0^x M(t) dt = 2H(x) - \int_0^x dt \int_0^t H(t - \tau)H(\tau) d\tau.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Для любой функции $w(x) \in W_2^1[0, \pi]$, удовлетворяющей (7), уравнение (9) имеет единственное решение $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$.*

В основе доказательства теоремы 2 лежит развитие идеи доказательства глобальной разрешимости нелинейного интегрального уравнения в свертках (см. [2, 3]).

Всякая функция $\Delta(\lambda)$ вида (6), (7) имеет счетное множество нулей λ_k , $k \geq 1$, вида (3) и определяется своими нулями однозначно по формуле

$$\Delta(\lambda) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \quad (10)$$

Справедливо также и обратное утверждение.

Лемма 3. *Пусть заданы произвольные комплексные числа λ_k , $k \geq 1$, вида (3). Тогда функция $\Delta(\lambda)$, определенная по формуле (10), имеет вид (6), (7).*

Доказательство теоремы 1. По заданной последовательности $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ вида (3) строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (10). Согласно лемме 3 построенная функция $\Delta(\lambda)$ имеет представление (6) с некоторой функцией $w(x) \in W_2^1[0, \pi]$, удовлетворяющей (7). Пусть $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$,

является решением уравнения (9) с функцией $w(x)$. Рассмотрим соответствующую краевую задачу $L = L(q, M)$. Нетрудно увидеть, что функция $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией этой задачи L . Таким образом, спектр последней совпадает $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$. Единственность функции $M(x)$ следует из единственности решения основного уравнения (9). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-1701.2007.1) и грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В.А. Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1991. Т. 50 (5). С. 134–144.
2. Buterin S.A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Result. Math. 2007. Vol. 50. P. 173–181.
3. Бутерин С.А. Обратная спектральная задача восстановления оператора свертки, возмущенного одномерным оператором // Мат. заметки. 2006. Т. 80 (5). С. 668–682.

УДК 517.518.82

И.Ю. Выгодчикова

О СРЕДНЕГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Постановка задачи

Пусть значениями функции $\Phi(\cdot)$ в узлах сетки $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$ являются фиксированные отрезки (сегменты) $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причем $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k \in [0 : N]$.

Рассмотрим задачу:

$$\eta(A) := \max_{k \in [0:N]} d(A, t_k) \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \quad (1)$$

где $d(A, t_k) = d_1(A, t_k) \cdot d_2(A, t_k)$, $d_i(A, t_k) = |p_n(A, t_k) - y_{i,k}|$, $i \in [1 : 2]$, $k \in [0 : N]$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Задачу (1) можно записать в виде

$$\max_{k \in [0:N]} \left| \left(p_n(A, t_k) - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right)^2 \right| \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}},$$

то есть требуется минимизировать максимальное по всем узлам сетки T расстояние между квадратом разности значения алгебраического полинома

и серединой сегмент-значения функции $\Phi(\cdot)$ и квадратом половины длины сегмент-значения функции $\Phi(\cdot)$ в этом узле за счет выбора коэффициентов алгебраического полинома.

Функции $d_i(A, t)$ непрерывны и выпуклы по A при каждом фиксированном $t \in T$. Функция $d(A, t)$, а также целевая функция $\eta(A)$ задачи (1) непрерывны, но не являются выпуклыми. Если $y_k := y_{2,k} = y_{1,k}, \forall k \in [0 : N]$, то задача (1) сводится к известной выпуклой задаче П.Л. Чебышева о равномерном наилучшем приближении дискретной функции алгебраическим полиномом фиксированной степени:

$$\phi(A) := \max_{k \in [0:N]} |y_k - p_n(A, t_k)| \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2)$$

С экономической точки зрения задача (1) может быть весьма полезной для построения динамики долевых соотношений компонентов в системе.

Пример. Пусть в моменты $T = \{0 < 1 < 2\}$ зафиксирована следующая структура портфеля, состоящего из двух активов: $\{0, 25 : 0, 75; 0, 5 : 0, 5; 0, 25 : 0, 75\}$ (второй актив является доминирующим). Построим полином степени 1, применяя задачу (1). Получаем 2 решения $p_1^*(t) = 0, 25 + 0, 25t$ и $p_1^{**}(t) = 0, 75 - 0, 25t$, каждое из которых позволяет точно указать размер долей активов в портфеле в каждый момент. Если применять задачу (2), беря в качестве приближаемой функции долю каждого из активов, а также их среднее арифметическое, то получим менее удачные результаты: $p_1^*(t) = 0, 375$, $p_1^{**} = 0, 625$ и $p_1^{***} = 0, 5$.

Ясно, что если существует полином, удовлетворяющий равенствам:

$$p_n(A, t_k) = y_{i_k, k}, \forall k \in [0 : N], \text{ где } i_k = 1 \text{ или } i_k = 2, \quad (3)$$

то вектор его коэффициентов будет решением задачи (1), при этом минимальное значение целевой функции будет равно нулю. Если $N \leq n$, то каждое решение задачи (1) будет удовлетворять системе (3), в случае $N < n$ задача имеет бесконечно много решений, а при $N = n$ решений точно 2^{n+1} .

Вспомогательные утверждения

Используя известные факты из математического анализа, несложно получить следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$ и $g_k = g(t_k)$, $g[t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+s}]$ – разделенные разности s -го порядка, $s \leq n$, $k \in [0 : n-s]$. Тогда выполняется неравенство:

$$|g[t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+s}]| \leq \frac{1}{s!} \cdot \frac{2^s \cdot l}{h^s},$$

где $h = \min_{k \in [0:n-1]} |t_{k+1} - t_k|$, $l = \max_{k \in [1:n]} |g_k - g_{k-1}|$.

Лемма 2. Пусть $y_1, y_2 \in R$, $y_1 \leq y_2$. Функция $f(y) := |y - y_1| \cdot |y - y_2|$

- a) достигает локального максимума при $y = 0,5(y_1 + y_2)$;
- b) достигает абсолютного минимума при $y = y_1$ и при $y = y_2$;
- c) убывает на множествах $y \in (-\infty; y_1]$, $y \in [0,5(y_1 + y_2); y_2]$;
- d) возрастает на множествах $y \in [y_1; 0,5(y_1 + y_2)]$, $y \in [y_2; +\infty)$.

Лемма 3. Пусть $y_1, y_2, \hat{y} \in R$ и $f(y) = |y - y_1| \cdot |y - y_2| \leq \hat{y}$. Тогда выполняется неравенство: $|y| \leq 0,5|y_1 + y_2| + 0,5\sqrt{(y_1 + y_2)^2 + 4|y_1 y_2| + 4\hat{y}}$.

Существование решения

Лемма 4. Пусть $\hat{A} \in R^{n+1}$ и $N \geq n$. Множество $M(\hat{A}) := \{A \in R^{n+1} : \eta(A) \leq \eta(\hat{A})\}$ не пусто, замкнуто и ограничено.

Доказательство. Пусть $\hat{T} := \{t_{j_0} < \dots < t_{j_n}\} \subset T$. Возьмем любое $A \in M(\hat{A})$. Из неравенства $\eta(A) \leq \eta(\hat{A})$ вытекает $|p_n(A, t_{j_k}) - y_{1,j_k}| \cdot |p_n(A, t_{j_k}) - y_{2,j_k}| \leq \eta(\hat{A})$. Отсюда по лемме 3 получаем неравенство:

$$|p_n(A, t_{j_k})| \leq 0,5|y_{1,j_k} + y_{2,j_k}| + 0,5\sqrt{(y_{1,j_k} + y_{2,j_k})^2 + 4|y_{1,j_k} y_{2,j_k}| + 4\eta(\hat{A})}.$$

Пользуясь формулой Ньютона [1, с. 303] и леммой 1, учитывая, что числа y_{i,j_k} и сетка \hat{T} фиксированы, несложно увидеть, что коэффициенты такого полинома будут также ограничены некоторой константой [2, с. 19]. Непустота и замкнутость множества очевидны. Лемма доказана.

Теорема 1. Задача (1) всегда имеет решение.

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства $\min_{A \in R^{n+1}} \eta(A) = \min_{A \in M(\hat{A})} \eta(A)$, непрерывности функции $\eta(A)$ и леммы 4. Теорема доказана.

Обозначим через $\eta^* := \min_{A \in R^{n+1}} \eta(A)$ минимальное значение целевой функции задачи (1), а через $\Omega := \{A \in R^{n+1} : \eta(A) = \eta^*\}$ – множество решений этой задачи. Далее считаем $N \geq n + 1$.

Необходимое условие решения

Теорема 2. Если вектор $A^* \in R^{n+1}$ является решением задачи (1), то найдутся $(n + 2)$ точки $\sigma := \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, для которых

$$d(A^*, t_{j_k}) = \eta(A^*), \forall k \in [0 : n + 1]. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $A^* \in R^{n+1}$ является решением задачи (1) и $\eta(A^*) > 0$. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется. Тогда имеем $d(A^*, t_{j_k}) = \eta(A^*), \forall k \in [0 : r]$, где $\hat{T} := \{t_{j_0} < \dots < t_{j_r}\} \subset T$,

$0 \leq r \leq n$, а

$$d(A^*, t) < \eta(A^*), \forall t \in T \setminus \hat{T}. \quad (5)$$

Если $r < n$, то возьмем произвольно $(n - r)$ точек $t_{j_{r+1}} < \dots < t_{j_n} \in T \setminus \hat{T}$ и построим вектор A_ε , решив систему уравнений:

$$\begin{aligned} p_n(A_\varepsilon, t_{j_k}) &= p_n(A^*, t_{j_k}) + \varepsilon, & \text{если } p_n(A^*, t_{j_k}) < y_{1,j_k} \text{ или} \\ & p_n(A^*, t_{j_k}) \in \left[\frac{y_{1,j_k} + y_{2,j_k}}{2}; y_{2,j_k} \right), \\ p_n(A_\varepsilon, t_{j_k}) &= p_n(A^*, t_{j_k}) - \varepsilon, & \text{если } p_n(A^*, t_{j_k}) > y_{2,j_k} \text{ или} \\ & p_n(A^*, t_{j_k}) \in \left(y_{1,j_k}; \frac{y_{1,j_k} + y_{2,j_k}}{2} \right], & k \in [0 : r], \\ p_n(A_\varepsilon, t_{j_k}) &= p_n(A^*, t_{j_k}), & k \in [r + 1 : n], \quad \text{если } r < n. \end{aligned} \quad (6)$$

Из леммы 2 и (5), (6) получаем при достаточно малом $\varepsilon > 0$, $\eta(A_\varepsilon) < \eta(A^*)$, что противоречит оптимальности вектора A^* . Теорема доказана.

Таким образом, решения задачи (1) можно отыскивать, решая относительно компонент вектора A и неизвестного η^* системы уравнений

$$d(A^*, t_{j_k}) = \eta^*, \forall k \in [0 : n + 1]$$

и проверяя каждый раз равенство $\eta^* = \eta(A)$.

Достаточное условие решения

Теорема 3. Пусть для точек $\sigma := \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$ и вектора A^* выполняются равенства (4), причем

$$(-1)^{\xi_k} (p_n(A^*, t_{j_k}) - y_{1+\xi_k, j_k}) < 0, \forall k \in [0 : n + 1], \xi_k \in 0 : 1, \xi_{k+1} = 1 - \xi_k. \quad (7)$$

Тогда A^* – единственное решение задачи (1).

Доказательство. 1. Предположим, что решением задачи (1) является некоторый вектор A , то есть $\eta(A) \leq \eta(A^*)$. Ввиду (4), имеем $d(A, t_{j_k}) \leq d(A^*, t_{j_k}), \forall k \in [0 : n + 1]$.

2. Без потери общности в рассуждениях считаем $\xi_0 = 0$. Положим $y_1 := y_{1,j_0}$, $y_2 := y_{2,j_0}$. В таком случае

$$f(p_n(A, t_{j_0})) = d(A, t_{j_0}) \leq d(A^*, t_{j_0}) = f(p_n(A^*, t_{j_0})).$$

По лемме 2 функция $f(y)$ убывает на полуинтервале $y \in (-\infty; y_{1,j_0}]$, причем из (9) при $k = 0$ вытекает $p_n(A^*, t_{j_0}) < y_{1,j_0}$, следовательно, неравенство $p_n(A, t_{j_0}) < p_n(A^*, t_{j_0})$ не имеет места, значит, $p_n(A, t_{j_0}) \geq p_n(A^*, t_{j_0})$.

3. Продолжая рассуждать аналогично для $k \in [1 : n + 1]$, получаем

$$(-1)^k (p_n(A, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k})) \geq 0, \forall k \in [0 : n + 1].$$

Последнее возможно только при $A = A^*$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969.

УДК 514.764

С.В. Галаев, А.В. Гохман

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ СО СВЯЗЯМИ

В работе [1] была рассмотрена материальная точка, масса которой зависит только от её положения, в то время как абсолютные скорости отбрасываемых частиц равны нулю. Автором работы была дана геометрическая интерпретация движения такой точки. А именно было показано, что траектория точки переменной массы совпадает с геодезической проективно-евклидовой связности. В работе [2] на движение точки переменной массы были наложены связи, в результате чего траектории движения такой точки должны были касаться неголономного многообразия специального вида. Как и в работе [1], удалось найти связность, теперь уже в неголономном многообразии, геодезические которой совпадают с траекториями движения точки.

В настоящей статье мы продолжаем изучать движение точки переменной массы, но уже в случае произвольной линейной связи. Назовём точку $M(X^\alpha)$ евклидова пространства R_3 положением материальной точки \tilde{M} с переменной массой $m(x^\alpha)$, где $m(x^\alpha)$ интерпретируется как положительная функция $m : R_3 \rightarrow R$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$).

Предположим, что на движение точки \tilde{M} наложена линейная связь. Это означает, что траектория движения точки всюду касается некоторого неголономного многообразия X_3^2 . Будем считать, что в пространстве R_3 задана ортонормированная система координат (x^α) и $P : T(R_3) \rightarrow X_3^2$ – проектор, определяемый связью. Векторные поля $\bar{e}_a = P(\partial_\alpha) = \partial_\alpha - \Gamma_a^3 \partial_3$ в каждой точке пространства R_3 определяют допустимый базис соответствующей площадки неголономного многообразия X_3^2 ($a, b, c = 1, 2$). Мы полагаем, что движение точки \tilde{M} подчиняется закону

$$\frac{d}{dt} m \dot{r} = \lambda \bar{n}, \quad (1)$$

где $\bar{n} = \Gamma_1^3 \partial_1 + \Gamma_2^3 \partial_2 + \partial_3$ – нормальное векторное поле к неголономному многообразию X_3^2 , λ – неопределённый множитель. В ортонормированных координатах уравнение (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} m \ddot{x}^a + \partial_\alpha m \dot{x}^\alpha \dot{x}^a = \lambda \Gamma_a^3, \\ m \ddot{x}^3 + \partial_\alpha m \dot{x}^\alpha \dot{x}^3 = \lambda. \end{cases} \quad (2)$$

Используя уравнение связи $\dot{x}^3 = -\dot{x}^a \Gamma_a^3$, находим явное выражение для λ :

$$\lambda = \frac{-m \dot{\Gamma}_a^3 \dot{x}^a}{\bar{n}^2}. \quad (3)$$

С помощью необходимых преобразований систему (2) с учётом равенства (3) приведём к эквивалентному виду

$$\ddot{x}^a + \left(\delta_b^a P_c + \delta_c^a P_b + \frac{\Gamma_a^3}{\bar{n}^2} \bar{e}_b \Gamma_c^3 \right) \dot{x}^b \dot{x}^c = 0,$$

где $P_a = \frac{1}{2} \bar{e}_a \ln m$.

Пусть $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha P_\gamma + \delta_\gamma^\alpha P_\beta$ — проективно-евклидова связность, заданная в пространстве R_3 . Проецируя эту связность вдоль оснащения $\langle \partial_3 \rangle$ на X_3^2 , получим связность в неголономном многообразии X_3^2 , коэффициенты которой относительно базиса \bar{e}_a имеют вид

$$\Gamma_{bc}^a = \delta_b^a P_c + \delta_c^a P_b + \frac{\Gamma_a^3}{\bar{n}^2} \bar{e}_b \Gamma_c^3.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема. *Движение точки переменной массы со связями совпадает с геодезической проекции проективно-евклидовой связности на соответствующее неголономное многообразие.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гохман А.В. К геометрии динамики одного класса точек переменной массы // Дифференциальная геометрия. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 15–19.
2. Галаев С.В., Гохман А.В. К геометрии динамики со связями одного класса точек переменной массы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 18–22.

А.В. Голубь, А.П. Хромов

УДК 517.984

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t) f(t) dt, \quad (1)$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0; \frac{1}{2}]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in [\frac{1}{2}; 1]$. Функция $\theta(x)$

является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x, t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x, x - 0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x, t)$ непрерывны при $t \leq x$ и $k + l \leq 2$.

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье в отличие от результатов [1] получаются просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим $\tilde{A}(x, t) = A(\theta(x), t)$ при $t \leq \theta(x)$ и $\tilde{A}(x, t) \equiv 0$ при $t > \theta(x)$ и введем матрицу $B(x, t)$ с компонентами

$$B_{ij}(x, t) = \tilde{A} \left(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t \right), \quad (i, j = 1, 2), \quad x, t \in [0; 1/2].$$

Лемма 1. Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, $x \in [0; 1/2]$, где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (Γ – знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\frac{1}{2} + x)$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(\frac{1}{2} + x)$, $Bg(x) = \int_0^{1/2} B(x, t)g(t) dt$.

Представим оператор $B_1g(x) = \int_0^{1/2} B_x(\frac{1}{2} - x, t) g(t) dt$, $B_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, t)$, в виде $B_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$, а $Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \varphi_k(x)$, $\{\psi_k(x)\}_1^m$, $\{\varphi_k(x)\}_1^m$ – линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 2, $(g, \psi_k) = \sum_{j=1}^2 \int_0^{1/2} g_j(t) \psi_k^j(t) dt$.

Обозначим $(W - E)^{-1} \varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x)$, E – единичный оператор.

Лемма 2. Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } M = m$, где $M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{1/2} B(0, t) \tilde{\varphi}^T(t) dt \end{pmatrix}$, E – единичная матрица размерности $m \times m$, $(\tilde{\varphi}, \psi) = \{(\tilde{\varphi}_j, \psi_k)\}_{j,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m)$.

Лемма 3. Пусть B^{-1} существует и для определенности минор Δ матрицы M , образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда

$$B^{-1}z = (W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x \right) - \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x) \left((W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x \right), \psi_j \right),$$

$$\int_0^{1/2} B(0, t) B^{-1}z(t) dt = 0,$$

где Δ_{jk} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Лемма 4. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = z'\left(\frac{1}{2} - x\right) + a_1(x)z(0) + a_2z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \\ + a_4(x)z\left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_0^{1/2} a(x,t)z(t) dt, \quad S \cdot z(0) + T \cdot z\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

где $a_i(x)$ ($i = 1, \dots, 4$), $a'_3(x)$, $a'_4(x)$, $a(x,t)$ – непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $B_x(x,t)$ с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма 5. Если $z(x) = (E - \lambda B)^{-1}Bg(x)$, а $v(x) = \left(z^T(x), z^T\left(\frac{1}{2} - x\right)\right)^T$, то $v(x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальной системе

$$Qv'(x) + \tilde{P}_1(x)v(0) + \tilde{P}_2(x)v\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{P}_3(x)v(x) + \tilde{N}v - \lambda v(x) = \tilde{m}(x), \quad (2) \\ \tilde{M}_0v(0) + \tilde{M}_1v\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2\left(\frac{1}{2} - x\right) & a_1\left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4\left(\frac{1}{2} - x\right) & a_3\left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \\ \tilde{N}v = \int_0^{1/2} \tilde{N}(x,t)v(t) dt, \quad \tilde{N}(x,t) = \begin{pmatrix} a(x,t) & 0 \\ a\left(\frac{1}{2} - x, t\right) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}, \quad \tilde{m}(x) = \left(g^T(x), g^T\left(\frac{1}{2} - x\right)\right)^T.$$

Лемма 6. Если $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ существует, то

$$R_\lambda f(x) = v_1(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad R_\lambda f(x) = v_2(x - 1/2), \quad x \in [1/2, 1], \quad (3)$$

где $v_i(x)$ – компоненты вектора $v(x)$, удовлетворяющего системе (2). Верно и обратное, то есть если λ таково, что однородная краевая задача для системы (2) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (3).

Лемма 7. Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, что преобразование $v(x) = \Gamma H(x, \lambda)w(x)$, где Γ – матрица, диагонализующая матрицу Q^{-1} , т.е. $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \text{diag}(i, -i, i, -i)$, приводит систему (2) к

виду

$$\begin{aligned} w'(x) + P_1(x, \lambda)w(0) + P_2(x, \lambda)w(1/2) + P_3(x, \lambda)w(x) + \\ + N_\lambda w - \lambda Dw(x) = m(x, \lambda), \\ U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1/2) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_1(x)\Gamma H(0, \lambda)$, $P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D \times \Gamma^{-1}\tilde{P}_2(x)\Gamma H(\frac{1}{2}, \lambda)$, $P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + D\Gamma^{-1}\tilde{P}_3(x) \times \Gamma H_1(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma H(x, \lambda)$, $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0\Gamma H(0, \lambda)$, $M_{1\lambda} = \tilde{M}_1\Gamma H(\frac{1}{2}, \lambda)$, $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U(w) = 0, \quad (5)$$

где $U(\cdot)$ — краевые условия из (4), $m(x)$ — произвольный вектор-функция с компонентами из $L[0, \frac{1}{2}]$.

Лемма 8. *Для решения задачи (5) имеет место формула*

$$w(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} U_x(g(x, t, \lambda))m(t) dt + g_\lambda m(x), \quad (6)$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}, e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix})$; $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$; $g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_4(x, t, \lambda))$; $g_j(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{\lambda i(x-t)}$ ($j = 1, 3$); $g_j(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t)e^{-\lambda i(x-t)}$ ($j = 2, 4$); $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$; $g_\lambda m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t) dt$ и $U_x(\cdot)$ означает, что краевое условие берется по аргументу x .

Здесь и далее считаем, что $\text{Re } \lambda i \geq 0$. Обозначим далее через S_δ комплексную λ -плоскость с удаленными нулями $\det \Delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ .

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u(1/2) = 0,$$

и ее решение обозначим $R_{1\lambda}m$. Для $R_{1\lambda}m$ имеет место формула (6), где $\Delta(\lambda)$ заменяется на $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$, а $U(\cdot)$ на $U_0(\cdot)$.

Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ еще и собственные значения краевых задач

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(x) + \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases}$$

и получившуюся область снова обозначим через S_δ .

Лемма 9. Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)w(x, \lambda) - H_0(x)R_{1\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ и $w(x, \lambda)$ — решение задачи (4), $\tilde{m}(x)$ — из (2).

Используя метод контурного интегрирования Коши – Пуанкаре резольвенты по расширяющимся контурам λ -плоскости, на основании приведенных фактов получен следующий основной результат.

Теорема. Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(g, x - \frac{1}{2})\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} &= 0, \end{aligned}$$

где $g(x) = f(\frac{1}{2} + x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{4k\pi i x} \right\}_{-\infty}^{\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in [0, \frac{1}{2}]$ для тех k , для которых $|4k\pi| < r$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

УДК 518.9

Е.В. Гудошникова

КОНСТРУКЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье указывается общая конструкция линейных положительных операторов, позволяющая, во-первых, строить новые последовательности операторов, сходящиеся к тождественному, и, во-вторых, сформулировать и доказать теоремы об аппроксимации сразу для целого класса, а не для каждой из последовательностей хорошо известных операторов, которые являются частным случаем указанной конструкции.

Теорема. Пусть функции $g(x)$ и $\psi(x)$ аналитичны в круге $|z| < a$ и принимают действительные значения на $[0; a)$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\left(g(z)^n \right)' \psi(z)^k \right]_{z=0}.$$

Если $\alpha_{k,n} \geq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), на $[0; a)$ $g(z) > 0$, $\psi(z) > 0$, $z\psi'(z) < \psi(z)$, то функция

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}$$

возрастает на $[0; a)$ и последовательность операторов L_n :

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_{k,n} \left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k, \quad (1)$$

где $z(x)$ — функция, обратная к $x(z)$, сходится к $f(x)$, непрерывной на $x \in [x(0); x(a)]$.

(Перечисленным выше условиям удовлетворяют многие хорошо известные операторы, например, операторы Саса-Миракьяна, Баскакова, Каталана. Кроме того, несложно указать пары функций g и ψ с требуемыми свойствами и получить новые последовательности операторов.)

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} S &= \frac{t\psi(tz)}{\psi(tz) - tz\psi'(tz)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{t\psi(tz)}{\psi(tz) - tz\psi'(tz)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\psi(tz)}{t} \right)^x g(tz) \right] \right]_{t=1} = \\ &= \frac{z\psi^{x+1}(z)g(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \frac{dx}{dz}. \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, применяя теорему Лагранжа [1], в силу которой имеет место представление

$$g(tz) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{tz}{\psi(tz)} \right)^k \alpha_{k,1},$$

получаем, что

$$S = x^2 \psi(z)^x g(0) + \psi(z)^x \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\psi(z)} \right)^k (k-x)^2 \alpha_{k,1} > 0. \quad (3)$$

Сравнивая полученные результаты (2) и (3), заключаем, что $\frac{dx}{dz} > 0$, следовательно, $x(z)$ возрастает и имеет обратную функцию $z(x)$.

Дифференцируя (1), получим соотношение

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)} L_n((t-x)f; x). \quad (4)$$

По теореме Лагранжа имеет место представление $g(z)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\psi(z)}\right)^k \alpha_{k,n}$, откуда следует, что

$$L_n(1; x) = 1. \quad (5)$$

Из (4) следует, что

$$\frac{d}{dx} L_n(1; x) = \frac{z'(x)g'(z)n}{xg(z)} L_n(t-x; x)$$

и с учетом (5) имеем

$$L_n(t-x; x) = 0 \implies L_n(t; x) = xL_n(1; x) = x. \quad (6)$$

Аналогично находится, что

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x}{n} \frac{g(z)}{z'(x)g'(z)}. \quad (7)$$

Из соотношений (5), (6) и (7) следует, что L_n удовлетворяет теореме Коровкина [2] и, значит, $L_n(f; x) \rightarrow f(x)$, непрерывной на $[x(0); x(a)]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2 т. М., 1962. Т. 1.
2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.

УДК 517.518.82 + 519.853.3

С.И. Дудов

О ДВУХ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФАКТАХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Известно, что методы выпуклого анализа могут успешно применяться для исследования задач приближения функций и многозначных отображений [1,2]. В данной статье приведем обобщение одного вспомогательного факта из [1], которое может быть использовано при исследовании задач полиномиальной аппроксимации сегментных функций (например, задач, рассматриваемых в [3,4] с помощью средств выпуклого анализа.

Пусть T – некоторое множество на действительной оси \mathbb{R} , на котором определено многозначное отображение $\xi(\cdot) : T \Rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, образами которого являются некоторые подмножества $\xi(t)$ из \mathbb{R} для $t \in T$. Далее понимаем под coB и $intB$ соответственно выпуклую оболочку и внутренность множества B , $0_{n+1} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Для того чтобы*

$$0_{n+1} \in co \{ \xi(t)(1, t, t^2, \dots, t^n) : t \in T \} \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

1. *существует точка $t_0 \in T$ такая, что $0 \in co \xi(t_0)$,*
2. *существует селектор $f(t) \in \xi(t), t \in T$ и набор упорядоченных чисел*

$$\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}} \subset T : t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$$

таких, что $f(t_i) \neq 0$ и $\operatorname{sgn} f(t_i) = -\operatorname{sgn} f(t_{i+1}), i = \overline{0, n+1}$.

Доказательство придерживается схемы доказательства леммы 8.1 из [1, с. 292], обобщением которой данная теорема является.

Необходимость. Пусть выполняется соотношение (1) и при этом при всех $t \in T$ $0 \notin co \xi(t)$. Очевидно, без потери общности можно считать, что все образы $\xi(t)$ – выпуклы. Из (1), по теореме Каратеодори [2, с. 9], следует, что элемент 0_{n+1} представим в виде выпуклой комбинации $n + 2$ элементов из множества $\{ \xi(t)(1, t, \dots, t^n) : t \in T \}$. Ввиду выпуклости образов можно считать, что эти элементы соответствуют различным значениям $t \in T$. Таким образом, найдется упорядоченный набор точек $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}} \subset T$, соответствующий набор значений $f(t_i) \in \xi(t_i)$ и чисел

$$\{\alpha_i\}_{i=\overline{0, n+1}} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1$$

таких, что

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i f(t_i)(1, t_i, \dots, t_i^n) = 0_{n+1}. \quad (2)$$

Покажем, что все $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n+1}$. Действительно, предположим без потери общности, что $\alpha_{n+1} = 0$. Тогда соотношение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i f(t_i) t_i^k = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Отсюда вытекает, что для любого полинома $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ с набором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ выполняется

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i) P_n(A, t_i) = 0. \quad (3)$$

В частности, равенство (3) будет выполняться и для полинома $P_n(A_0, t)$, однозначно определяемого системой

$$P_n(A_0, t_i) = \alpha_i / f(t_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (4)$$

Подставляя значения полинома (4) в (3), получим

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 = 0.$$

Это противоречит равенству

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1.$$

Итак, все $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n+1}$.

Соотношение (2) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i) (1, t_i, \dots, t_i^n) = -\alpha_{n+1} f(t_{n+1}) (1, t_{n+1}, \dots, t_{n+1}^n).$$

Отсюда, по формуле Крамера имеем

$$\alpha_i f(t_i) = -\alpha_{n+1} f(t_{n+1}) \frac{V(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, \dots, t_n)}{V(t_0, \dots, t_n)},$$

где $V(t_0, \dots, t_n)$ – определитель Вандермонда. Учитывая, что

$$V(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{n+1}, t_{i+1}, \dots, t_n) = (-1)^{n-i} V(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n+1}),$$

получаем

$$\alpha_i f(t_i) = -(-1)^{n-i} \alpha_{n+1} f(t_{n+1}) \frac{V(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n+1})}{V(t_0, \dots, t_n)}. \quad (5)$$

Поскольку числа t_i упорядочены по возрастанию, то определители в (5) являются положительными [1, с. 16].

Теперь, учитывая положительность всех $\alpha_i, i = \overline{0, n+1}$, из (5) заключаем

$$\operatorname{sgn} f(t_i) = -\operatorname{sgn} f(t_{i+1}), \quad i = \overline{0, n}.$$

Достаточность. Пусть набору упорядоченных точек $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}}$ соответствуют знакоочередные значения $f(t_i) \in \xi(t_i)_{i=\overline{0, n+1}}$. Известно [1, с. 299], что данному набору точек можно сопоставить набор чисел

$$\{\alpha_i\}_{i=\overline{0, n+1}} : \alpha_i > 0, \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i = 1$$

таких, что для любого полинома $P_n(A, t)$ выполняется

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i P_n(A, t_i) = 0. \quad (6)$$

Отсюда, придавая соответствующие значения набору коэффициентов A , получаем

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \alpha_i (1, t_i, \dots, t_i^{n+1}) = 0_{n+1}. \quad (7)$$

Учитывая знакоочередность значений $f(t_i)$, соотношение (7) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1} \beta_i f(t_i) (1, t_i, \dots, t_i^{n+1}) = 0_{n+1}, \quad (8)$$

где $\beta_i = \alpha_i / |f(t_i)| > 0$, $i = \overline{0, n+1}$. Из (8), очевидно, вытекает (1). Теорема доказана.

Учитывая знакоочередность значений $\{f(t_i)\}$, $i = \overline{0, n+1}$, нетрудно видеть, что система (8) с добавлением условия нормировки $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n+1} = 1$ будет иметь единственное решение относительно $\{\beta_i\}_{i=\overline{0, n+1}}$ и при этом $\beta_i > 0$, $i = \overline{0, n+1}$. Это означает, что справедлива

Теорема 2. Если функция $f(t)$ принимает на упорядоченном наборе точек: $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ знакоочередные значения: $\operatorname{sgn} f(t_i) = -\operatorname{sgn} f(t_{i+1})$, $i = \overline{0, n}$, то

$$0_{n+1} \in \operatorname{int} co \{f(t)(1, t_i, \dots, t_i^n) : i = \overline{0, n+1}\}.$$

Замечание. Получение необходимых и достаточных условий решения в задаче П.Л. Чебышева о наилучшем приближении непрерывной функции полиномом [1,2] или в задачах об оценке или приближению сегментной функции полиномиальной полосой, рассматриваемых в [3] и [4], можно свести к использованию теоремы 1, где множества T и $\xi(t)$ принимают конкретный вид. Теорема 2 в этих случаях помогает получать условия единственности решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Выгодчинова И.Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 13–15.
4. Сорина Е.В. Критерий решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения полиномиальной полосой фиксированной ширины // Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 127–130.

УДК 519.853.3

А.С. Дудова

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИЛЬНО КВАЗИВЫПУКЛОЙ НОРМЫ

Пусть функция $n(x)$ удовлетворяет на конечномерном пространстве \mathbb{R}^p аксиомам нормы.

Определение 1. Будем говорить, что норма $n(x)$ является r -сильно квазिवыпуклой, если ее шар единичного радиуса является r -сильно выпуклым множеством, то есть представимым в виде пересечения евклидовых шаров радиуса r [1, с. 289].

В силу положительной однородности любая норма не может быть строго или тем более сильно выпуклой функцией на любом выпуклом телесном множестве. Цель данной статьи – показать, что на некоторых отрезках сильно квазिवыпуклая норма может вести себя как сильно выпуклая функция.

Далее используются обозначения:

$\|x\|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^p$; $0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$;

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| \leq r\}$, $B_n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шары в евклидовой норме и норме $n(x)$ соответственно с центром в точке x и радиуса r ;

$str\ co_r A$ – r -сильно выпуклая оболочка множества A , то есть наименьшее по включению r -сильно выпуклое множество, содержащее A [1, с. 297].

Напомним, что все нормы в конечномерном пространстве являются эквивалентными. Поэтому для нашей конкретной нормы найдется положительная константа C такая, что

$$C\|x\| \leq n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \quad (1)$$

Теорема 1. Если $n(x)$ является r -сильно квазивыпуклой нормой, то для любых x_1 и x_2 , отличных 0_p , и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2) - \frac{C\alpha(1 - \alpha)n(x_1)n(x_2)}{2r(\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2))} \left\| \frac{x_1}{n(x_1)} - \frac{x_2}{n(x_2)} \right\|^2. \quad (2)$$

Доказательство. 1) Сначала рассмотрим случай, когда $n(x_1) = n(x_2) = 1$.

Точки x_1 и x_2 содержатся $Bn(0_p, 1)$, который, по определению 1, является r -сильно выпуклым множеством. Тогда в соответствии с известными свойствами сильно выпуклых множеств, с одной стороны [1, с. 302], справедливо включение

$$str\ co_r(\{x_1\} \cup \{x_2\}) \subset Bn(0_p, 1), \quad (3)$$

а с другой стороны [1, с. 298], также выполняется

$$B(x_\alpha, r_\alpha) \subset str\ co_r(\{x_1\} \cup \{x_2\}), \quad (4)$$

где

$$x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad r_\alpha = r - \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}. \quad (5)$$

Если только точка x удовлетворяет неравенству $n(x_\alpha - x) \leq Cr_\alpha$, то в силу (1) будет выполняться $\|x_\alpha - x\| \leq r_\alpha$. Это означает, что

$$Bn(x_\alpha, Cr_\alpha) \subset B(x_\alpha, r_\alpha). \quad (6)$$

Тогда из (3), (4) и (6) получаем включение

$$Bn(x_\alpha, Cr_\alpha) \subset Bn(0_p, 1), \quad (7)$$

которое говорит о том, что справедливо неравенство $n(x_\alpha) \leq 1 - Cr_\alpha$. Подстановка в него вместо x_α и r_α их представлений (5) и последующее простое преобразование правой части дает

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq 1 - \frac{C\alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}{r + \sqrt{r^2 - \alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2}}. \quad (8)$$

Знаменатель вычитаемого в правой части (8) можно оценить сверху величиной $2r$. Поэтому из (8) вытекает неравенство

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq 1 - \frac{C}{2r}\alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2, \quad (9)$$

соответствующее неравенству (2) в рассматриваемом случае.

2) Теперь рассмотрим случай, когда точки $x_1 \neq 0_p$, $x_2 \neq 0_p$ и, кроме того, $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \neq 0_p$. Обозначим через $y_1 = x_1/n(x_1)$, $y_2 = x_2/n(x_2)$, а через y_γ – точку, которая лежит на луче, проходящем через точку x_α из начала координат 0_p и одновременно принадлежит отрезку $[y_1, y_2]$. То есть для точки y_γ существуют числа $\beta > 0$ и $\gamma \in [0, 1]$ такие, что

$$y_\gamma = \beta x_\alpha, \quad y_\gamma = \gamma y_1 + (1 - \gamma)y_2. \quad (10)$$

Из системы уравнений (10) легко находим соответствующие значения

$$\beta = 1/(\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)), \quad \gamma = \alpha n(x_1)/(\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)). \quad (11)$$

Так как $n(y_1) = n(y_2) = 1$, то к точкам y_1, y_2 и y_γ можно применить неравенство (9):

$$n(y_\gamma) \leq 1 - \frac{C}{2r} \gamma(1 - \gamma) \|y_1 - y_2\|^2. \quad (12)$$

Подставляя в левую и правую части неравенства (12) выражения

$$n(y_\alpha) = n(\beta x_\alpha) = n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)/(\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)),$$

$$\gamma(1 - \gamma) = \alpha(1 - \alpha)n(x_1)n(x_2)/[\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)]^2,$$

которые следуют из (11), и умножая левую и правую части получившегося неравенства на $\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)$, получаем (2).

3) Включение (7) обеспечивает неотрицательность правой части неравенства (9). А значит, неотрицательной является и правая часть в (12) при любом $\gamma \in [0, 1]$. Поэтому и правая часть неравенства (2) всегда неотрицательна. Таким образом, неравенство (2) остается справедливым и в случае $x_\alpha = 0_p$.

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие. Если $n(\cdot)$ – r -сильно квазивыпуклая норма, а точки x_1 и x_2 таковы, что $n(x_1) = n(x_2) = \rho > 0$, то для любых $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \rho - \frac{C\alpha(1 - \alpha)}{2r\rho} \|x_1 - x_2\|^2.$$

Таким образом, на отрезках, соединяющих равноудаленные от 0_p точки, сильно квазивыпуклая норма ведет себя как сильно выпуклая функция.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

А.А. Дуюнова

СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ,
БЛИЗКИХ К L

Пусть $f(x) \in L[0, 2\pi]$. Функция

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$$

называется *сопряженной* с $f(x)$. В силу теоремы Лузина – Привалова, если $f(x) \in L[0, 2\pi]$, то сопряженная функция $\bar{f}(x)$ существует почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$. Отметим, что если $f(x) \in L$, то функция $\bar{f}(x)$ не обязана быть суммируемой. Однако известно [1], что если $f(x) \in L[0, 2\pi]$, то для любого $p \in (0, 1)$ функция $|\bar{f}(x)|^p$ суммируема и

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx \leq A_p \left(\int_0^{2\pi} |f(x)| dx \right)^p,$$

где A_p – константа, зависящая только от p . Кроме того, М. Рисс доказал [2, с. 566], что если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, то $\bar{f}(x) \in L^p$, при этом

$$\left(\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где B_p – константа, зависящая только от p .

В связи с этим возникают вопросы:

1. Можно ли условие $f(x) \in L^p$, $p \in (0, 1)$, заменить на более сильное?

2. Что можно сказать о функции $\bar{f}(x)$, если сама функция $f(x)$ принадлежит пространству Орлича $L(\psi)$ [3, с. 146], лежащему между L_p ($p > 1$) и L ?

Всюду в дальнейшем $\varphi(x)$ будет положительная, возрастающая, выпуклая вверх на полуоси $[0, +\infty)$ функция.

Теорема 1. *Если*

$$\int_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt < \infty,$$

то для любой функции $f(x) \in L[0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\bar{f}(x)|) dx < \infty.$$

По функции $\varphi(x)$ определим функцию $\tilde{\psi}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, 1], \\ x \int_1^x (\varphi(t)/t^2) dt, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

и обозначим через $\psi(x)$ функцию Орлича, определенную на $[0, +\infty)$, эквивалентную функции $\tilde{\psi}(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Можно считать, что $\tilde{\psi}(x) \leq \psi(x)$ на $[0, +\infty)$.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на $[0, \infty)$ и удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда если функция $\varphi(x)$ имеет производную всюду и

$$\int_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt = \infty,$$

то существует постоянная $C \geq 0$, что $\forall f(x) \in L(\psi)$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\bar{f}(x)|) dx \leq C \left(1 + \int_0^{2\pi} \psi(2|f(x)|) dx \right). \quad (1)$$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $y > 0$ и положим

$$f^y(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq y, \\ 0, & \text{если } |f(x)| > y, \end{cases}$$

а $f_y(x) = f(x) - f^y(x)$. Обозначим через $\lambda_f(y)$ следующую функцию распределения функции $f(x)$:

$$\lambda_f(y) = \mu \{x \in [0, 2\pi] : |f(x)| > y\}.$$

Пусть T – оператор, который ставит в соответствие функции $f(x)$ сопряженную с ней. Тогда для оператора T и функций $f_y(x)$ и $f^y(x)$ имеет место неравенство [4, с. 112]

$$\lambda_{Tf}(2y) \leq \lambda_{Tf^y}(y) + \lambda_{Tf_y}(y).$$

Заметим, что если $f \in L[0, 2\pi]$, то оператор T имеет слабый тип $(1, 1)$ с константой A_1 [2, с. 573]. А в силу теоремы М. Рисса этот же оператор имеет слабый тип $(2, 2)$ с константой A_2 . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{Tf}(2y) &\leq \frac{A_2}{y^2} \int_0^{2\pi} |f^y(x)|^2 dx + \frac{A_1}{y} \int_0^{2\pi} |f_y(x)| dx = \\ &= \frac{A_2}{y^2} \int_0^{2\pi} \chi_{\{x: |f| \leq y\}}(x, y) |f(x)|^2 dx + \frac{A_1}{y} \int_0^{2\pi} \chi_{\{x: |f| > y\}}(x, y) |f(x)| dx, \quad (2) \end{aligned}$$

где χ_E – характеристическая функция множества E . Через $|f(x)|^*$ обозначим убывающую перестановку функции $|f(x)|$. В силу определения и свойств перестановки неотрицательной функции [5, с. 83] неравенство (2) справедливо и для перестановки функции $|f(x)|$. Проинтегрируем неравенство (2) по $d\varphi(2y)$ от $\frac{1}{2}$ до ∞ .

Рассмотрим левую часть неравенства, пролученного после интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lambda_{Tf}(2y) d\varphi(2y) &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \varphi'(2y) \mu \{x : |\bar{f}(x)|^* > 2y\} dy = \\ &= \int_1^{\infty} \varphi'(y) \int_0^{2\pi} \chi_{\{x: |\bar{f}|^* > y\}} \left(x, \frac{y}{2}\right) dx dy = \int_0^{x_1} \int_1^{\infty} \varphi'(y) \chi_{\{x: |\bar{f}|^* > y\}} \left(x, \frac{y}{2}\right) dy dx, \end{aligned}$$

где точка x_1 такая, что $|f(x_1)|^* = 1$. Таким образом, получаем

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \lambda_{Tf}(2y) d\varphi(2y) = \int_0^{x_1} \int_1^{|\bar{f}(x)|^*} \varphi'(y) dy dx = \int_0^{x_1} \varphi(|\bar{f}(x)|^*) dx - x_1 \varphi(1).$$

Рассмотрим правую часть неравенства, пролученного после интегрирования. Обозначим для удобства $J = \int_0^{x_1} \varphi(|\bar{f}(x)|^*) dx - x_1 \varphi(1)$. Тогда аналогично предыдущему имеем

$$J \leq 4A_2 \int_0^{2\pi} (|f(x)|^*)^2 \int_{M(x)}^{\infty} \frac{\varphi'(y)}{y^2} dy dx + 2A_1 \int_0^{x_2} |f(x)|^* \int_1^{2|f(x)|^*} \frac{\varphi'(y)}{y} dy dx,$$

где $M(x) = \max \{1, 2|f(x)|^*\}$, а x_2 – точка такая, что $|f(x_2)|^* = \frac{1}{2}$. Проинтегрировав по частям внутренние интегралы последнего неравенства, получаем

$$J \leq 8A_2 \int_0^{2\pi} (|f(x)|^*)^2 \int_{M(x)}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y^3} dy dx + \\ + 2A_1 \int_0^{x_2} |f(x)|^* \left(\frac{\varphi(2|f(x)|^*)}{2|f(x)|^*} + \int_1^{2|f(x)|^*} \frac{\varphi(y)}{y^2} dy \right) dx.$$

Пусть u_0 – точка пересечения графиков функций $\varphi(y)$ и y . Так как $\varphi(y)$ ограничена при $y \leq u_0$ и $\varphi(y) \leq y$ при $y \geq u_0$, то

$$J \leq C_1 + 4A_2 \int_0^{2\pi} |f|^* dx + A_1 \int_0^{2\pi} \varphi(2|f|^*) dx + A_1 \int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(2|f|^*) dx, \quad (3)$$

где C_1 – некоторая константа. Рассмотрим отдельно $\int_0^{2\pi} \varphi(2|f(x)|^*) dx$. Пусть u_1 – точка пересечения графиков функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$. Так как $\varphi(y)$ ограничена при $y \leq u_1$ и $\varphi(y) \leq \psi(y)$ при $y \geq u_1$, то

$$\int_0^{2\pi} \varphi(2|f(x)|^*) dx \leq C_2 + \int_0^{2\pi} \psi(2|f(x)|^*) dx. \quad (4)$$

Аналогично

$$\int_0^{2\pi} 2|f(x)|^* dx \leq C_3 + \int_0^{2\pi} \psi(2|f(x)|^*) dx. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получаем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\bar{f}(x)|^*) dx - x_1 \varphi(1) \leq C_4 + C_5 \int_0^{2\pi} \psi(2|f(x)|^*) dx + \int_{x_1}^{2\pi} \varphi(|\bar{f}(x)|^*) dx.$$

Вспоминая, что $|\bar{f}(x)|^* \leq 1$ на отрезке $[x_1, 2\pi]$ и свойства перестановки неотрицательной функции, получаем (1). Теорема доказана.

Автор статьи выражает благодарность С.Ф. Лукомскому за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kolmogorov A.N.* Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // *Fund. Math.* 1925. Vol. 7. P. 23–28.

2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
4. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
5. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

УДК 517.984

М.Ю. Игнатьев

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ОДНОМ КЛАССЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Пусть T – дерево («звезда») с вершинами $\{v_j\}_{j=0}^p$ и ребрами $\{e_j\}_{j=1}^p$, $e_j = [v_0, v_j]$, каждое из которых имеет длину, равную 1. Будем считать, что на ребрах параметризация введена таким образом, что вершине v_0 соответствует $x = 1$. Функцию y на T будем рассматривать как вектор $y = [y_j(x)]_{j=1}^p$. Пусть σ – функция $\sigma = [\sigma_j(x)]_{j=1}^p$ на T такая, что $\sigma_j(x) \in L_2[0, 1]$, $j = \overline{1, p}$. Вектор $q = [q_j(x)]_{j=1}^p$, состоящий из обобщенных производных $q_j = \sigma'_j$, будем называть потенциалом.

Рассмотрим на T уравнение

$$\ell_j y_j \equiv -(y_j^{[1]})' - \sigma_j(x) y_j^{[1]} - \sigma_j^2(x) y_j = \lambda y_j, x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $y_j^{[1]} = y'_j - \sigma_j y_j$ – квазипроизводные, функции $y_j(x)$ таковы, что $y_j \in W_2^1[0, 1]$, $y_j^{[1]} \in W_1^1[0, 1]$, $\ell_j y_j \in L_2[0, 1]$ и выполнены условия склейки

$$y_j(1) = y_k(1), j, k = \overline{1, p}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^p y_j^{[1]}(1) = 0, \quad (3)$$

и линейные формы

$$U_j(y) = y_j^{[1]}(0) + h_j y_j(0), j = \overline{1, p}. \quad (4)$$

Под задачей $L = L(q, h)$ будем понимать совокупность уравнений (1) с условиями склейки (2), (3) и линейных форм (4). Решения Вейля $\Phi_k(x, \lambda) = [\Phi_{kj}(x, \lambda)]_{j=1}^p$, $k = \overline{1, p}$, определим как решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), (3) и краевым условиям $U_j(\Phi_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} – символ Кронекера. Функции $M_k(\lambda) = \Phi_{kk}(0, \lambda)$ назовем *функциями Вейля*, вектор $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=1}^p$ – *вектором Вейля*.

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Задача 1. По заданному вектору Вейля найти потенциал и коэффициенты h_j . Уравнения (1) можно рассматривать как уравнения Штурма – Лиувилля $-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j$ с сингулярным потенциалом $q_j \in W_2^{-1}(0, 1)$. Операторы Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами из класса $W_2^{-1}(0, 1)$ изучались в ряде работ различных авторов, в частности, обратная задача на конечном отрезке в работе [1]. Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля с суммируемым потенциалом на геометрических графах исследована, например, в [2]. В настоящей статье для изучения задачи 1 используется метод спектральных отображений [2], получено основное уравнение обратной задачи и установлена его однозначная разрешимость.

Пусть $\varphi_j(x, \lambda)$ – решения уравнения (1) (для данного фиксированного j) при условиях $\varphi_j(0, \lambda) = 1$, $\varphi_j^{[1]}(0, \lambda) = -h_j$. Обозначим

$$D_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \varphi_k(t, \lambda) \varphi_k(t, \mu) dt.$$

Пусть $\tilde{L} = L(\tilde{q}, \tilde{h})$ – произвольно выбранная («модельная») задача на T с заданным потенциалом $\tilde{q} = [\tilde{q}_j(x)]_{j=1}^p$, $\tilde{q}_j(x) = \tilde{\sigma}'_j(x)$, $\tilde{\sigma}_j(x) \in L_2[0, 1]$. Условимся, как принято в [2], что если a – некоторый объект, относящийся к задаче L , то \tilde{a} – аналогичный объект, относящийся к задаче \tilde{L} , $\hat{a} = a - \tilde{a}$.

Определим $\tilde{r}_k(x, \rho, \theta) = \tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) \theta \hat{M}_k(\mu)$, где $\lambda = \rho^2$, $\mu = \theta^2$, $\psi_k(x, \rho) = \hat{\varphi}_k(x, \lambda)$.

Обозначим через γ_τ прямую $Im\rho = \tau$, проходящую в направлении возрастания $Re\rho$, через Γ_τ – ее образ при отображении $\lambda = \rho^2$. Введем функции

$$g_k(x, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\tau} \tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) \hat{M}_k(\mu) \tilde{\varphi}_k(x, \mu) d\mu, \lambda = \rho^2,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Введем в рассмотрение интегральные операторы $H_k(x)$, $k = \overline{1, p}$, действующие в $L_2(\gamma_\tau)$ следующим образом:

$$H_k(x) f(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_\tau} \tilde{r}_k(x, \rho, \theta) f(\theta) d\theta.$$

Основной результат статьи содержит следующая

Теорема 1. При всех достаточно больших $\tau > 0$ для каждого $k = \overline{1, p}$, $x \in [0, 1]$ справедливы утверждения:

1. оператор $H_k(x)$ является оператором Гильберта – Шмидта;

2. оператор $E - H_k(x)$ имеет ограниченный обратный;

3. функция $\psi_k(x, \cdot) \in L_2(\gamma_\tau)$ и является (единственным в $L_2(\gamma_\tau)$) решением уравнения

$$\psi_k(x) = H_k(x)\psi_k(x) + g_k(x).$$

Основное уравнение, содержащееся в пункте 3 теоремы 1, является ключевым звеном конструктивной процедуры решения обратной задачи: по его решению может быть построен искомый потенциал [2].

Замечание. Фактически задание функции Вейля $M_k(\lambda)$ позволяет определить потенциал на «своем» ребре e_k . Для простоты изложения мы считаем заданными все функции Вейля $M_k(\lambda)$, $k = \overline{1, p}$, что позволяет свести задачу 1 к решению таких «локальных» задач. В действительности такая постановка задачи является переопределенной: для однозначного восстановления потенциала достаточно знать, например, $M_k(\lambda)$, $k = \overline{1, p-1}$. При этом непосредственно восстанавливаются $q_k(x)$, $k = \overline{1, p-1}$, а затем, используя описанную в [2] процедуру пересчета, ставится и решается обратная задача для ребра e_p .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. Vol. 19. P. 665–683.
2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 519.853

А.Б. Коноплев

О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ АФФИННОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОСТОЯННЫМИ МНОГОЗНАЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С ШАРОВЫМИ ОБРАЗАМИ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе [1] рассматривалась задача о равномерном в метрике Хаусдорфа приближении аффинного многозначного отображения (м.о.) постоянными м.о. с образами виде шара некоторой нормы. Здесь будет рассмотрен случай ее сведения к задаче линейного программирования.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задано аффинное м.о. $F(\cdot)$ следующего вида:

$$F(t) = (1 - t)A + tB, \quad (1)$$

где $t \in [0, 1]$, а A, B – выпуклые компакты из \mathbb{R}^p . Будем предполагать также, что $B \subset A$.

Пусть $n(x)$ – некоторая норма на \mathbb{R}^p , $n^*(x) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, x \rangle$ – полярная к ней норма, $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шар в норме $n(x)$ с центром в точке x и радиусом r . Обозначим через $h(A, B)$ расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из \mathbb{R}^p в норме $n(\cdot)$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x, r) \equiv \max_{t \in [0, 1]} h(F(t), Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0} \quad (2)$$

наилучшего равномерного на отрезке $[0, 1]$ приближения м.о. $F(\cdot)$ постоянными м.о. с образами в виде шаров $Bn(x, r)$.

Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^p$ и множества $\Omega_A = \overline{\mathbb{R}^p \setminus A}$ определим функции

$$\begin{aligned} R(x, A) &= \max_{y \in A} n(x - y), & \rho(x, A) &= \min_{y \in A} n(x - y), \\ P(x, A) &= \rho(x, A) - \rho(x, \Omega_A). \end{aligned}$$

Отметим, что они являются выпуклыми, конечными на \mathbb{R}^p и липшицевыми с константой 1 относительно нормы $n(\cdot)$ [2,3]. Множество точек проекции точки x на множество A определяется соотношением $Q^\rho(x, A) = \{y \in A : n(x - y) = \rho(x, A)\}$.

В работе [1] показано, что для м.о. вида (1) задача (2) эквивалентна следующей задаче выпуклого программирования

$$\Phi(x) = R(x, A) + P(x, B) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (3)$$

Множество ее решений обозначим через $X(A, B)$.

Теорема 1. *Справедливо следующее соотношение:*

$$X(A, B) \cap B \neq \emptyset.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда найдется хотя бы одна точка x_0 такая, что $x_0 \in X(A, B)$, $x_0 \notin B$ и показать, что проекция этой точки на множество B тоже будет решением задачи.

Итак, пусть $x_0 \in X(A, B)$, $x_0 \notin B$. Возьмем любую точку $z_0 \in Q^\rho(x_0, B)$. Тогда $P(x_0, B) = \rho(x_0, B) = n(x_0 - z_0)$, $P(z_0, B) = 0$ и, следовательно,

$R(x_0, A) + n(x_0 - z_0) = R(x_0, A) + P(x_0, B) = \Phi(x_0) \leq \Phi(z_0) = R(z_0, A)$. С другой стороны, в силу липшицевости функции $R(x, A)$ выполняется неравенство $R(z_0, A) - R(x_0, A) \leq n(x_0 - z_0)$. Отсюда получаем $R(z_0, A) - R(x_0, A) = n(x_0 - z_0)$, а тогда $\Phi(x_0) = \Phi(z_0)$, то есть $z_0 \in X(A, B)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для получения хотя бы одного решения задачи (3) достаточно найти минимум функции $\Phi(x)$ на компакте B . Эта задача с учетом того, что для $x \in B$ функция $P(x, B) = -\rho(x, \Omega_B)$, сводится к следующей задаче:

$$\Phi(x) = R(x, A) - \rho(x, \Omega_B) \rightarrow \min_{x \in B}. \quad (4)$$

Предположим, что компакт B является многогранником, заданным в виде

$$B = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle B_i, y \rangle + b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}\}, \quad (5)$$

где $B_i \in \mathbb{R}^p$, $b_i \in \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть единичный шар в норме $n(\cdot)$ также является многогранником следующего вида:

$$Bn(0_p, 1) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle + c_j \geq 0, \quad j = \overline{1, l}\}, \quad (6)$$

где $C_j \in \mathbb{R}^p$, $c_j \in \mathbb{R}^1$, $c_j > 0$, $j = \overline{1, l}$.

В работе [4] получены формулы, конкретизирующие вид функций $R(x, A)$ и $\rho(x, \Omega_B)$ для рассматриваемого случая.

$$R(x, A) = \max_{j=\overline{1, l}} \{\langle \bar{C}_j, x \rangle + \bar{c}_j\}, \quad \rho(x, \Omega_B) = \min_{i=\overline{1, m}} \{\langle \bar{B}_i, x \rangle + \bar{b}_i\}, \quad (7)$$

где $\bar{C}_j = -C_j/c_j$, $\bar{c}_j = \max_{y \in -A} \langle \bar{C}_j, y \rangle$, $\bar{B}_i = B_i/n^*(B_i)$, $\bar{b}_i = b_i/n^*(B_i)$.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из [5], докажем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Если B и $Bn(0_p, 1)$ заданы в виде (5), (6) соответственно, то задача (4) эквивалентна задаче линейного программирования следующего вида:*

$$\begin{cases} z = x^{(p+1)} \rightarrow \min, \\ x^{(p+1)} - \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x \rangle - \bar{c}_j + \bar{b}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, l}, \\ x \in B. \end{cases} \quad (8)$$

При этом, если пара (x^*, z^*) – решение задачи (8), то x^* – решение задачи (4). И наоборот, если x^* – решение задачи (4), то пара (x^*, z^*) , где $z^* = R(x^*, A) - \rho(x^*, \Omega_B)$ является решением задачи (8).

Доказательство. Заметим, что задачу (4) с учетом (7) можно записать в виде

$$\max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \} \rightarrow \min_{x \in B}. \quad (9)$$

Пусть пара $(x^*, x^{*(p+1)})$ является решением задачи (8), тогда

$$\begin{aligned} z^* = x^{*(p+1)} &= \max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x^* \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \} \geq \\ &\geq \min_{x \in B} \max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \} = L. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, для точки x' – решения задачи (9) выполняются неравенства $\langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \leq L$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, то есть пара (x', L) удовлетворяет условиям (8). Следовательно, z^* как наименьшее значение $x^{(p+1)}$, при котором выполняется (8), удовлетворяет неравенству $z^* \leq L$. С учетом неравенства (10) имеем $z^* = L$. Теперь отсюда и из (10) получаем, что x^* – решение задачи (4).

Пусть теперь x' – решение задачи (9). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \} &= \\ &= \min_{x \in B} \max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \} = L. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что

$$L \geq \max_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,l}} \{ \langle \bar{C}_j - \bar{B}_i, x' \rangle + \bar{c}_j - \bar{b}_i \},$$

то есть пара (x', L) удовлетворяет условиям (8). Поэтому для z^* – минимального значения $x^{(p+1)}$, при котором выполняется (8), имеем $z^* \leq L$. С другой стороны, выполняется условие (10). И следовательно, $z^* = L$, то есть пара (x', L) – решение задачи (8). Поскольку L – это минимальное значение целевой функции в задаче (9), то $L = z^* = R(x^*, A) - \rho(x^*, \Omega_B)$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дудов С.И., Коноплев А.Б. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянным многозначным отображением с шаровыми образами // Математика. Механика. Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 41–43.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Дудов С.И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 530–542.
4. Дудов С.И., Златорунская И.В. О приближенной равномерной оценке выпуклого компакта шаром произвольной нормы // ЖВМиМФ. 2005. Т. 45, № 3. С. 416–428.
5. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1964.

В.В. Корнев

**О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ
ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ,
ИМЕЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНЫХ
НА ДИАГОНАЛЯХ**

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t)f(t) dt, \quad (1)$$

где $A(x, t)$ n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t при $0 \leq t \leq x \leq 1$, $\frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x, t)|_{t=x} = \delta_{s, n-1}$ ($s = 0, 1, \dots, n$), $\delta_{s, n-1}$ — символ Кронекера, α — произвольное число, $\alpha^2 \neq 1$.

Для оператора (1) в [1] установлена равносходимость разложений произвольной суммируемой функции по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) в сравнении с тригонометрическими рядами Фурье, а в [2] для этих разложений доказан аналог теоремы Саса об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Следующую теорему можно рассматривать как аналог известного признака Жордана – Дирихле сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. Пусть $\arg \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \neq 0$ и m — одно из чисел $0, 1, \dots, n-1$. Тогда для любой $f(x) \in C^m[0, 1]$, у которой $f^{(m)}(x)$ имеет на $[0, 1]$ ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям $f^{(k)}(1) = (-1)^k \alpha f^{(k)}(0)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_{C^m[0,1]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по с.п.ф. оператора A , соответствующим характеристическим значениям, модули которых не превосходят r .

Доказательство. Изложим основные моменты доказательства. Введем в рассмотрение простейший оператор A_0 вида (1), для которого $A(x, t)$ есть

$$A_0(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

и его резольвенту Фредгольма $R_{0,\lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр. В работе [2] получены формулы для $R_{0,\lambda}$ в удобной для нашей задачи форме.

При достаточно больших $|\lambda|$ для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ справедлива формула

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} + \frac{1}{1 - \alpha^2} R_{0,\lambda} T'_t \left(E - \frac{1}{1 - \alpha^2} D^{n-1} (S - \alpha E) R_{0,\lambda} T'_t \right)^{-1} \times \\ \times D^{n-1} (S - \alpha E) R_{0,\lambda}, \quad (2)$$

где $D = d/dx$, $Sf(x) = f(1 - x)$, $T'_t f(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) f(t) dt$, $Tf(x) = \int_0^x T(x, t) f(t) dt$, $T = (E + T_1)^{-1} - E$, $T_1 f(x) = \int_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(x, t) f(t) dt$.

Исходя из формул для $R_{0,\lambda}$ можно показать, что если $f(x) \in C^m[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $\int_0^1 f^{(m)} < \infty$, то при $r \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} \left| \frac{d^s}{dx^s} R_{0,\lambda} f(x) \right| |d\lambda| \right\|_{C[0,1]} = |\rho|^{q_s} O(\|f\|_{C^m[0,1]}), \quad (3)$$

где $q_s = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq m, \\ s - m, & m + 1 \leq s \leq n - 1. \end{cases}$

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция из $C^m[0, 1]$, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда существует последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset C^n[0, 1]$, сходящаяся к $f(x)$ по норме пространства $C^m[0, 1]$, такая, что $f_k^{(s)}(1) = (-1)^s \alpha f_k^{(s)}(0)$ при $s = 0, 1, \dots, n - 1$, и $f_k^{(s)}(0) = f^{(s)}(0)$, $f_k^{(s)}(1) = f^{(s)}(1)$ при $0 \leq s \leq m$ ($k = 1, 2, \dots$).

Представим остаточный член в следующем виде:

$$f(x) - S_r(f, x) = [f(x) - f_k(x)] + [f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k) d\lambda. \quad (4)$$

Взяв произвольное число μ , не являющееся характеристическим значением оператора A , и положив $g_k(x) = A^{-1} f_k - \mu f_k(x)$, представим выражение во второй квадратной скобке в виде

$$f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g_k(x)}{\lambda - \mu} d\lambda. \quad (5)$$

Используя формулы (2), (3), (5) и учитывая непрерывность $g_k(x)$, можно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda \right\|_{C^m[0,1]} = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k) d\lambda \right\|_{C^m[0,1]} = 0. \quad (6)$$

Из (6) и (4) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Условия $f^{(k)}(1) = (-1)^k \alpha f^{(k)}(0)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) необходимы, так как этим условиям удовлетворяют с.п.ф. оператора A .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

2. Корнев В. В. Абсолютная и равномерная сходимость разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях// Мат. заметки. 2007. Т. 81, вып. 5. С. 713–723.

УДК 518.9

И.А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ ТРЕХ ЛИЦ С КОАЛИЦИЯМИ

Теория иерархических игр берет свое начало с работы [1]. Основная особенность иерархической игры состоит в том, что первый (управляющий) игрок обладает правом первого хода, он первым выбирает свою стратегию (часто в виде функции от действий других игроков) и сообщает ее остальным, после чего происходит выбор стратегий управляемыми игроками. Теория иерархических игр двух лиц достаточно развита [2, 3], чего нельзя сказать об играх трех и более лиц.

В настоящей статье предполагается, что первый игрок обладает широкими возможностями по организации обмена информацией между остальными игроками и их способа взаимодействия. В результате действий первого игрока фактически возникает игра второго и третьего игроков. В этой игре игроки 2 и 3, выбирая свои стратегии одновременно, могут вступить в коалицию, поведение в которой существенно зависит от характеристик данной игры и тем самым от действий первого игрока. Предполагается, что первый игрок знает, что второй и третий игроки совместно выбирают свои стратегии таким образом, чтобы образовавшийся исход давал каждому из них не менее того, что тот может обеспечить себе самостоятельно и был нелучшаем для обоих игроков на множестве таких исходов. Для упрощения изложения будем считать, что множества стратегий игроков конечны.

Пусть дана исходная игра $\Gamma = (X, Y, Z, F, G, H)$ с конечными множествами выборов игроков X, Y, Z и их функциями выигрыша F, G, H . Первый игрок может организовывать любые правила взаимодействия второго и третьего игроков. Формально это означает, что он может построить любую игру игроков 2 и 3 $\bar{\Gamma} = (\bar{Y}, \bar{Z}, \bar{G}, \bar{H}, \pi)$, где π — отображение $\bar{Y} \times \bar{Z}$ в $X \times Y \times Z$, обладающее свойствами

$$\begin{aligned} \forall y \in Y \quad \exists \bar{y} \in \bar{Y} \quad \forall \bar{z} \in \bar{Z} \quad pr_2 \pi(\bar{y}, \bar{z}) = y, \\ \forall z \in Z \quad \exists \bar{z} \in \bar{Z} \quad \forall \bar{y} \in \bar{Y} \quad pr_3 \pi(\bar{y}, \bar{z}) = z, \end{aligned}$$

обозначающими, что в игре $\bar{\Gamma}$ у второго и третьего игроков сохраняется возможность просто выбрать любой элемент из его исходного множества выборов. Функции \bar{G} и \bar{H} определяются равенствами

$$\bar{G}(\bar{y}, \bar{z}) = G(\pi(\bar{y}, \bar{z})), \quad \bar{H}(\bar{y}, \bar{z}) = H(\pi(\bar{y}, \bar{z})),$$

интересы первого игрока в игре $\bar{\Gamma}$ задаются формулой $\bar{F}(\bar{y}, \bar{z}) = F(\pi(\bar{y}, \bar{z}))$. Обозначим множество построенных игр через \mathcal{G} .

Определение 1. *Принципом оптимальности* игроков 2 и 3 называется отображение μ , которое каждой игре $\bar{\Gamma} \in \mathcal{G}$ ставит в соответствие подмножество $\mu(\bar{\Gamma}) \subset \bar{Y} \times \bar{Z}$.

Определение 2. *Гарантированным результатом* первого игрока в игре $\bar{\Gamma}$ при знании им принципа оптимальности μ называется величина $\gamma(\bar{\Gamma}) = \min_{(\bar{y}, \bar{z}) \in \mu(\bar{\Gamma})} \bar{F}(\bar{y}, \bar{z})$.

Определение 3. *Наибольшим гарантированным результатом* первого игрока называется величина $\gamma = \sup_{\bar{\Gamma} \in \mathcal{G}} \gamma(\bar{\Gamma})$.

Наше предположение о поведении второго и третьего игроков в коалиции означает использование ими следующего принципа оптимальности: $\mu(\bar{\Gamma}) = \{(\bar{y}', \bar{z}') : \bar{G}(\bar{y}', \bar{z}') \geq L_2(\bar{\Gamma}) \ \& \ H(\bar{y}', \bar{z}') \geq L_3(\bar{\Gamma}) \ \& \ \exists (\bar{y}'', \bar{z}'') \in \bar{Y} \times \bar{Z} \ \pi(\bar{y}', \bar{z}') < \pi(\bar{y}'', \bar{z}'')\}$, где $L_2(\bar{\Gamma}) = \max_{\bar{y}} \min_{\bar{z}} \bar{G}(\bar{y}, \bar{z})$, $L_3(\bar{\Gamma}) = \max_{\bar{z}} \min_{\bar{y}} \bar{H}(\bar{y}, \bar{z})$, $(x_1, y_1, z_1) < (x_2, y_2, z_2) \stackrel{df}{\iff} G(x_1, y_1, z_1) \leq G(x_2, y_2, z_2) \ \& \ H(x_1, y_1, z_1) \leq H(x_2, y_2, z_2)$, причем хотя бы одно неравенство строгое.

Теорема. *Справедливо равенство $\gamma = \max_{l \in L} l$, где L — множество таких чисел l , для которых существуют точки (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , удовлетворяющие условиям:*

$$A(x_2, y_2, z_2, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l), \quad (1)$$

$$A(x_3, y_3, z_3, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l), \quad (2)$$

$$\forall y \forall z \exists x A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l), \quad (3)$$

$$\forall y \exists x \exists z (A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \ \& \ G(x, y, z) \leq G(x_2, y_2, z_2)), \quad (4)$$

$$\forall z \exists x \exists y (A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \ \& \ G(x, y, z) \geq G(x_2, y_2, z_2)), \quad (5)$$

$$\forall z \exists x \exists y (A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \ \& \ H(x, y, z) \leq H(x_3, y_3, z_3)), \quad (6)$$

$$\forall y \exists x \exists z (A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \ \& \ H(x, y, z) \geq H(x_3, y_3, z_3)), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y \exists z (A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \ \& \\ & \ \& \ G(x, y, z) \geq G(x_2, y_2, z_2) \ \& \ H(x, y, z) \geq H(x_3, y_3, z_3)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l) \iff F(x, y, z) \geq l \vee G(x, y, z) < G(x_2, y_2, z_2) \vee H(x, y, z) < H(x_3, y_3, z_3) \vee \exists (x', y', z') ((x, y, z) < (x', y', z') \& F(x', y', z') \geq l)$.

Замечание 1. Выполнение условия $A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l)$ для точки (x, y, z) означает, что исход (x, y, z) либо дает первому игроку не меньше l , либо не может быть выбран вторым и третьим игроками вследствие их принципа оптимальности.

Идея доказательства теоремы. Условия (1) – (8) позволяют построить игру $\bar{\Gamma}$, для которой $L_2(\bar{\Gamma}) = G(x_2, y_2, z_2)$, $L_3(\bar{\Gamma}) = H(x_3, y_3, z_3)$ и при всех $(x, y, z) \in T(\bar{\Gamma})$ (где $T(\bar{\Gamma}) = \{\pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) : \bar{y} \in \bar{Y}, \bar{z} \in \bar{Z}\}$) выполняется условие $A(x, y, z, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, l)$. Следовательно, справедливо соотношение

$$\forall (x, y, z) \in T(\bar{\Gamma}) (F(x, y, z) \geq l \vee G(x, y, z) < L_2(\bar{\Gamma}) \vee H(x, y, z) < L_3(\bar{\Gamma}) \vee \exists (x', y', z') \in T(\bar{\Gamma}) ((x, y, z) < (x', y', z') \& F(x', y', z') \geq l)),$$

которое равносильно условию

$$\forall (x, y, z) \in T(\bar{\Gamma}) (F(x, y, z) \geq l \vee (x, y, z) \notin \pi(\mu(\bar{\Gamma}))).$$

Таким образом, для построенной игры $\bar{\Gamma}$ верно неравенство

$$\gamma(\bar{\Gamma}) = \inf_{(x,y,z) \in \pi(\mu(\bar{\Gamma}))} F(x, y, z) \geq l$$

и, следовательно, результат l гарантирован первому игроку.

Замечание 2. Данная теорема позволяет свести решение экстремальной задачи на множестве игр к решению хотя и громоздкой, но конечномерной экстремальной задачи.

Замечание 3. Множество L можно записать в виде

$$L = \{l : \Phi(l) \leq 0\},$$

где Φ — функция, полученная применением операций взятия максимума и минимума к исходным функциям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198, № 5. С. 1001–1004.
2. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Лекции по теории неаналитических игр. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

Ю.В. Курьшова

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье доказывается единственность восстановления потенциала $q \in \mathbf{L}_2(0, \pi)$ интегродифференциального оператора $L(q, M)$, заданного выражением

$$\ell y \equiv -y'' + q(x)y + \int_0^x M(x, t)y(t)dt, \quad x \in [0, \pi],$$

и краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

по так называемым *узлам* — нулям собственных функций (СФ). Суммируемая функция $M(x, t)$ полагается известной.

Узлы как спектральные данные (СД) появились впервые в работе Джойс Маклахлин [1], где доказывалась единственность восстановления классического оператора Штурма – Лиувилля по узлам. С тех пор вышла целая серия работ разных авторов, где по узлам восстанавливались различные виды дифференциальных операторов (см. литературу в [2, 3]). Для указанного интегродифференциального оператора обратная узловая задача рассматривается впервые. Следует отметить, что даже если брать в качестве СД не все узлы, а их подмножество, например, по одному узлу от каждой СФ, то обратная задача будет переопределена (это есть следствие того, что узлы несут в себе больше информации о задаче, чем, например, данные Борга или Левинсона). Но постановка обратных задач по узлам может способствовать развитию теории для некоторых классов операторов, в частности, для интегродифференциальных операторов.

Как отмечено в [4], прямая задача для оператора $L(q, M)$ исследуется аналогично $L(q, 0)$. Приведем из [4] необходимые сведения. Обозначим $\{\lambda_n\}_1^\infty$ собственные значения (СЗ) краевой задачи, которую обозначим так же как и оператор $L(q, M)$

$$\ell y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $\omega := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(x)dx = 0$, чего всегда можно добиться сдвигом спектра. Асимптотика СЗ такова

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\kappa_n}{n}, n \in \mathbf{N}, \{\kappa_n\}_{n=1}^\infty \in l_2. \tag{3}$$

Пусть $S(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1) с начальными условиями $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$. Для этого решения имеет место следующее представление:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K(x, t) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt, \quad \lambda = \rho^2, \quad (4)$$

где ядро $K(x, t)$ – непрерывная, не зависящая от ρ функция. Функции $S(x, \lambda_n)$ являются СФ задачи (1), (2), а соответствующие СЗ совпадают с нулями характеристической функции задачи $\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda)$, то есть

$$\Delta(\lambda_n) = S(\pi, \lambda_n) = 0.$$

Из асимптотики СФ ясно, что начиная с некоторого номера N узлы задачи $L(q, M)$ имеют те же свойства, что и узлы $L(q, 0)$. То есть каждая n -я СФ имеет внутри интервала $(0, \pi)$ ровно n нулей ($n > N$). Обозначим позицию j -го узла n -й СФ x_n^j . Как и в [1], можно показать, что узлы образуют всюду плотное множество в $(0, \pi)$ и в качестве СД можно рассматривать не все узлы, а лишь их плотное в $(0, \pi)$ подмножество. Не указывая, как это делать, будем в данной работе считать, что $X \subset \{x_n^j\}$, что и является выбранным плотным подмножеством узлов.

Рассмотрим наряду с задачей $L(q, M)$ задачу $L(\tilde{q}, M)$ того же вида. Введем для неё объекты $\{\tilde{\lambda}_n\}_1^\infty$, $\tilde{S}(x, \lambda)$, $\{\tilde{x}_n^j\}$, $\tilde{\omega}$ аналогично задаче $L(q, M)$. Требуем, чтобы $\tilde{\omega} = 0$.

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема. Пусть даны задачи $L(q, M)$ и $L(\tilde{q}, M)$ вида (1), (2). Если $X = \tilde{X}$, то $q = \tilde{q}$ п.в. на $(0, 1)$.

Доказательство. Так как X – плотное в $(0, 1)$ множество, то для любой точки $\xi \in (0, 1)$ найдется сходящаяся к ξ подпоследовательность узлов из X , которую мы будем обозначать $\{x_k\}_{k \in K}$. Далее, СЗ двух задач $L(q, M)$ и $L(\tilde{q}, M)$ также рассмотрим для тех же индексов $k \in K$. Обозначим $S_k(x) := S(x, \lambda_k)$, $\tilde{S}_k(x) := \tilde{S}(x, \tilde{\lambda}_k)$. В силу определения этих функций имеем тождества:

$$\begin{aligned} -S_k'' + qS_k + \int_0^x M(x, t)S_k(t)dt &= \lambda_k S_k, \\ -\tilde{S}_k'' + \tilde{q}\tilde{S}_k + \int_0^x M(x, t)\tilde{S}_k(t)dt &= \tilde{\lambda}_k \tilde{S}_k. \end{aligned}$$

Умножим первое из указанных тождеств на $\tilde{S}_k(x)$, второе – на $S_k(x)$ и почленно вычтем первое из второго, получим

$$S_k'' \tilde{S}_k - \tilde{S}_k'' S_k + (\tilde{q} - q) \tilde{S}_k S_k + \int_0^x M(x, t) \left(\tilde{S}_k(t) S_k(x) - S_k(t) \tilde{S}_k(x) \right) dt \equiv \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \right) S_k \tilde{S}_k.$$

Проинтегрируем последнее тождество в интервале $(0, x_k)$. Учтём при этом, что тождество Штурма $S_k'' \tilde{S}_k - \tilde{S}_k'' S_k = (S_k' \tilde{S}_k - \tilde{S}_k' S_k)'$ даст в силу начальных и краевых условий (в узловых точках) на $S_k(x)$ и $\tilde{S}_k(x)$ нулевой вклад в получившееся равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{x_k} (\tilde{q}(x) - q(x)) \tilde{S}_k(x) S_k(x) dx + \\ + \int_0^{x_k} \int_0^x M(x, t) \left(\tilde{S}_k(t) S_k(x) - S_k(t) \tilde{S}_k(x) \right) dt dx = \\ = \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \right) \int_0^{x_k} S_k(x) \tilde{S}_k(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу (4) и (3) и их аналогов для задачи $L(\tilde{q}, M)$ равномерно по x имеем

$$\begin{aligned} S_k(x) \tilde{S}_k(x) &= \frac{1 - \cos 2kx}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \\ \tilde{S}_k(t) S_k(x) - S_k(t) \tilde{S}_k(x) &= O\left(\frac{1}{k^3}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Умножим обе части тождества (5) на k^2 , тогда в силу представлений (5) и (6) его можно переписать как

$$\begin{aligned} \int_0^{x_k} (\tilde{q}(x) - q(x)) \left(\frac{1 - \cos 2kx}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right) dx + \int_0^{x_k} \int_0^x M(x, t) O\left(\frac{1}{k}\right) dt dx = \\ = \left(\tilde{\lambda}_k - \lambda_k \right) \int_0^{x_k} O(1) dx. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу в полученном тождестве при $k \rightarrow \infty$. При этом в силу выбора подпоследовательности узлов $x_k \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$. В силу асимптотики (3) для СЗ $\tilde{\lambda}_k - \lambda_k = O\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, и, значит, предел правой части равен нулю. В левой части второе слагаемое, очевидно, также в пределе даст нуль, а от первого в силу леммы Римана – Лебега останется $\int_0^\xi \frac{1}{2} (\tilde{q}(x) - q(x)) dx$. Таким образом,

$$\int_0^\xi (\tilde{q}(x) - q(x)) dx \equiv 0.$$

А так как ξ – произвольно выбранная точка из $(0, 1)$, то $q = \tilde{q}$ п.в. на $(0, 1)$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J.R.* Inverse theory Using Nodal Points as Data – A Uniqueness Result // J. Diff. Eq. 1988. Vol. 73, № 2. P. 354–362.
2. *Cheng Y.-H., Lau C.K.* The inverse nodal problems for Hill’s equation // Inverse problems. 2006. Vol. 22. P. 891–901.
3. *Lau C.K., Tsay J.* On the well-posedness of the inverse nodal problem // Inverse problems. 2001. Vol. 17. P. 1493–1512.
4. *Курьшова Ю.В.* Обратная спектральная задача для интегродифференциальных операторов // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 855–866.

УДК 517.984

А.С. Луконина

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В статье рассматривается оператор L , порожденный дифференциальным выражением:

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i \in C^1[0, 1]$ ($i = 1, 2$), и интегральным граничным условием:

$$U(y) = \int_0^1 p(t) y(t) dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha (1-t)^\alpha}, \quad (2)$$

где $1/2 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и удовлетворяет соотношению

$$(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)) (k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (3)$$

Граничное условие схожего с (2) вида $\int_{-1}^1 \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha} y(t) dt = 0$ для оператора дифференцирования $L_0 y = y'(x)$ было впервые рассмотрено А.М. Седлецким. Оператор (1),(2) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ был подробно изучен А.П. Хромовым [1]. На основе этой работы для оператора (1), (2) автором была доказана равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (в дальнейшем с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд

Фурье, получен аналог теоремы Жордана—Дирихле из теории тригонометрических рядов [2], а также установлена суммируемость по Риссу спектральных разложений [3], в настоящей статье исследуется базисность по Риссу системы с.п.ф. в пространстве $L_2[0, 1]$. Для оператора L_0y эти результаты получены А.М. Седлецким [4].

Резольвента оператора L . Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — комплексный параметр). Тогда имеем

$$\beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) = \lambda y(x) + f(x). \quad (4)$$

Полагая $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y(1-x)$ и беря еще (4) с заменой x на $(1-x)$, придём к системе

$$Bu'(x) + P(x)u(x) = \lambda u(x) + F(x), \quad (5)$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$. Система (5) есть система Дирака. Граничное условие (2) переходит в

$$\tilde{U}(u) = \int_0^1 N(t) u(t) dt = 0, \quad N(t) = \text{diag}(p(t), p(1-t)). \quad (6)$$

Лемма 1. Если $y = R_\lambda f$, то $u(x)$ удовлетворяет системе (5), (6). Обратное, если $u(x)$ удовлетворяет (5), (6) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda = u_1(x)$.

Лемма 2. Преобразование $u = \Gamma w$ приводит систему (5), (6) к

$$w'(x) + \tilde{P}(x)w(x) = \lambda Dw(x) + \tilde{F}(x), \quad \tilde{U}(\Gamma w) = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{P}(x) = D\Gamma^{-1}P(x)\Gamma$, $\tilde{F}(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(d, -d)$, $d = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$.

Пусть $H(x, \lambda) = H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)$, где $H_0(x) = \text{diag}(h_{11}(x), h_{22}(x))$, $h_{ii}(x) = \exp\left(-\int_0^x p_{ii}(t) dt\right)$, $p_{ii}(x)$ ($i = 1, 2$) — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$, а $H_1(x)$ — кодиагональная матрица, определяемая единственным образом из матричного уравнения:

$$H_0'(x) + \tilde{P}(x)H_0(x) + [H_1(x)D - DH_1(x)] = 0.$$

Лемма 3. При больших $|\lambda|$ преобразование $w = H(x, \lambda)z$ приводит (7) к следующей краевой задаче:

$$z'(x) + P_\lambda(x)z(x) = \lambda Dz(x) + F_\lambda(x), \quad \tilde{U}(\Gamma Hz) = 0, \quad (8)$$

где $P_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}H^{-1}(x, \lambda) \left[H_1'(x) + \tilde{P}(x)H_1(x) \right]$, $F_\lambda(x) = H^{-1}(x, \lambda)\tilde{F}(x)$.

При условии (3) (аналог условия регулярности Биркгофа), используя асимптотические свойства системы (8), получаем, что все $\lambda_k d$, где λ_k – собственные значения оператора L , находятся в некоторой полосе $\Pi = \{ \lambda d \mid |\Re \lambda d| \leq h \}$, причем число $\lambda_k d$ в прямоугольнике $|\Re \lambda d| \leq h$, $|\Im \lambda d - t| \leq 1$ ограничено при всех вещественных t . Полосу Π можно представить в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых Γ_k ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$; при возрастании $|k|$ контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $|\Re \lambda d| = \pm h$, и отрезков длины $2h$, параллельных вещественной оси. При этом контуры Γ_k находятся на положительном расстоянии от множества $\{ \lambda_k \}$. Кроме того, для каждого Γ_k конкретной группы существует целое t_k такое, что $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, где Γ – некоторый фиксированный контур этой группы, i – мнимая единица.

Лемма 4. Пусть J – любой конечный набор целых чисел. Тогда имеет место оценка: $\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda \right\| = O(1)$, равномерная по J ($\| \cdot \|$ – норма в $L_2[0, 1]$).

Используя полноту в $L_2[0, 1]$ системы с.п.ф. оператора L , получаем

Теорема. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0, 1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 80–87.
2. Луконина А.С. О сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 67–70.
3. Луконина А.С. О суммируемости по Риссу спектральных разложений одного функционально-дифференциального оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 69–72.
4. Седлецкий А.М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

5. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.

УДК 681.322

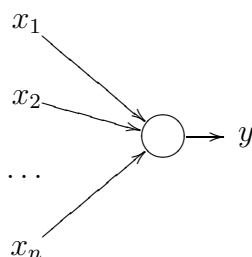
А.В. Малыгин, О.И. Аравин

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В настоящий момент в мире бурно развивается новая прикладная область математики, специализирующаяся на искусственных нейронных сетях. Актуальность исследований в этом направлении обусловлена возможностями применения нейронных сетей в самых разных областях.

Широта задач, решаемых нейронными сетями (НС), объясняется во многом тем, что возможность обучения позволяет сделать функционирование системы на порядок более эффективным.

Нейронные сети могут сильно отличаться друг от друга, однако у них есть несколько общих черт. Основу каждой нейронной сети составляют простые, чаще всего однотипные, элементы (ячейки), имитирующие работу нейронов мозга (аксоны и дендриты). Нейрон может определяться своим текущим состоянием по аналогии с нервными клетками головного мозга, которые могут быть возбуждены или заторможены. Нейрон обладает группой синапсов – входных связей, соединенных с выходами других нейронов, а также имеет аксон – выходную связь данного нейрона, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов [1]. (рисунок)



Нейрон

Каждый синапс определяется так называемой величиной синаптической связи или ее весом w_i . Текущее состояние нейрона определяется как сумма его входов:

$$s = \sum_{i=1}^n x_i w_i.$$

Выход нейрона можно определить как функцию от его состояния: $y = f(s)$.

Нелинейная функция f называется *активационной* и может быть представлена по-разному, одной из наиболее распространенных является нелинейная функция с насыщением, или сигмоид (т.е. функция S -образного вида).

Этап проектирования, в котором происходит корректировка весов, называется *обучением нейронной сети*, и от того, насколько качественно он будет выполнен, зависит возможность сети решать поставленные проблемы. На этом этапе, кроме параметра качества подбора весов, важную роль играет и время обучения. Чаще всего, эти два параметра связаны обратной зависимостью. Нейронную сеть можно обучать с учителем или без него [2]. В первом случае сети предъявляются значения входных и правильных выходных сигналов, и сеть по внутреннему алгоритму подстраивает веса своих синаптических связей. Во втором случае, выходы НС формируются самостоятельно, а веса корректируются по алгоритму, учитывающему только входные сигналы.

Например, большинство известных на сегодняшний день нейронных сетей используют для нахождения взвешенной суммы входов нейрона формулу

$$s = \sum_{i=1}^n x_i w_i,$$

однако в некоторых приложениях нейронных сетей полезно ввести другую запись, например:

$$s = \sum_{i=1}^n x_i^2 w_i$$

или

$$s = \sum_{i=1}^n x_i x_{((i+1) \bmod n)} w_i.$$

Главное, чтобы разработчик нейронной сети четко понимал, для чего эта сеть проектируется и какими полезными свойствами должен обладать нейрон. Введение нелинейности такого рода в общем случае увеличивает вычислительную мощность сети, то есть позволяет из меньшего числа нейронов создать нейронную сеть, выполняющую работу обычной сети.

Задача, стоящая перед нами, включала в себя проектирование нейронной сети, позволяющей идентифицировать образцы почерков разных людей и формирование этих образцов на основе рукописных материалов.

На первом этапе была спроектирована нейронная сеть для распознавания образцов почерка двух людей (А и В). Обучение производилось на основе выборки из образцов почерка людей. Под образцом почерка мы понимаем отдельные растровые изображения букв каждого из людей. Сеть имела 3

слоя, в каждом из которых происходила обработка разных сегментов изображения, каждый участок сети обрабатывал свой кусок изображения и подавал на следующий слой результативный выходной сигнал, на следующем слое происходила обработка этих сигналов, группировка более крупных кусков и так далее, пока на третьем слое не вычислялся выходной сигнал от всего изображения в целом. Сначала обучение сети производилось с помощью лишь одной буквы «И». Впоследствии выборка была расширена до пяти букв «И», «Ж», «О», «А», «Н». В дальнейшем представляется необходимым расширять набор рассматриваемых букв, чтобы при анализе текста можно было бы существенно улучшить качество распознавания. Наша обучающая выборка состояла из 5 букв «И», 5 букв «О», 5 букв «Ж», 10 букв «А» и 5 букв «Н» каждого из людей.

После обучения следовала длительная процедура проверки корректности нейронной сети с помощью большого количества образцов почерков, не участвующих в обучении. На вход нейронной сети подается битовая матрица изображения образца почерка.

На выходе нейронная сеть выдает 1, если указанный образец можно отнести как наиболее близкий к образцам почерка человека А, и 0 — в обратном случае. Путем корректировки активационной функции и пороговых значений, а также скорости обучения, удалось добиться достаточно высокой точности распознавания (менее 5% ошибок).

На следующем этапе необходимо было продолжить работу в направлении сильного снижения процента ошибок и более общей классификации. То есть в случае, когда рассматривалась бы группа людей и сеть была бы обучена образцам почерков каждого из них. Работоспособность нейронной сети проверялась на 11 тестовых примерах. Тестирование показало, что уровень погрешности существенно снижен (менее 1% ошибок). Наибольший процент ошибок был зарегистрирован при распознавании буквы «О», что объясняется достаточно общей манерой ее написания.

После получения работоспособной нейронной сети встала следующая проблема. При криминалистическом анализе почерка необходимо иметь надежный механизм работы с рукописным текстом, который позволил бы выделить из текста отдельные буквы, распознать их и подать на вход нейронной сети [3]. Таким образом, имея в своем распоряжении текст-образец почерка подозреваемого и текст, который необходимо идентифицировать, программа могла бы обучить нейронную сеть на основе букв, выделенных из текста-образца, и сделать вывод о принадлежности его подозреваемому.

Задача, стоящая перед нами, оказалась далеко не тривиальной, потому что необходимо было решить несколько проблем:

- очистить текст от артефактов и корректировка естественных деформаций;

- выделить отдельные буквы из текста и сохранить их в отдельных файлах или битовых массивах, пригодных к тому, чтобы быть поданными на вход нейронной сети;
- распознать эти буквы.

На первом этапе работы с текстом необходимо разбить страницу на блоки, основываясь на особенностях правого и левого выравнивания и возможного наличия нескольких колонок. Затем распознанный блок разбивается на строки. И здесь неизбежны перекосы изображения страницы или фрагментов страницы. Даже небольшой наклон может привести к тому, что левый край одной строки становится существенно ниже правого края следующей, что особенно чувствительно при небольшом межстрочном интервале [4]. В результате возникает проблема определения строки, к которой относится тот или иной фрагмент изображения. Например, для букв «Ё», «Й» при небольшом наклоне уже сложно определить, к какой строке относится верхняя (отдельная) часть символа (иногда ее можно принять за запятую или точку).

Затем происходит разбиение строк на непрерывные области изображения, которые, как правило, соответствуют буквам; алгоритм распознавания делает предположения относительно соответствия этих областей символам; а затем делается выбор каждого символа.

Встречающиеся в реальной жизни тексты обычно далеки от совершенства, и процент ошибок распознавания для «нечистых» текстов часто недопустимо велик. Грязные изображения имеют наиболее очевидную проблему, потому что даже небольшие пятна могут затенять определяющие части символа или преобразовывать один в другой.

Распознавание осложняют особенности почерка отдельных людей. Для улучшения распознавания некачественных текстов часто используют специальные контекстные модули. В систему распознавания имеет смысл заложить словарь языка, модели словоизменения. Например, в слове «дом» буква «о», написанная с дефектом, превратилась в букву «с». Но программа знает, что слова «дсм» в русском языке нет, а слово «дом» есть, значит, программа решает, «скорее всего, это буква "о»».

В настоящий момент нам удалось решить задачу обработки изображения, удаления артефактов и выделения отдельных букв, проблема распознавания решена пока только на уровне распознавания печатного текста.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интеллект. М.: Академия, 2005.
2. Хайкин С. Нейронные сети. М.; СПб.; Киев: Вильямс, 2006.
3. Курьянова А.А. Теоретические основы и методика судебно-почерковедческих исследований: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1992.
4. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая Линия – Телеком, 2007.

А.В. Мелешкина

ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ЭРМИТОВА СПЛАЙНА НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Будем рассматривать замкнутый невырожденный треугольник $\bar{T} = (A_1A_2A_3)$ на плоскости, T – его внутренность. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на T и $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_iA_j}}{|A_iA_j|}$, $i, j = \overline{1, 3}$, – единичные векторы.

Будем строить полином $Q(\mathbf{x})$ третьей степени с действительными коэффициентами, интерполирующий функцию $f(\mathbf{x})$ вместе с её производными в вершинах треугольника по направлениям сторон T

$$f(A_i) = Q(A_i), \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, i, j = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

Полином $Q(\mathbf{x})$ имеет 10 коэффициентов. Условия (1) определяют только 9 из них. То есть нужно еще одно условие для выбора десятого коэффициента. От этого будет зависеть степень приближения функции $f(\mathbf{x})$ полиномом $Q(\mathbf{x})$.

Выбрав в качестве условия равенство производных по направлению нормали в средней точке на наименьшей стороне треугольника. А. Женишек [1] доказал теорему, в которой оценивается отклонение частных производных. В оценке присутствует синус второго по величине угла в знаменателе.

Ю.Н. Субботин [2] взял в качестве условия равенство производных в средней точке наименьшей стороны треугольника по направлению наибольшей стороны и вывел оценки для отклонения частных производных до третьего порядка, которые зависят от синуса наибольшего угла треугольника в знаменателе (некоторые оценки даже не зависят от углов).

У Ю.В. Куприяновой [3] последнее условие – равенство производных в средней точке одной из сторон треугольника по направлению другой стороны, и оцениваются уже не частные производные, а производные по направлениям сторон. Оценки для отклонений производных по направлениям двух сторон, как оказалось, не зависят от углов треугольника. Но при этом десятое условие берется как равенство производных по направлению в средней точке любой из сторон треугольника. Если возьмем два треугольника с общей границей, то при таком выборе десятого условия гладкости на границе вообще говоря может и не быть. Поэтому попробуем взять это условие как у А. Женишека [1] – равенство производных по нормали в средней точке, но уже не какой-то конкретной стороны, а произвольной, и найдем оценки отклонения производных по направлениям сторон треугольника.

Теорема. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ определена на треугольнике \bar{T} и имеет на нем частные производные до второго порядка включительно. Пусть

$d(\bar{T})$ – диаметр треугольника,

$$M_2 = \sup_{\xi, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \left| \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2} \right|,$$

и пусть интерполяционный полином $Q(\mathbf{x})$ третьей степени удовлетворяет условиям (1). Пусть $P_{12} = (A_1 + A_2)/2$ и

$$\frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial Q(P_{12})}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали, проведенный к стороне A_1A_2 . Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial Q(x)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right| \leq C_1 d(\bar{T}) M_2, \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial Q(x)}{\partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right| \leq C_2 d(\bar{T}) M_2. \quad (4)$$

Доказательство. Будем рассматривать на треугольнике \bar{T} барицентрические координаты x_1, x_2, x_3 . Тогда полином $Q(\mathbf{x})$, интерполирующий функцию $f(\mathbf{x})$ с условиями (1), (2), будет иметь следующий вид (воспользуемся результатом Ю.В. Куприяновой [3]):

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = & f(A_1)x_1^3 + f(A_2)x_2^3 + f(A_3)x_3^3 + 3f(A_1)x_1^2(x_2 + x_3) + 3f(A_2)x_2^2(x_1 + x_3) + \\ & + 3f(A_3)x_3^2(x_1 + x_2) + |A_1A_2| \left(\frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} x_1^2 x_2 + \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}} x_1 x_2^2 \right) + \\ & + |A_1A_3| \left(\frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} x_1^2 x_3 + \frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{31}} x_1 x_3^2 \right) + \\ & + |A_2A_3| \left(\frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}} x_2^2 x_3 + \frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{32}} x_2 x_3^2 \right) + 6a_{111}x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 6a_{111} = & 6f(A_1) - |A_1A_3| \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} - |A_2A_3| \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}} + 2|A_1A_2| \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \\ & + |A_1A_2| \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}} + 4|A_1A_3| \frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{13}} + \\ & + (\mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{12}) |A_1A_3| \left(6 \frac{f(A_2) - f(A_1)}{|A_1A_2|} + \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}} - \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 4 \frac{\partial f(P_{12})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right). \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1, 3},$$

преобразуем разность:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \\ & = x_1^2 \left(\frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + x_2^2 \left(\frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + x_3^2 \left(\frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & \quad + 2x_1 x_2 \left(3 \frac{f(A_2) - f(A_1)}{|A_1 A_2|} - \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & \quad + 2x_1 x_3 \left(3 \frac{(a_{111} - f(A_1))}{|A_1 A_2|} - \frac{|A_1 A_3|}{|A_1 A_2|} \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) + \\ & \quad + 2x_2 x_3 \left(3 \frac{(f(A_2) - a_{111})}{|A_1 A_2|} + \frac{|A_2 A_3|}{|A_1 A_2|} \frac{\partial f(A_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4. \end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем и формулу Тейлора для каждой из разностей в последнем равенстве, получим:

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| & \leq d(\overline{T}) \cdot M_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2); \\ |\Sigma_2| & \leq 4 \cdot d(\overline{T}) \cdot M_2 \cdot x_1 x_2; \\ |\Sigma_3| & \leq \frac{19}{2} \cdot d(\overline{T}) \cdot M_2 \cdot x_1 x_3; \\ |\Sigma_4| & \leq \frac{27}{8} \cdot d(\overline{T}) \cdot M_2 \cdot x_1 x_3. \end{aligned}$$

Подставляя найденные оценки в формулу для разности производных, получим

$$\left| \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right| \leq d(\overline{T}) \cdot M_2 \cdot \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1 x_2 + \frac{19}{2} x_1 x_3 + \frac{27}{8} x_2 x_3 \right).$$

Используя методы анализа, получаем нужную оценку. Второе неравенство получается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. В силу равноправия производных по направлениям \mathbf{e}_{13} и \mathbf{e}_{23} оценка отклонения производной по направлению \mathbf{e}_{23} также будет зависеть только от диаметра треугольника и максимума второй производной. Таким образом, оценки отклонения производных по всем трем направлениям сторон не зависят от углов треугольника.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, № 211. P. 929–941.

2. *Субботин Ю.Н.* Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 120–130.

3. *Куприянова Ю.В.* Об оценке производной по направлению Эрмита сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 59–61.

УДК 519.4

В.А. Молчанов

О ЛОГИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ЯЗЫКОВ НА КОНЕЧНЫХ АВТОМАТАХ

В работе [1] предложен унифицированный подход к теории языков конечных автоматов на основе методов нестандартного анализа [2]: здесь естественно введено понятие распознаваемого автоматом Буши языка произвольных слов и описан класс $\text{Rec}_B(A)$ таких языков. В последующей работе [3] с помощью методов нестандартного анализа естественно введено понятие языка произвольных слов, распознаваемого конечной полугруппой, и описан класс $\text{Rec}_S(A)$ таких языков. Проведенные исследования показывают, что в отличие от равносильности понятий распознаваемых автоматами и полугруппами языков конечных слов [4] класс $\text{Rec}_S(A)$ значительно шире класса $\text{Rec}_B(A)$. С другой стороны, в работе [5] введено понятие обобщенного автомата Мюллера и доказано, что класс $\text{Rec}_M(A)$ распознаваемых такими автоматами языков произвольных слов содержит класс $\text{Rec}_S(A)$. С целью доказательства обратного включения $\text{Rec}_M(A) \subset \text{Rec}_S(A)$ в настоящей статье развивается теоретико-модельный подход к языкам произвольных слов, разработанный Буши [6] для языков конечных слов и языков бесконечных вправо слов.

В основе такого подхода лежит возможность описания языков над конечным алфавитом A формулами языка \mathcal{L} монадической логики 2-го порядка [7] сигнатуры $\Omega = \{<, (R_a)_{a \in A}\}$, состоящей из одного символа бинарного предиката $<$ и семейства символов унарных предикатов R_a ($a \in A$). Алфавит такого языка \mathcal{L} , помимо символов $<$ и R_a , содержит знак равенства $=$, символы логических связок $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ и кванторов \forall, \exists , предметные переменные x, y, \dots , предикатные унарные переменные X, Y, \dots и скобки. Атомарными формулами языка \mathcal{L} являются выражения $x = y, x < y, R_a(x), X(x)$, где x, y – предметные переменные и X – предикатная унарная переменная. Из таких атомарных формул с помощью логических связок и кванторов обычным образом [7] строятся формулы языка \mathcal{L} .

Интерпретируются формулы языка \mathcal{L} в алгебраических Ω -системах $M = (M, <_M, (R_a^M)_{a \in A})$ с помощью отображения θ_1 предметных переменных в элементы множества M и отображения θ_2 предикатных переменных в подмножества множества M . При этом символы предикатов $<$ и R_a ($a \in A$)

интерпретируются как сигнатурные отношения $<_M$ и R_a^M ($a \in A$) алгебраической Ω -системы M . В результате такой интерпретации каждая формула Φ языка \mathcal{L} становится истинным или ложным утверждением о свойствах алгебраической Ω -системы M . Например, атомарная формула $x = y$ истинна, если $\theta_1(x) = \theta_1(y)$, формула $x < y$ истинна, если $\theta_1(x) <_M \theta_1(y)$, формула $R_a(x)$ истинна, если $\theta_1(x) \in R_a^M$, и формула $X(x)$ истинна, если $\theta_1(x) \in \theta_2(X)$. В случае истинности полученного из формулы Φ утверждения о системе M будем говорить, что формула Φ выполняется на алгебраической Ω -системе M при интерпретирующем отображении $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и записывать $M \models_\theta \Phi$. Будем говорить, что формула Φ тождественно истинна на алгебраической Ω -системе M и записывать $M \models \Phi$, если $M \models_\theta \Phi$ при любом интерпретирующем отображении $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Рассмотрим конечный алфавит A . Пусть $W_{fin}(A)$ – множество всех конечных слов, $W^\rightarrow(A)$ – множество всех бесконечных вправо слов, $W^\leftarrow(A)$ – множество всех бесконечных влево слов, $W^\leftrightarrow(A)$ – множество всех бесконечных в обе стороны слов и $W(A) = W_{fin}(A) \cup W^\rightarrow(A) \cup W^\leftarrow(A) \cup W^\leftrightarrow(A)$ – множество всех слов над алфавитом A . Подмножества $W(A)$ называются *языками произвольных слов над алфавитом A* .

Поскольку каждое слово $w \in W(A)$ можно рассматривать как отображение некоторого отрезка (конечного или бесконечного в любую сторону) множества целых чисел \mathbf{Z} в алфавит A , то для слова w канонически определяется алгебраическая Ω -система $M_w = (\mathbf{Z}, <, (R_a)_{a \in A})$, где $<$ – отношение сравнения целых чисел и $R_a = \overline{w}^{-1}(a)$ для каждого $a \in A$. Будем говорить, что слово w удовлетворяет формуле Φ языка \mathcal{L} , если $M_w \models \Phi$. Множество всех слов $w \in W(A)$, удовлетворяющих условию $M_w \models \Phi$, называется *спектром формулы Φ* и обозначается символом $S(\Phi)$.

Для сокращения записи формул введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x \leq y &:= (x < y \vee x = y), & x \dot{<} y &:= (x < y \wedge \neg \exists z(x < z < y)), \\ D(x) &:= \bigvee_{a \in A} R_a(x), & x = \min &:= (D(x) \wedge \forall y(D(y) \Rightarrow x \leq y)), \\ & & x = \max &:= (D(x) \wedge \forall y(D(y) \Rightarrow y \leq x)). \end{aligned}$$

Так как формула $D(x)$ в алгебраической Ω -системе M_w определяет множество $\text{dom } w$, то в языке \mathcal{L} найдутся такие формулы Φ_{fin} , Φ^\rightarrow , Φ^\leftarrow и Φ^\leftrightarrow , которые определяют соответственно свойства конечности, бесконечности вправо, бесконечности влево и бесконечности в обе стороны слова w , т.е. выполняются равенства $S(\Phi_{fin}) = W_{fin}(A)$, $S(\Phi^\rightarrow) = W^\rightarrow(A)$, $S(\Phi^\leftarrow) = W^\leftarrow(A)$ и $S(\Phi^\leftrightarrow) = W^\leftrightarrow(A)$. Например, слово w конечно в том и только том случае, если оно удовлетворяет формуле $\Phi_{fin} := \exists x \exists y(x = \min \wedge y = \max)$, и

бесконечно вправо, если оно удовлетворяет формуле

$$\Phi^{\rightarrow} := \exists x(x = \min \wedge \forall y \exists z(y < z \wedge D(z))).$$

Пусть $\mathcal{A} = (Q, A, E, c, F, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{T})$ – некоторый обобщенный автомат Мюллера [5] с множеством состояний $Q = \{1, 2, \dots, n\}$, множеством переходов $E \subset Q \times A \times Q$, центральным состоянием $c \in Q$, множеством заключительных состояний $F \subset Q$, левой и правой таблицами состояний \mathcal{I}, \mathcal{J} и таблицей состояний \mathcal{T} . Из результатов работы [7] следует, что существование в автомате \mathcal{A} пути с меткой $w \in W(A)$ можно определить с помощью формулы

$$\Psi := \left(\bigwedge_{i \neq j} \neg \exists x (D(x) \wedge X_i(x) \wedge X_j(x)) \right) \wedge \left(\forall x \forall y \left(x < y \wedge D(x) \wedge D(y) \Rightarrow \bigvee_{(i,a,j) \in E} (X_i(x) \wedge R_a(x) \wedge X_j(y)) \right) \right).$$

При этом в языке \mathcal{L} найдутся такие формулы Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 и Ψ_4 , которые определяют успешность такого пути соответственно для конечного, бесконечного вправо, бесконечного влево и бесконечного в обе стороны слова w . Например, конечное слово w успешно в автомате \mathcal{A} в том и только том случае, если оно удовлетворяет соотношению $\Psi_1 := X_c(\min) \wedge \bigvee_{i \in F} X_i(\max)$, и бесконечное вправо слово w успешно в автомате \mathcal{A} в том и только том случае, если оно удовлетворяет условию

$$\Psi_2 := X_c(\min) \wedge \bigvee_{B \in \mathcal{J}} \left(\bigwedge_{i \in B} (\forall x (D(x) \Rightarrow \exists y (x < y \wedge X_i(y))) \right).$$

Теорема. *Для обобщенного автомата Мюллера \mathcal{A} спектр формулы*

$$\exists X_1 \dots \exists X_n (\Psi_0 \wedge (\Phi_{fin} \Rightarrow \Psi_1) \wedge (\Phi^{\rightarrow} \Rightarrow \Psi_2) \wedge (\Phi^{\leftarrow} \Rightarrow \Psi_3) \wedge (\Phi^{\leftrightarrow} \Rightarrow \Psi_4))$$

совпадает с распознаваемым автоматом \mathcal{A} языком произвольных слов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Molchanov V.A. Nonstandard approach to general rational languages // Contributions to General Algebra. 2001. Vol. 13. P. 233–244.
2. Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990. 616 с.
3. Молчанов В.А. О распознавании языков произвольных слов конечными полугруппами // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. 2006. Т. 6. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1/2. С. 96–108.
4. Pin J.E. Finite semigroups and recognizable languages: an introduction // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 1–32.

5. Молчанов В.А. О распознавании языков полугруппами и автоматами // Математика. Механика: Сб. науч. тр. 2006. Вып. 8. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, С. 83–86.

6. Büchi J.R. Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik and Grundle. Math. 1960. Vol. 6. P. 66–92.

7. Perrin D., Pin J.E. Semigroups and automata on infinite words // Semigroups, Formal Languages and Groups, NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences. 1993. Vol. 466. P. 49–72.

УДК 519.853.3 + 517.518.82

Е.А. Нарыжная

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – непрерывные на отрезке $[c, d]$ функции, причем $g_1(t) < g_2(t)$ при $t \in [c, d]$. Обозначим через $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_n t^n$ полином n -й степени с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$. $\Phi(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ – сегментная функция (с.ф.), сопоставляющая каждому значению $t \in [c, d]$ соответствующий сегмент.

Рассмотрим следующую задачу о наилучшем приближении с.ф. $\Phi(t)$ полиномом n -й степени:

$$\varphi(A) \stackrel{df}{=} \max_{t \in [c, d]} (\rho(\Phi(t), P_n(A, t)) + \rho(P_n(A, t), \Phi(t))) \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}}, \quad (1)$$

где

$$\rho(\Phi(t), P_n(A, t)) = \max \{g_2(t) - P_n(A, t), P_n(A, t) - g_1(t)\}$$

есть уклонение с.ф. от полинома,

$$\rho(P_n(A, t), \Phi(t)) = \max \{P_n(A, t) - g_2(t), g_1(t) - P_n(A, t), 0\}$$

есть уклонение полинома от с.ф.

Очевидно, что функция $F(A, t) \stackrel{df}{=} \rho(\Phi(t), P_n(A, t)) + \rho(P_n(A, t), \Phi(t))$ выпукла по A на R^{n+1} при каждом фиксированном $t \in [c, d]$. Следовательно (см., например [1]), и функция $\varphi(A)$ является выпуклой на R^{n+1} . Обозначим через

$$R(A) \stackrel{df}{=} \{t \in [c, d] : \varphi(A) = F(A, t)\},$$

$$R_1(A) \stackrel{df}{=} \left\{ t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} > 0 \right\},$$

$$R_2(A) \stackrel{df}{=} \left\{ t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - \frac{g_2(t_i) + g_1(t_i)}{2} < 0 \right\},$$

$$R_3(A) \stackrel{df}{=} \{t \in R(A) : P_n(A^*, t_i) - g_2(t) = g_1(t) - P_n(A, t)\}.$$

Пользуясь субдифференциальным исчислением выпуклых функций [1, 2] можно доказать, что имеет место

Теорема 1. *Субдифференциал $\partial\varphi(A)$ функции $\varphi(A)$ может быть выражен следующей формулой:*

$$\partial\varphi(A) = co \{ \xi(t)(1, t, \dots, t^n | t \in R(A)) \}, \quad (2)$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} [1, 2], t \in R_1(A), \\ [-2, -1], t \in R_2(A), \\ [-1, 1], t \in R_3(A). \end{cases} \quad (3)$$

2. Сформулируем критерий решения задачи (1).

Теорема 2. *Для того чтобы вектор A^* был решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

а) $R_3(A^*) \neq \emptyset$;

б) найдутся точки $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}} \subset R(A^*) : c \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq d$ такие, что если $t_i \in R_1(A^*)$ (соответственно $t_i \in R_2(A^*)$), то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$ (соответственно $t_{i+1} \in R_1(A^*)$) для всех $i = \overline{0, n+1}$.

Доказательство. В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [2, с. 142], для того чтобы вектор A^* давал минимальное значение выпуклой функции $\varphi(A^*)$ на R^{n+1} необходимо и достаточно, чтобы

$$0_{n+1} \in \partial\varphi(A^*). \quad (4)$$

Необходимость. Пусть для A^* выполняется (4) и $R_3(A^*) \neq \emptyset$, достаточно рассмотреть случаи

1. $R(A^*) = R_1(A^*)$ или $R(A^*) = R_2(A^*)$. Тогда из (2), (3) следует $0_{n+1} \notin \partial\varphi(A^*)$, то есть получаем противоречие с (4).

2. $R(A^*) = R_1(A^*) \cup R_2(A^*)$. Из (2)–(4) получаем

$$0_{n+1} \in co \{ \xi(t)(1, t, \dots, t^n | t \in R(A^*)) \}.$$

Отсюда, учитывая $R_3(A^*) = \emptyset$, по теореме 1 из [3] следует, что существует $\{t_i\}_{i=\overline{0, n+1}} : c \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq d$ и функция $f(t) \in \xi(t)$ такая, что $\operatorname{sgn} f(t_i) = -\operatorname{sgn} f(t_{i+1})$. В соответствии с (3) это означает, что если $t_i \in R_1(A^*)$, то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$, $i = \overline{0, n+1}$ (или если $t_i \in R_2(A^*)$, то $t_{i+1} \in R_1(A^*)$). Таким образом, получаем, что выполняется условие б).

Достаточность. Предположим, что выполняется условие (а). Тогда из (3) следует, что $0 \in \xi(t^*)$ для $t^* \in R_3(A^*)$, а значит из (2) получаем (4), то есть A^* – решение задачи.

Пусть теперь выполняется условие (б). То есть существует упорядоченный набор $\{t_i\}_{i=\overline{0,n+1}} \subset R_1(A^*) : c \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq d$, причем если $t_i \in R_1(A^*)$ (соответственно $t_i \in R_2(A^*)$), то $t_{i+1} \in R_2(A^*)$ (соответственно $t_{i+1} \in R_1(A^*)$). Тогда в соответствии с (3) этим точкам можно сопоставить значения $f(t_i) \in \xi(t_i)$, и функция $\operatorname{sgn} f(t_i) = -\operatorname{sgn} f(t_{i+1})$. Используя теорему 1 из [3], в силу (2) получаем, что

$$0_{n+1} \in \operatorname{co} \{ \xi(t)(1, t, \dots, t^n | t \in R_1(A^*) \cup R_2(A^*)) \} \subset \partial\varphi(A^*).$$

Теорема доказана.

3. Задача (1) отличается от задачи из [4] наличием второго слагаемого

$$\rho(P_n(A, t), \Phi(t)) = \max \{ P_n(A, t) - g_2(t), g_1(t) - P_n(A, t), 0 \}.$$

Рассмотрим пример, в котором решение задачи (1) будет отличаться от решения задачи из [4], а также от задачи Чебышева, в которой приближаемая функция имеет следующий вид:

$$g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}.$$

Возьмем $g_1(t) = t, g_2(t) = \begin{cases} 4 + t, t \leq 1, \\ 7 - 2t, t \geq 1, \end{cases} \quad t \in [0, 2]$, и $n = 1$. Решением

задачи (1) является $P_1^I(t) = 7/3 + 1/3t$, в то время как $P_1^{II}(t) = 2 + t$ – решение задачи из [4], а $P_1^{III}(t) = 19/8 + 1/4t$ – решение задачи Чебышева с приближаемой функцией

$$g(t) = \begin{cases} 2 + t, t \leq 1, \\ 3,5 - 0,5t, t \geq 1. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В. Ф. Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Дудов С.И. О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып.9. С. 22–26
4. Выгодчикова И.Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 13–15.

И.С. Непочатова

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ВИЛЕНКИНА

Для кратных рядов Уолша в [1] было доказано, что множество вида $E \times [0, 1] \subset [0, 1]^n$ является множеством единственности для n -кратного ряда Уолша тогда и только тогда, когда E — множество единственности для $(n-1)$ -кратного ряда Уолша. Мы докажем справедливость этого утверждения для кратных рядов Виленкина. Для доказательства теоремы приведем необходимые определения.

Определение 1. Пусть $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность простых чисел ($p_n \geq 2$). Обозначим $m_0 = 1$, $m_{k+1} = m_k \cdot p_k$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \cdot m_k$, $\varepsilon_k = 0, \dots, p_k - 1$, — p -ичное разложение числа n ; $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{m_{k+1}}$, $x \in [0, 1]$, $x_k = 0, \dots, p_k - 1$, — p -ичное разложение x . Положим по определению $r_k(x) = e^{2\pi i \frac{x_k}{p_k}}$, $n = 0, 1, \dots$, и назовем их p -ичными функциями Радемахера. Функции

$$V_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_k(x)]^{\varepsilon_k} = \exp \left(2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k \varepsilon_k}{p_k} \right)$$

называются функциями Виленкина. Ряд вида

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} V_{k_1}(x) \cdots V_{k_n}(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

называется кратным рядом Виленкина [2].

Обозначим для краткости

$$\tau = (x_2, \dots, x_n), \quad l = (k_2, \dots, k_n),$$

$$L = (L_2, \dots, L_n), \quad V_l(\tau) = V_{k_2}(x_2) \cdots V_{k_n}(x_n).$$

Тогда ряд (1) запишется в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} V_k(x) V_l(\tau),$$

его частичные суммы

$$S_{r,l}(x, \tau) = \sum_{n=0}^r \sum_{0 \leq l \leq L} c_{nl} V_n(x) V_l(\tau).$$

Обозначим

$$f_{k,L}(x, \tau) = \sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{0 \leq l \leq L} c_{nl} V_n(x) V_l(\tau).$$

Определение 2. Отрезок $[0, 1]$, в котором каждая p -ично-рациональная точка $\frac{i}{m_k}$ считается дважды (как $\frac{i}{m_k} - 0$ и $\frac{i}{m_k} + 0$), называется модифицированным отрезком и обозначается $[0, 1]^*$.

Определение 3. Множество E точек, расположенных на отрезке $[0, 1]$, называется множеством единственности (U -множеством) для данной системы функций $V_n(x)$, если из сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x)$$

к нулю всюду вне E следует, что $c_n = 0$, $n = 0, 1, \dots$

Для кратного ряда (1) сходимость можно понимать по-разному, например, как сходимость по всем прямоугольникам, кубам, сферам. Поэтому с каждым видом сходимости связан свой класс множеств единственности. Мы будем рассматривать сходимость по прямоугольникам.

Лемма. Пусть $U = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ – счетное множество точек модифицированного отрезка $[0, 1]^*$. Пусть для фиксированного $\tau_0 \in [0, 1]^{n-1}$ ряд

$$\sum_k \sum_l c_{kl} V_k(t) V_l(\tau_0)$$

сходится к нулю по прямоугольникам для любого $t \in [0, 1]$ за исключением быть может точек из $U \subset [0, 1]^*$. Тогда для любого r

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f_{r,L}(t, \tau_0) = 0$$

всюду на $[0, 1]$. $L \rightarrow \infty$ означает, что $\min\{L_2, \dots, L_n\} \rightarrow \infty$.

Данная лемма для системы Уолша доказана в [1].

Теорема 1. Пусть $U^n \subset [0, 1]^n$, $n \geq 2$. Обозначим $J(\tau_0) = J(t_2^0, \dots, t_n^0) = t = (t_1, t_2^0, v, t_n^0)$, $U^{n-1} \subset [0, 1]^{n-1}$ – множество точек $\tau^0 = (t_2^0, \dots, t_n^0)$ таких, что множество $J(\tau_0) \cap U^n$ более чем счетное. Если U^{n-1} – множество единственности для $(n-1)$ -кратного ряда Виленкина, то U^n будет множеством единственности для n -кратного ряда Виленкина.

Доказательство. Предположим, что ряд (1) сходится к нулю всюду вне U^n . Выберем $\tau_0 \notin U^{n-1}$. Тогда по лемме для любого r

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f_{r,L}(t, \tau_0) = 0 \quad (2)$$

всюду на $[0,1]$. Так как функция $f_{r,L}(t, \tau_0)$ постоянна на r -ичных интервалах $\Delta^{(r)}$ ранга r , то сходимость в (2) равномерная и равенство в (2) можно интегрировать:

$$0 = \int_0^1 \lim_{L \rightarrow \infty} f_{r,L}(t, \tau_0) dt = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{k=m_r}^{m_{r+1}-1} \sum_{0 \leq l \leq L} c_{kl} V_l(\tau_0) \int_0^1 V_k(t) dt.$$

Зафиксируем $m_k \leq k_1 \leq m_{r+1} - 1$ и умножим обе части последнего равенства на $V_{k_1}(t)$. В силу ортонормированности системы Виленкина, получим

$$0 = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq l \leq L} c_{k_1 l} V_l(\tau_0).$$

Следовательно, для любого $m_k \leq k \leq m_{r+1} - 1$

$$\sum_{0 \leq l \leq L} c_{kl} V_l(\tau_0) = 0.$$

Но $\tau_0 \notin U^{n-1}$ и так как U^{n-1} есть множество единственности, то для любых k, l $c_{kl} = 0$.

Теорема 2. Пусть $E \subset [0, 1]^{n-1}$, $n \geq 2$. Множество $E \times [0, 1]$ будет множеством единственности для n -кратного ряда Виленкина тогда и только тогда, когда E будет множеством единственности для $(n - 1)$ -кратного ряда Виленкина.

Докажем необходимость. Предположим, что $\sum_{l=0}^{\infty} c_l V_l(\tau) = 0$ вне E . Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m_k} c_l V_k(t) V_l(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k(t)}{m_k} \sum_{l=0}^{\infty} c_l V_l(\tau) = 0$$

вне $E \times [0, 1]$. Следовательно, $\frac{1}{m_k} c_l = 0$ для любых k, l . Таким образом, $c_l = 0$ для любого l , т. е. $E \subset [0, 1]^{n-1}$ является множеством единственности.

Достаточное условие следует из теоремы 1.

Автор выражает благодарность С. Ф. Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лукомский С. Ф. О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша // Мат. сб. 1989. Т. 180, вып. 8. С. 937–945.
2. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джаварли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

В.В. Новиков

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТИПА ЛАГРАНЖА – ЯКОБИ И АНАЛОГ УСИЛЕННОГО C -СВОЙСТВА

Пусть $\alpha, \beta > -1$ и $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$; при $\alpha = -1, \beta > -1$, многочлен $P_n^{(-1, \beta)}(x)$ определяется [1] равенством

$$nP_n^{(-1, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(n + \beta)(x - 1)P_{n-1}^{(1, \beta)}(x).$$

Аналогично определяют $P_n^{(\alpha, -1)}(x), \alpha > -1$. Пусть, далее,

$$-1 \leq x_{n,n} < x_{n-1,n} < \dots < x_{1,n} \leq 1$$

– нули многочлена $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, пронумерованные в порядке убывания. Для функции $f \in C[-1, 1]$ обозначим через $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)$ многочлен Лагранжа, интерполирующий ее в узлах n -й строки матрицы $\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)} = \{x_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{n, \infty}$, а через $S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ – частичную сумму ряда Фурье–Якоби этой функции.

Известно, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ для функции $f \in C[-1, 1]$ может оказаться расходящимся всюду, соответствующие примеры были построены независимо в 1936, 1937 гг. Грюнвальдом [2] и Марцинкевичем [3]. При произвольных $\alpha, \beta > -1$ Приваловым [4] в 1976 г. доказана возможность расходимости последовательности $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ почти всюду на $[a, b] \subset (-1, 1)$ для непрерывной функции f . Более того, в 1980 г. Эрде́ш и Вертеши [5] показали, что для совершенно произвольной матрицы узлов интерполирования $\mathfrak{M} \subset [-1, 1]$ найдется функция $f \in C[-1, 1]$ такая, что интерполяционный процесс $\{L_n(\mathfrak{M}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду. Отметим, что добиться расходимости всюду для непрерывной функции и произвольной матрицы узлов уже невозможно, как это следует из результатов Коровкина [6] и Мергеляна [7].

Данные факты говорят о том, что в определенном смысле интерполяционный процесс для произвольной непрерывной функции может вести себя так же, как ряд Фурье произвольной измеримой функции. В то же время известно, что любую измеримую функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся. Точнее, справедлива теорема Меньшова (см., например, [8]) о наличии у измеримой, почти всюду конечной 2π -периодической функции так называемого усиленного C -свойства: для любой функции f указанного вида и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что $f = g$ на некотором

множестве E , $\mu E > 2\pi - \varepsilon$, и ряд Фурье $\sigma(g)$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Этот результат с помощью теорем равносходимости переносится на ряды Фурье по некоторым другим ортогональным системам функций (в частности, на ряды Фурье – Якоби). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к интерполяционному процессу $\{L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, поскольку между полиномами $L_n(\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}, f, x)$ и $S_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$ существует далеко идущая аналогия. Для матрицы узлов $\mathfrak{M}^{(\alpha, \beta)}$ вопрос открыт, однако для одного класса «близких» к ней матриц ответ является положительным.

Теорема. Пусть $a, b, -1 < a < b < 1$ – произвольные фиксированные числа, последовательность $\delta = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и показатели α, β принимают любые описанные выше значения. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_{\delta}^{(\alpha, \beta)} = \{y_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{n, \infty}$ со следующими свойствами:

- 1) $\max_{1 \leq k \leq n} |x_{k,n} - y_{k,n}| < \delta_n, n \in \mathbb{N}$;
- 2) для любых $f \in C[-1, 1]$ и $\varepsilon \in (0, b - a)$ найдутся функция $g \in C[-1, 1]$ и множество $E \subset [a, b]$, $\mu E > b - a - \varepsilon$ такие, что $f = g$ на E и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_n(\mathfrak{M}_{\delta}^{(\alpha, \beta)}, g, \cdot) - g \right\|_{C[a, b]} = 0.$$

Ввиду громоздкости доказательства, опишем только его основную идею. С помощью метода работы [9] доказываем, что для произвольной ступенчатой функции существует кусочно-линейная функция, отличающаяся от нее на множестве как угодно малой меры и такая, что интерполяционный процесс с узлами $\{y_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{n, \infty}$ равномерно сходится; при этом \sup -нормы многочленов Лагранжа удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Так как произвольная непрерывная функция представима сходящимся рядом из ступенчатых функций, к каждой из таких функций применяется указанная процедура исправления. Сумма ряда исправленных ступенчатых функций даст искомую исправленную функцию. Для проверки сходимости интерполяционного процесса для полученной функции используется дискретное условие сходимости из работы [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Cege G.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
2. *Grünwald G.* Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome Stetiger Funktionen // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 908–918.
3. *Marcinkiewicz J.* Sur la divergence des polynomes d'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged. 1936/37. Vol. 8. P. 131–135.

4. Привалов А.А. О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве положительной меры // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, №4. С. 837–859.
5. Erdős P., Vértesi P. On the almost everywhere divergence of Lagrange interpolatory polynomials for arbitrary system of nodes // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1980. Vol. 36 (1-2). P. 71–89.
6. Коровкин П.П. О замкнутости системы функций Чебышева // ДАН СССР. 1951. Т. 78, № 5. С. 853–855.
7. Мергелян С.Н. Некоторые вопросы конструктивной теории функций // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 37. С. 1–97.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961.
9. Новиков В. В. О расходимости ряда Фурье функции со сходящимся интерполяционным процессом Лагранжа // Analysis Mathematica. 2003. Vol. 29. P. 289–317.
10. Новиков В. В. Критерий равномерной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа – Якоби // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 2. С. 254–266.

УДК 519.4

В.Е. Новиков

КОНЦЕПТЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Статья посвящена исследованию связи между структурой формальных концептов и структурой функциональных зависимостей на n -арном отношении. Эти исследования инициированы задачей минимизации n -арного отношения с сохранением структуры формальных концептов. Главный результат статьи устанавливает совпадение множеств \bar{i}_s -концептов по различным индексам атрибутов, если между их атрибутами существует взаимная функциональная зависимость.

Восстановим основные определения концептуального анализа [1], используя аппарат алгебры отношений В.В. Вагнера [2] на контексте с n -арным отношением. Пусть $\rho \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ – n -арное отношение. Обозначим $\bar{n} := (1, 2, \dots, n)$, $M_{\bar{n}} := M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, $\bar{i}_1 = i_1$ и $\bar{i}_k := (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $x_{\bar{i}_k} := (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, $M_{\bar{i}_k} := M_{i_1} \times M_{i_2} \times \dots \times M_{i_k}$ для произвольных $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Для удобства введём обозначения для результатов булевых операций над данными множествами: $\overline{\bar{i}_k \bar{j}_s} := \bar{i}_k \cup \bar{j}_s$, $\overline{\bar{i}_k * \bar{j}_s} := \bar{i}_k \cap \bar{j}_s$, $\overline{\bar{i}_k \setminus \bar{j}_s} := \bar{i}_k \setminus \bar{j}_s$. Например, при $\bar{i}_3 = (1, 3, 4)$, $\bar{j}_3 = (3, 5, 6)$ имеем $\overline{\bar{i}_3 \bar{j}_3} = (1, 3, 4, 5, 6)$, $\overline{\bar{i}_3 * \bar{j}_3} = 3$, $\overline{\bar{i}_3 \setminus \bar{j}_3} = (1, 4)$. При этом также обозначаем $\bar{i}_k \subseteq \bar{n}$. Говорим, что k -система $x_{\bar{i}_k}$ входит в отношение ρ , если существует n -система $x_{\bar{n}} \in \rho$, для которой элементы $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ являются её соответствующими компонентами. Для $\bar{i}_s, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, $a_{\bar{i}_s} \in M_{\bar{i}_s}$, $X \subseteq M_{\bar{i}_s}$ обозначим:

$$\pi_{\bar{j}_k}(\rho) := \{y_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k} \mid y_{\bar{j}_k} \text{ входит в } \rho\};$$

$$\sigma_{\{a_{\bar{i}_s}\}}(\rho) := \{x_{\bar{n}} \in \rho \mid a_{\bar{i}_s} \subseteq x_{\bar{n}}\}; \quad \rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle := \pi_{\bar{j}_k}(\sigma_{\{x_{\bar{i}_s}\}}(\rho));$$

$$\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X) := \cap \{\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{i}_s} \rangle : x_{\bar{i}_s} \in X\}; \quad \widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X) := \widehat{\rho}_{\bar{i}_s}(\widehat{\rho}_{\bar{j}_k}(X)).$$

Формальный контекст определяется как тройка $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$, где зафиксирован $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. $M_{\bar{i}_s}$ называется *множеством объектов*, $M_{\bar{n}}$ – декартово произведение базисных множеств атрибутов, $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ – некоторое n -арное отношение на базисных множествах атрибутов. Если $X = \widehat{\rho}_{\bar{i}_s \bar{j}_k}(X)$ и $\widehat{\rho}_{\bar{i}_s}(Y) = X$ для $Y \subseteq M_{\bar{j}_k}$, то X называется \bar{i}_s -*концептом по \bar{j}_k* и Y – \bar{j}_k -*генератором \bar{i}_s -концепта X* . В этом случае элементы множества X будем называть *объектами*, а элементы множества Y – *атрибутами \bar{i}_s -концепта X по \bar{j}_k* , при этом \bar{j}_k также называем *индексом генератора или атрибута*.

В [3] представлен краткий обзор по некоторым результатам формально-концептуального анализа, в частности, описывающим некоторые системы замыканий на множестве формальных концептов и структуру насыщенных семейств минимальных генераторов концепта. Там же показана связь формального концептуального анализа с теорией распознавания образов и с задачей диагностики сложных систем и принятия решения. В [3] также приведён обзор исследований контекста с n -арным отношением, однозначным относительно множества объектов. Известной интерпретацией таких контекстов является база данных с ключом – наиболее распространенная форма реляционной базы данных относительно множества исследуемых объектов.

Будем говорить, что в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ *имеет место F -зависимость $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$* , $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, если $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle$, $x_{\bar{l}_q} \in M_{\bar{l}_q}$, определяет отображение $\pi_{\bar{l}_q}(\rho) \rightarrow \pi_{\bar{j}_k}(\rho)$. F -зависимость $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, будем называть B -*зависимостью $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$* , если определяемое им отображение $\rho_{\bar{j}_k} \langle x_{\bar{l}_q} \rangle : \pi_{\bar{l}_q}(\rho) \rightarrow \pi_{\bar{j}_k}(\rho)$ является взаимно однозначным.

Теорема. *Если атрибуты $M_{\bar{l}_q}$, $M_{\bar{j}_k}$, $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ в отношении $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ связаны B -зависимостью, то для любого $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$ множество \bar{i}_s -концептов по \bar{j}_k и \bar{i}_s -концептов по \bar{l}_q совпадают.*

Пусть $\rho \subseteq M_{\bar{n}}$ и $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, если $|\pi_{\bar{l}_q}(\rho)| \neq |\pi_{\bar{j}_k}(\rho)|$, то не существует B -зависимости $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$. Если $|\pi_{\bar{l}_q}(\rho)| = |\pi_{\bar{j}_k}(\rho)|$, то существование B -зависимости $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ можно проверить модифицированным алгоритмом satisfies [4]. Остальные B -зависимости можно вывести с помощью следующих свойств:

1. Для любого $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ $M_{\bar{j}_k} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ есть B -зависимость (рефлексивность).
2. Для любых $\bar{l}_q, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ если $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ есть B -зависимость, то $M_{\bar{j}_k} \rightarrow M_{\bar{l}_q}$ также B -зависимость (симметричность).
3. Для любых $\bar{l}_q, \bar{j}_k, \bar{u}_t \subseteq \bar{n}$, если $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ и $M_{\bar{j}_k} \rightarrow M_{\bar{u}_t}$ есть B -зависимости, то $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{u}_t}$ – также B -зависимость (транзитивность).
4. Для любых $\bar{l}_q, \bar{j}_k, \bar{u}_t, \bar{v}_p \subseteq \bar{n}$, если $M_{\bar{l}_q} \rightarrow M_{\bar{j}_k}$ и $M_{\bar{v}_p} \rightarrow M_{\bar{u}_t}$ – B -зависимости, то $M_{\bar{l}_q \bar{v}_p} \rightarrow M_{\bar{j}_k \bar{u}_t}$ – также B -зависимость (аддитивность).

Таким образом, поскольку B -зависимость является абстрактным отношением эквивалентности на множестве индексов атрибутов $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, мно-

жество индексов атрибутов разбивается на классы, по которым для любого $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$ множество \bar{i}_s -концептов совпадают. Поэтому из каждого класса достаточно выбрать только один индекс атрибутов. Более того, учитывая свойство 4, из всех классов эквивалентных индексов атрибутов достаточно рассматривать только классы, содержащие одномерные индексы атрибутов, и из каждого такого класса выбирать лишь один из одномерных представителей этого класса. Итак, допустим, задан контекст $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$ и стоит задача минимизировать отношение ρ , сохраняя упорядоченное множество \bar{i}_s -концептов. Допустим отношение B -зависимости в ρ разбивает множество из n одномерных атрибутов на k классов, $k \leq n$. Если $k = n$, то ρ – уже минимальное отношение для множества \bar{i}_s -концептов и любого $\bar{i}_s \subseteq \bar{n}$. Если $k < n$, обозначим \bar{j}_k – индексный вектор, все координаты которого соответствуют одномерным представителям блоков этого разбиения. Причём, если в класс входит одномерный индекс атрибута, который в то же время является одной из координат индекса \bar{i}_s , то в качестве представителя этого класса выбираем именно этот индекс. Тогда отношение $\zeta = \pi_{\bar{j}_k}(\rho) \subseteq M_{\bar{j}_k}$ является минимальным отношением для множества \bar{i}_t -концептов, $\bar{i}_t = \overline{\bar{i}_s * \bar{j}_k}$, на контексте $\mathbb{K}' = (M_{\bar{j}_k}, M_{\bar{i}_t}, \zeta)$, упорядоченное множество которых изоморфно упорядоченному множеству \bar{i}_s -концептов на контексте $\mathbb{K} = (M_{\bar{n}}, M_{\bar{i}_s}, \rho)$. Причём изоморфизм устанавливается простой проекцией $\pi_{\bar{i}_t}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ganter B., Wille R.* Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
2. *Вагнер В.В.* Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1965. Вып. 1. С. 3–178.
3. *Novikov V.E.* Formal conceptual analysis within n -ary relation context // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2006. № 3 (15), вып. 2. С. 18–22.
4. *Мейер Д.* Теория реляционных баз данных. М.: Мир, 1987.

УДК 681.3.06: 519.766.23

А.А. Орел

ХРАНЕНИЕ XML-ДОКУМЕНТОВ В РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЕ ДАННЫХ

Предлагается технология формирования структуры реляционной базы данных на основе схемы некоторого класса XML-документов и технология хранения соответствующих XML-документов в виде данных реляционной базы.

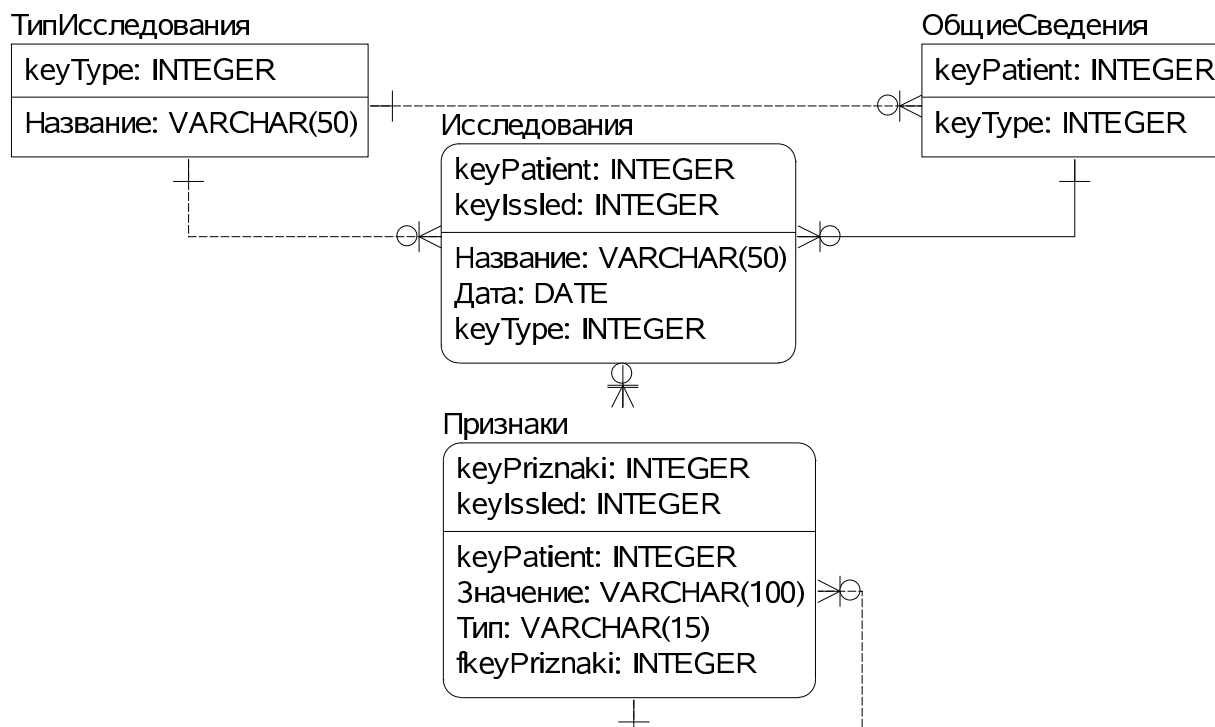
XML-документы позволяют представлять данные со сложной структурой из различных предметных областей. При этом XML-схемы способны зафиксировать структуру некоторого класса документов с учетом используемых

типов и на основании этого выполнить проверку правильности вновь создаваемых документов. Однако XML-документы, являясь текстовыми файлами, порождают проблему эффективного хранения и поиска информации. В настоящее время имеется развитая технология обработки информации на основе реляционных баз данных, которую желательнее применить и для XML-документов. Следует отметить, что схемы XML-документов допускают неоднозначное моделирование структуры понятий предметной области. Поэтому представляется целесообразным выбрать из всевозможных XML-схем такие, которые сохраняют выразительные возможности при моделировании предметной области и допускают эффективное преобразование к реляционной модели данных. Для этой цели будем использовать структуру XML-документов, предложенную в работе [1] для автоматизации процесса создания XML-схем на основе предметно ориентированного языка. Особенностью таких документов является то, что они состоят из XML-элементов, которые либо имеют пустое содержимое, либо представляют структуры, включающие другие элементы. Для представления значений элементов используются атрибуты, среди которых может присутствовать специальный атрибут, именуемый <значение>, который используется для унификации имен вложенных элементов.

При преобразовании схемы рассмотренного типа XML-документов в структуру реляционной базы данных возникают следующие проблемы.

1. Элементы XML-документа имеют иерархическую структуру, поэтому необходимо найти способ представления вложенных элементов в таблице базы данных.
2. Количество уровней вложенности элементов в XML-документе потенциально не ограничено, что может потребовать динамической модификации схемы базы данных при вводе документа. Требуется найти способ хранения документов в базе данных с предопределенной структурой.
3. Атрибуты, предоставляющие значения элементов XML-документа, могут содержать данные разных типов, поэтому необходимо найти способ хранения разнотипных данных в столбце таблицы базы данных.

Для решения первой проблемы хранения в базе данных элементов XML-документа с иерархической структурой будем использовать таблицы с рекурсивными связями, как это показано на рисунке, представляющем упрощенный фрагмент схемы базы данных для информационной системы кардиологической помощи [2].



Здесь таблица <Признаки> имеет рекурсивную связь, реализованную с помощью атрибута первичного ключа <keyPriznaki> и связанного с ним атрибута внешнего ключа <fkeyPriznaki>. Данная связь позволяет в таблице хранить значения иерархически вложенных элементов XML-документа. Для значений этих элементов служит столбец <Значение>. Одновременно с первой решается и вторая обозначенная проблема построения схемы базы данных, вызванная требованием неизменности структуры при различном количестве уровней вложенности элементов в XML-документах.

Решение третьей проблемы, связанной с необходимостью хранения в столбце <Значение> таблицы <Признаки> разнотипных элементов осуществляется введением дополнительного столбца <Тип>. При этом значения столбца <Значение> имеют текстовый тип, а значениями столбца <Тип> служат имена типов данных, принятых для конкретной базы данных, такие как: INTEGER, VARCHAR(:), DATE и др. Запросы к базе данных должны строиться с учетом значений обоих столбцов, что несколько усложняет их вид, являясь платой за предопределенность схемы данных.

Кроме рассмотренных имеется <техническая> проблема автоматизированного заполнения базы данных на основе содержимого XML-документов. Можно предложить два способа решения этой проблемы. Первый заключается в предварительном преобразовании XML-документа в другой XML-документ, в котором представлены элементы (с учетом ключевых), необходимые для заполнения всех столбцов таблиц базы данных. Для этого можно использовать технологию преобразования XML-документов с помощью расширенных таблиц стилей, представляющих XSLT-программы, трансформирующие исходные XML-документы в результирующие, которые

служат для заполнения базы данных. При этом возникает необходимость использования в процессе трансформации XML-документа его XSD-схемы, которая требуется для заполнения столбца <Тип>, определяющего типы данных, необходимых для интерпретации значений столбца <Значение>. Требуется также решить вопрос генерации значений атрибутов первичных ключей, представленных дополнительными элементами, формируемыми для создания конечного в рассмотренной технологической цепочке XML-документа, содержащего все элементы, необходимые для внесения в базу данных. Он представлен XML-файлом, который может быть конвертирован в базу данных с помощью специальных программных средств, например, ALTOVA XML SPY.

Второй способ заполнения базы данных основан на использовании языков программирования, имеющих средства разбора и анализа XML-документов и средства обмена данными с базами данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-8570-34).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Орел А.А. Формально грамматический подход к построению XML-схем // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2004. Вып. 6. С. 105–108.
2. Гриднев В.И., Орел А.А., Петров Н.В., Довгалецкий П.Я. Маршрутно-групповая технология кардиологической помощи в системе <пациент-поликлиника-стационар> // Проблемы стандартизации в здравоохранении: Тез. докл. М., 2001. С. 113.

УДК 519.4, 519.8

М.В. Пасечник

АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ВЕКТОРНЫМИ ВЫИГРЫШАМИ

В теории игр важное место занимает проблема непустоты множества индивидуально рациональных исходов для различных классов игр [1]. В данной статье рассматривается вопрос о непустоте множества индивидуально рациональных исходов для класса антагонистических игр с векторными выигрышами. Дается также описание их структуры.

Введем некоторые понятия. Основным объектом является стратегическая игра вида

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\omega_i)_{i \in N}, F \rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, X_i — множество стратегий игрока i , A — множество исходов, ω_i — бинарное отношение на A , выражающее предпочтения игрока i , F — функция реализации, представляющая собой

отображение множества $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ ситуаций игры G в множество ее исходов $F : X_N \rightarrow A$. Будем рассматривать самый важный случай, когда ω_i является отношением порядка или квазипорядка [2].

Игра протекает следующим образом: каждый игрок $i \in N$ независимо от остальных выбирает стратегию $x_i \in X_i$, в результате складывается ситуация $x = (x_i)_{i \in N}$, приводящая к исходу $a = F(x)$. Полагаем для коалиции $S \neq \emptyset$, $S \subseteq N$: $X_S = \prod_{i \in S} X_i$, $\omega_s = \prod_{i \in S} \omega_i$.

Определение 1. Стратегия $x_S \in X_S$ называется *возражением* коалиции S на исход a , если при любой стратегии $y_{N \setminus S} \in X_{N \setminus S}$ выполняется $F(x_S, y_{N \setminus S}) \stackrel{\omega_s}{>} a$. Исход a называется *допустимым* для коалиции S , если она не имеет на него возражений в форме стратегий. В противном случае a называется *недопустимым* для коалиции S .

Определение 2. Исходы, допустимые для всех одноэлементных коалиций (то есть для всех игроков), называются *индивидуально рациональными*. Множество индивидуально рациональных исходов будем обозначать $D(G)$.

Игра называется *антагонистической*, если в ней два игрока и их порядки взаимнообратные. В этом случае задается отношение порядка ω , выражающее предпочтения игрока 1, а предпочтения игрока 2 определяются обратным отношением порядка ω^{-1} .

Антагонистическую игру с векторными выигрышами $\langle X, Y, (f_k)_{k=\overline{1,p}} \rangle$, где X — множество стратегий игрока 1, Y — множество стратегий игрока 2, $f_k : X \times Y \rightarrow R^p$ ($k = \overline{1,p}$, $p \geq 2$) — компоненты функции выигрыша игрока 1, можно рассматривать как игру с квазиупорядоченными исходами вида

$$G = \langle X, Y, R^p, \leq^{\text{Par}}, F \rangle, \quad (1)$$

где в качестве множества исходов выступает R^p , упорядоченное паретовским (покомпонентным) порядком

$$(u_1, \dots, u_p) \leq^{\text{Par}} (v_1, \dots, v_p) \iff (u_1 \leq v_1) \wedge \dots \wedge (u_p \leq v_p),$$

функция реализации F задается равенством

$$F(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_p(x, y)).$$

Далее функции f_1, \dots, f_p предполагаются ограниченными, в этом случае операторы инфимума и супремума всегда применимы. Для рассматриваемых нами игр с векторными выигрышами справедлив следующий результат.

Теорема (о непустоте множества индивидуально рациональных исходов в антагонистических играх с векторными выигрышами). *В антагонистической игре G с векторными выигрышами вида (1) множество индивидуально рациональных исходов непусто.*

Идею доказательства можно пояснить для случая $p = 2$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f_1(x, y), & u_2 &= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f_1(x, y), \\ v_1 &= \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f_2(x, y), & v_2 &= \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f_2(x, y). \end{aligned}$$

Лемма 1 (структура множества индивидуально рациональных исходов в антагонистических играх с векторными выигрышами на плоскости). В игре $G = \langle X, Y, R^2, \leq^{Par}, F \rangle$ с векторными выигрышами выполняются следующие включения:

1. $\{(u, v) : u > u_1 \vee v > v_1\} \subseteq D_1(G)$,
2. $\{(u, v) : u < u_2 \vee v < v_2\} \subseteq D_2(G)$,
3. $\{(u, v) : u > u_1 \wedge v < v_2\} \subseteq D(G)$,
4. $\{(u, v) : u < u_2 \vee v > v_1\} \subseteq D(G)$.

Следствие 1. В игре G вида (1), в которой $p = 2$, множество $D(G)$ индивидуально рациональных исходов непусто и выполняется следующее включение:

$$D(G) \supseteq \{(u, v) : u > u_1 \wedge v < v_2\} \cup \{(u, v) : u < u_2 \wedge v > v_1\}.$$

Аналогичный результат имеет место при $p > 2$. Введем следующие обозначения: $\underline{u}_i = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f_i(x, y)$, $\bar{u}_i = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f_i(x, y)$.

Лемма 2 (структура множества индивидуально рациональных исходов в антагонистических играх с векторными выигрышами ($p > 2$)). В игре G вида (1) с векторными выигрышами, в которой $p \geq 2$, выполняются следующие включения:

1. исход $(u_1^0, \dots, u_p^0) \in R^p$, где $(\exists k_1 = 1, \dots, p) u_{k_1}^0 > \underline{u}_{k_1}$ допустим для игрока 1;
2. исход $(u_1^0, \dots, u_p^0) \in R^p$, где $(\exists k_2 = 1, \dots, p) u_{k_2}^0 < \bar{u}_{k_2}$ допустим для игрока 2.

Следствие 2. В игре G вида (1), в которой $p \geq 2$, множество $D(G)$ индивидуально рациональных исходов непусто и выполняется следующее включение: $D(G) \supseteq \{(\exists k_1, k_2 = 1, \dots, p) : u_{k_1}^0 > \underline{u}_{k_1} \wedge u_{k_2}^0 < \bar{u}_{k_2}\}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели / Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 464 с.
2. Пасечник М.В., Розен В.В. Игры с квазиупорядоченными исходами, имеющие единственный индивидуально рациональный исход // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 3. С. 87–90.

УДК 512.56

В.Б. Поплавский

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В нашей статье продолжается построение теории определителей матриц над произвольной булевой алгеброй, начатой в статье [1] и получившей развитие в работах [2-6]. Доказывается утверждение, которое помогает оценить число образующих, порождающих столбцы (или строки) данной булевой матрицы.

Определитель квадратной булевой матрицы был введен О.Б. Соколовым в работе [1] для изучения матриц, элементами которых являются формулы логики. Большая часть этой статьи посвящена теории булевого определителя. Он определяется как симметрическая разность

$$\text{Det}A = \overset{+}{\nabla} A \oplus \overset{-}{\nabla} A = (\overset{+}{\nabla} A \setminus \overset{-}{\nabla} A) \cup (\overset{-}{\nabla} A \setminus \overset{+}{\nabla} A)$$

полуперманентов

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bar{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n}) \quad \text{и} \quad \overset{-}{\nabla} A = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P} (a_1^{\alpha_1} \cap a_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n})$$

(все четные и нечетные перестановки обозначены \bar{P} и P соответственно) матрицы $A = (a_j^i)$, элементы которой a_j^i принадлежат произвольной булевой алгебре $\langle B, \cup, \cap, ', 0, I \rangle$. Показаны такие свойства определителя, как его сохранение при транспонировании, его неизменность при перестановке строк, равенство нулю для двух одинаковых строк. Доказано свойство аддитив-

ности по столбцу определителя, которое можно записать в форме

$$\begin{aligned}
 DetA &= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & (b_k^1 \cup c_k^1) & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & (b_k^n \cup c_k^n) & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = \\
 &= \left(\overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & b_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & b_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cup \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & c_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & c_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \right) \oplus \\
 &\oplus \left(\overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & b_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & b_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \cup \overset{-}{\nabla} \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & c_k^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \dots & c_k^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Получена формула разложения определителя, которую можно также записать в виде

$$DetA = \left(\bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \overset{+}{\nabla} \partial_k^i A) \right) \oplus \left(\bigcup_{k=1}^n (a_k^i \cap \overset{-}{\nabla} \partial_k^i A) \right),$$

что очевидно, так как полуперманенты раскладываются по строке по правилу Лапласа (см. также [2, 3, 6]). Автор, кроме того, доказывает, что если строки линейно зависимы, то определитель равен нулю, и отмечает, что обратное не выполняется в общем случае.

Это последнее утверждение обобщается в следующей теореме, доказательство которой мы приводим далее.

Обозначим через $B_{n \times m}$ модуль булевых матриц размера $n \times m$ над булевым полукольцом B .

Теорема. *Предположим, что для некоторой квадратной матрицы $A \in B_{n \times n}$ существует такой набор каких-то, не обязательно выбираемых из матрицы A , столбцов $B_1, B_2, \dots, B_k \in B_{n \times 1}$, и любой столбец $A_1, A_2, \dots, A_n \in B_{n \times 1}$ матрицы A является их линейной комбинацией, то есть $A_j = (\lambda_j^1 \cap B_1) \cup (\lambda_j^2 \cap B_2) \cup \dots \cup (\lambda_j^k \cap B_k)$ для некоторых булевых коэффициентов λ_j^i , $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, n$. Тогда, если $k < n$, то $DetA = 0$.*

Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

Доказательство. Вначале покажем, что для полуперманентов матрицы, j -й столбец которой является линейной комбинацией столбцов

$$B_j = \left(b_j^1 b_j^2 \quad \dots \quad b_j^n \right)^T \quad (j = 1, \dots, k),$$

выполняется равенство

$$\begin{aligned} \overset{\pm}{\nabla} \begin{pmatrix} \cdots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \cdots \end{pmatrix} = \\ = \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap \overset{\pm}{\nabla} \begin{pmatrix} \cdots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \cdots \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Здесь знаки полуперманентов выбираются либо верхние, либо нижние соответственно. Это равенство показывает, что полуперманенты обладают свойством линейности по столбцу (по строке). Действительно,

$$\begin{aligned} \overset{\pm}{\nabla} \begin{pmatrix} \cdots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \cdots \end{pmatrix} = \\ = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overset{\pm}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^{\alpha_j}) \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n}) = \\ = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overset{\pm}{P}} \bigcup_{t=1}^k (a_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap (\lambda^t \cap b_t^{\alpha_j}) \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n}) = \\ = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overset{\pm}{P}} \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap (a_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap b_t^{\alpha_j} \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n})) = \\ = \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap (\bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overset{\pm}{P}} (a_1^{\alpha_1} \cap \dots \cap b_t^{\alpha_j} \cap \dots \cap a_n^{\alpha_n}))) = \\ = \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap \overset{\pm}{\nabla} \begin{pmatrix} \cdots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \cdots \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Теперь несложно проверить равенство для следующей разности полупер-

манентов (правого определителя):

$$\begin{aligned}
& \overset{+}{\nabla} A \setminus \bar{\nabla} A = \\
& = \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} \setminus \\
& \setminus \bar{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} = \\
& = \left(\bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \right) \setminus \\
& \setminus \left(\bigcup_{s=1}^k (\lambda^s \cap \bar{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_s^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_s^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \right) = \\
& = \bigcup_{t=1}^k \{ [\lambda^t \cap \overset{+}{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \setminus \\
& \setminus \bar{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}] \setminus \\
& \setminus \left(\bigcup_{s \neq t} (\lambda^s \cap \bar{\nabla} \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_s^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_s^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}) \right) \}.
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления можно провести и для разности (левого определителя). Это позволяет получить следующее включение для определителя:

$$\begin{aligned}
& Det \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^1) & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & \bigcup_{t=1}^k (\lambda^t \cap b_t^n) & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix} \subseteq \\
& \subseteq \bigcup_{t=1}^k [\lambda^t \cap Det \begin{pmatrix} \dots & a_{j-1}^1 & b_t^1 & a_{j+1}^1 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & a_{j-1}^n & b_t^n & a_{j+1}^n & \dots \end{pmatrix}].
\end{aligned}$$

Учитывая то, что эту цепочку включений можно продолжить, применяя аналогичные рассуждения к каждому столбцу матрицы A , получим, что

$DetA$ содержится в некоторой линейной комбинации определителей квадратных матриц, построенных из столбцов B_1, B_2, \dots, B_k . Так как $k < n$, то определители таких матриц содержат одинаковые столбцы, и поэтому равны нулю. Следовательно, $DetA = 0$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Соколов О.Б. Применение булевых определителей к анализу логических многополиусников // Учен. записки Казан. ун-та. 1963. Т. 123, №6. С. 155–164.
2. Chesley D.S., Bevis J.H. Determinants for matrices over lattices // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1969. A68, № 2. P. 138–144.
3. Poplin P.L., Hartwig R.E. Determinantal identities over commutative semirings // Linear Algebra Appl. 2004. № 387. P. 99–132.
4. Поплавский В.Б. Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 111–114.
5. Поплавский В.Б. О равенстве обратных булевых матриц симметрической разности ориентированных присоединенных матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 94–97.
6. Поплавский В.Б. О разложимости определителей булевых (0,1)-матриц // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 105–108.

УДК 517.984

Д.В. Поплавский, В.А. Юрко

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

В статье исследуется обратная узловая задача для дифференциальных операторов второго порядка на конечном интервале с краевыми условиями Дирихле и условиями разрыва внутри интервала. Доказана теорема единственности решения обратной узловой задачи и приведена конструктивная процедура восстановления потенциала по заданным узловым точкам. Отметим, что некоторые обратные узловые задачи исследовались в [1–3] и других работах. Эти задачи тесно связаны с обратными спектральными задачами (см. [4–5] и литературу в них).

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q)$ вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, T), \quad (1)$$

$$y(0) = y(T) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} + 0 \right) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \left(\frac{T}{2} - 0 \right), \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $q(x)$ – вещественная непрерывная функция, a_{ij} – вещественные числа, $\det A = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{11} > 0$. Пусть $S(x, \lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ и условию склейки (3).

При каждом фиксированном x функция $S(x, \lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + i\tau$. При $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по x имеют место асимптотические формулы:

$$S(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} - \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} \int_0^x q(t) dt + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|x)\right), \quad x < \frac{T}{2}, \quad (4)$$

$$S(x, \lambda) = \left(b^+ \frac{\sin \rho x}{\rho} + b^- \frac{\sin \rho(T-x)}{\rho}\right) + \\ + \left(f_1(x) \frac{\cos \rho x}{2\rho^2} + f_2(x) \frac{\cos \rho(T-x)}{2\rho^2}\right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|x)\right), \quad x > \frac{T}{2}, \quad (5)$$

где

$$b^\pm = \frac{a_{11} \pm a_{22}}{2}, \quad f_1(x) = -b^+ \int_0^x q(t) dt - a_{21},$$

$$f_2(x) = b^- \left(\int_0^x q(t) dt - 2 \int_0^{T/2} q(t) dt \right) + a_{21}.$$

Положим $\Delta(\lambda) := S(T, \lambda)$. Нули $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи L . При этом собственные функции имеют вид $y_n(x) = S(x, \lambda_n)$. Из (4), (5) вытекает, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула:

$$\Delta(\lambda) = b^+ \left(\frac{\sin \rho T}{\rho} - \omega \frac{\cos \rho T}{2\rho^2} + \frac{\omega_1}{2\rho^2} \right) + o\left(\frac{1}{\rho^2} \exp(|\tau|T)\right), \quad (6)$$

где

$$\omega = \int_0^T q(t) dt + \frac{a_{21}}{b^+}, \quad \omega_1 = \frac{b^-}{b^+} \left(\int_0^T q(t) dt - 2 \int_0^{T/2} q(t) dt \right) + \frac{a_{21}}{b^+}.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула для собственных значений:

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{T} + \frac{\omega}{2\pi n} + (-1)^{n-1} \frac{\omega_1}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

Отметим, что собственные значения λ_n и собственные функции $y_n(x)$ являются вещественными, а краевая задача L – самосопряженной. Подставляя (7) в (4), (5), получаем асимптотические формулы для собственных функций

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x :

$$\begin{aligned} \rho_n y_n(x) &= \\ &= \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \left(-T \int_0^x q(t) dt + \omega x + (-1)^{n-1} \omega_1 x \right) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ &\qquad\qquad\qquad x < \frac{T}{2}, \\ \rho_n y_n(x) &= (b^+ + (-1)^{n-1} b^-) \sin \frac{\pi n}{T} x + \frac{1}{2\pi n} \left(T f_1(x) + (-1)^n T f_2(x) + \right. \\ &+ b^+ (\omega + (-1)^{n-1} \omega_1) x + b^- (\omega + (-1)^{n-1} \omega_1) (T - x) \left. \right) \cos \frac{\pi n}{T} x + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ &\qquad\qquad\qquad x > \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Для краевой задачи L справедлив аналог теоремы Штурма об осцилляции. Точнее, собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $n - 1$ (простых) нулей внутри интервала $(0, T)$: $0 < x_n^1 < \dots < x_n^{n-1} < T$. Положим $X := \{x_n^j\}_{n \geq 2, j = \overline{1, n-1}}$ и доопределим $x_n^0 := 0$, $x_n^n := T$.

Обратная узловая задача заключается в построении потенциала $q(x)$ по заданному множеству X узловых точек или некоторой его части. При этом матрица перехода A предполагается известной априори. Так как задание узловых точек определяет $q(x)$ только с точностью до постоянного слагаемого, то не нарушая общности, в дальнейшем считаем, что $\int_0^T q(x) dx = 0$.

Обозначим $X_k := \{x_{2m-k}^j\}_{m \geq 1, j = \overline{1, 2m-k}}$, $k = 0, 1$. Множества X_k являются всюду плотными на $(0, T)$ и $X_0 \cup X_1 = X$.

Теорема 1. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$ и $x \in (0, T)$. Пусть последовательность $\{x_n^j\} \in X_k$ выбрана так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j = x$. Тогда существует конечный предел*

$$G_k(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi^2 n^2}{T^3} \left((x_n^{j_n+1} - x_n^j) n - T \right), \quad (8)$$

причем

$$G_k(x) = q(x) - \frac{1}{T} \left(\omega - (-1)^k \omega_1 \right).$$

Сформулируем теперь теорему единственности решения обратной узловой задачи. Для этого наряду с L рассмотрим краевую задачу $\tilde{L} = L(\tilde{q})$ того же вида, но с другим потенциалом \tilde{q} . Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к задаче \tilde{L} .

Теорема 2. *Зафиксируем $k = 0 \vee 1$. Пусть $X_k = \tilde{X}_k$. Тогда $q(x) \equiv \tilde{q}(x)$, $x \in [0, T]$. Таким образом, задание одного из множеств X_0 или X_1 однозначно определяет потенциал $q(x)$ на отрезке $[0, T]$.*

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру построения искомого потенциала. Точнее, функция $q(x)$ может быть вычислена по формуле

$$q(x) = G_k(x) - \frac{1}{T} \int_0^T G_k(t) dt,$$

где $G_k(x)$ определяется формулой (8).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *McLaughlin J.R.* Inverse spectral theory using nodal points as data - a uniqueness result // *J. Differ. Equat.* 1988. Vol. 73. P. 354–362.
2. *Shen C.L., Tsai T.M.* On a uniform approximation of the density function of a string equation using EVs and nodal points and some related inverse nodal problems // *Inverse Problems.* 1995. Vol. 11, № 5. P. 1113–1123.
3. *Law C.K., Yang C.-F.* Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // *Inverse Problems.* 1998. Vol. 14, № 2. P. 299–312.
4. *Yurko V.A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
5. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.

УДК 519.85

А.Р. Приходько, С.П. Сидоров

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В R^n

Пусть $m, n \in N$, $m < n$. Для $v = (v_k)_{k=1}^n, w = (w_k)_{k=1}^n \in R^n$ обозначим $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^n v_k w_k$. Пусть $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m \times 1}$. Обозначим

$$\Omega = \{x \in R^n : Ax = B\}.$$

Пусть $C_{0,2}$ есть конус положительных, выпуклых и непрерывных на $[0,1]$ функций, то есть

$$C_{0,2} = \{f \in C[0, 1] : f(t) \geq 0, t \in [0, 1], f[t_1, t_2, t_3] \geq 0, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1\},$$

где $f[t_1, t_2, t_3]$ означает разделенную разность функции f по узлам t_1, t_2, t_3 .

Пусть $0 \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq 1$, для произвольной $f \in C[0, 1]$ положим $If = (f(x_{1,n}), \dots, f(x_{n,n}))$, $If \in R^n$. Обозначим

$$C_{0,2}^* = \{l \in R^n : \langle If, l \rangle \geq 0 \forall f \in C_{0,2}\}.$$

Пусть $c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ — фиксированный вектор. Рассмотрим задачу нахождения максимального значения линейной функции $Z(x) = \langle c, x \rangle$ на множестве $\Omega \cap C_{0,2}^*$:

$$Z(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \max_{x \in D}, \quad (1)$$

$$D = \Omega \cap C_{0,2}^*. \quad (2)$$

Если $D = \Omega \cap R_+^n$, то мы имеем задачу линейного программирования. В работе [1] содержится обзор результатов, связанных с ее обобщениями.

Заметим, что $C_{0,2}^*$ — выпуклый конус. Действительно, из линейности скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для произвольных неотрицательных вещественных чисел λ_1, λ_2 и $f \in C_{0,2}$ имеем

$$\langle \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2, If \rangle = \langle \lambda_1 l_1, If \rangle + \langle \lambda_2 l_2, If \rangle = \lambda_1 \langle l_1, If \rangle + \lambda_2 \langle l_2, If \rangle \geq 0$$

для произвольных $l_1, l_2 \in C_{0,2}^*$.

Отметим также, что $C_{0,2}^*$ — не пустое множество. В частности, $C_{0,2}^*$ содержит все n -мерные вектора с неотрицательными компонентами. Структура конуса $C_{0,2}^*$ описывается в следующей лемме.

Пусть V — некоторый конус. Напомним [2, с. 294], что $l \in V$ является крайним лучом конуса V , если l не может быть представлен в виде $l = l_1 + l_2$, где $l_1, l_2 \in V$.

Лемма. Пусть $m, n \in N$, $m < n$, $m < p$, $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{m \times 1}$, $e \in R$, $V \subset R^n$ — некоторый конус, x_1, \dots, x_p — крайние лучи конуса V и обозначим

$$D := \{x \in R^n : Ax = B, x \in V\}.$$

Пусть для произвольного набора натуральных чисел $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq p$ система из m крайних лучей x_{k_1}, \dots, x_{k_m} линейно независима. Положим $U := \{u \in R^n : Au = B, u = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{k_i}, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m, 1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq p, k_i \in N, i = 1, \dots, m\}$. Тогда

$$\min_{x \in D} \langle e, x \rangle = \min_{x \in U} \langle e, x \rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу $Ex \rightarrow \min_{x \in D}$. Заметим, что D — выпуклое множество, U есть множество его вершин. Линейная функция $f(x) = Ex$ достигает своего минимального значения в одной из вершин $u^* \in U$ выпуклого множества D , при этом вершина u^* однозначно определяется выбором крайних лучей конуса V . Лемма доказана.

Таким образом, для решения задачи (1), (2) необходимо описать множество крайних лучей множества $C_{0,2}^*$.

Обозначим Ω — множество всех крайних лучей $C_{0,2}^*$,

$$\Omega_1 = \{l \in R^n : \exists 1 \leq k \leq n, \langle If, l \rangle = f(x_{k,n}) \quad \forall f \in C[0, 1]\},$$

$$\Omega_2 = \{l \in R^n : \exists 1 \leq k \leq n - 2, \langle If, l \rangle = f[x_{k,n}, x_{k+1,n}, x_{k+2,n}] \quad \forall f \in C[0, 1]\}.$$

Теорема. *Множество крайних лучей конуса $C_{0,2}^*$ есть объединение множеств Ω_1 и Ω_2 , т.е. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.*

Доказательство. Рассмотрим конус

$$V_{0,2} := \{a \in R^n : a = If, f \in C_{0,2}\}.$$

Конус $C_{0,2}^*$ является двойственным по отношению к $V_{0,2}$, т.е.

$$C_{0,2}^* = \{l \in R^n : \langle a, l \rangle \geq 0 \quad \forall a \in V_{0,2}\}.$$

Положим

$$f_i(x) = \begin{cases} x_i - x, & x \in [0, x_i], \\ 0, & x \in (x_i, 1], \end{cases}$$

$$g_j(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_j], \\ -x_j + x, & x \in (x_j, 1], \end{cases}$$

где $i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, n - 1$.

Крайними лучами конуса $V_{0,2}$ являются $a_i = If_i, i = 2, \dots, n, b_j = Ig_j, j = 1, \dots, n - 1$.

Следовательно, для того чтобы $l \in C_{0,2}^*$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись $2n - 2$ неравенства

$$\langle a_i, l \rangle \geq 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

и

$$\langle b_j, l \rangle \geq 0, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Таким образом, количество крайних лучей конуса $C_{0,2}^*$ равно $2n - 2$. Очевидно, $\Omega_1 \subset \Omega, \Omega_2 \subset \Omega$ и оба множества содержат в сумме $2n - 2$ элемента. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, № 07-01-00167-а и № 06-01-00003.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Alizadeh F., Goldfarb D. Second-order cone programming // Math. Program., Ser. B. 2003. Vol. 95. P. 3–51.
2. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

В.В. Розен

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В ЧИСЛОВУЮ ПРЯМУЮ

1. Структура предпочтений на множестве A может быть задана в виде пары $\langle A, \rho \rangle$, где ρ — рефлексивное бинарное отношение на множестве A . Представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую \mathbb{R} называется отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям:

$$a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2 \implies \varphi(a_1) < \varphi(a_2), \quad (1)$$

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \implies \varphi(a_1) = \varphi(a_2), \quad (2)$$

где ρ^* — асимметричная, а ρ^s — симметричная часть отношения ρ .

В данной статье найдено необходимое условие существования представления структуры предпочтений в числовую прямую; в случае конечного множества A указанное условие является также достаточным.

2. Следующая теорема дает необходимое условие существования представления структуры предпочтений в числовую прямую.

Теорема 1. *Если структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ имеет представление в числовую прямую, то отношение ρ должно быть ациклическим относительно своей симметричной части, то есть при любом $n = 1, 2, \dots$ из соотношений*

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} a_2 \overset{\rho}{\lesssim} \dots \overset{\rho}{\lesssim} a_n \overset{\rho}{\lesssim} a_1 \quad (3)$$

должно следовать

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \overset{\rho^s}{\sim} \dots \overset{\rho^s}{\sim} a_n \overset{\rho^s}{\sim} a_1. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть при некотором натуральном n выполнено (3). Тогда для каждого $k = 1, \dots, n$ имеет место $a_k \overset{\rho^*}{<} a_{k+1}$ или $a_k \overset{\rho^s}{\sim} a_{k+1}$ (полагаем $a_{n+1} \equiv a_1$). Предположим, что для некоторого $l = 1, \dots, n$ соотношение $a_l \overset{\rho^s}{\sim} a_{l+1}$ не выполнено. Тогда выполняется $a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1}$, откуда

$$a_1 \overset{\rho}{\lesssim} \dots \overset{\rho}{\lesssim} a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1} \overset{\rho}{\lesssim} \dots \overset{\rho}{\lesssim} a_n \overset{\rho}{\lesssim} a_1.$$

Согласно (1), (2) из последней цепочки соотношений получаем

$$\varphi(a_1) \leq \dots \leq \varphi(a_l) < \varphi(a_{l+1}) \leq \dots \leq \varphi(a_n) \leq \varphi(a_1),$$

откуда $\varphi(a_l) < \varphi(a_1)$, что невозможно. Теорема доказана.

3. Перейдем к достаточным условиям существования представлений.

Теорема 2. *Ациклическая структура предпочтений на конечном множестве имеет представление в числовую прямую.*

Доказательство. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ — структура предпочтений, где множество A конечно и ρ ациклично. Так как из ациклическости следует антисимметричность, получаем $\rho^s = \Delta_A$, $\rho^* = \rho \setminus \Delta_A$ (где Δ_A — тождественное отношение на A), причем ρ^* будет строго ациклическим. Таким образом, в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ отсутствуют контура и петли, а так как множество A конечно, то все пути в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ имеют конечную длину и их длины ограничены в совокупности. Для произвольного элемента $a \in A$ полагаем: $h(a)$ — максимальная длина пути в графе $\langle A, \rho^* \rangle$, ведущего в вершину a .

Натуральное число $h(a)$ называется *высотой* элемента a , причем

$$0 \leq h(a) \leq n - 1,$$

где $n = |A|$. Пусть $a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2$. Положим $h(a_1) = k_1$. Тогда в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ существует путь длины k_1 , ведущий в вершину a_1 . Добавляя к нему дугу $a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2$, получаем путь длины $k_1 + 1$, ведущий в вершину a_2 , значит, $h(a_2) \geq k_1 + 1 > k_1 = h(a_1)$, то есть $h(a_1) < h(a_2)$. Показали справедливость импликации

$$a_1 \stackrel{\rho^*}{<} a_2 \implies h(a_1) < h(a_2). \quad (5)$$

Учитывая, что в нашем случае структура предпочтений антисимметрична ($\rho^s = \Delta_A$), имеем очевидное следование:

$$a_1 \stackrel{\rho^s}{\sim} a_2 \implies h(a_1) = h(a_2). \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) показывают, что для ациклической структуры предпочтений, заданной на конечном множестве, функция высоты h является ее представлением в числовую прямую.

Теорема 3. *Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на конечном множестве A имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было ациклическим относительно своей симметричной части ρ^s .*

Действительно, необходимость установлена в теореме 1 (даже без предположения конечности множества A). Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма. *Пусть отношение ρ ациклично относительно своей симметричной части ρ^s . Тогда каноническое отображение из A в A/ε_ρ , где ε_ρ — отношение взаимной достижимости, будет гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру предпочтений $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$.*

Перейдем к доказательству достаточности. Согласно лемме каноническое отображение π из A в A/ε_ρ является гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру предпочтений $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$. Как известно, факторизация отношения по отношению его взаимной достижимости приводит к ациклическому отношению (см. напр. [1]), поэтому фактор-структура $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$ будет ациклической и по теореме 2 функция высоты h будет ее представлением в числовую прямую. Тогда композиция этих отображений $\varphi = h \circ \pi$ будет представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
2. Розен В.В. Цель – оптимальность — решение. М.: Радио и связь, 1982.
3. Розен В.В. Представления целевой структуры задачи принятия решения в числовую прямую // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 118–121.

УДК 517.927.25

В.С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРОГО ЛЕЖАТ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y, \lambda) = U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) :=$$

$$:= (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$. В случае $\alpha_{\nu 1} = \beta_{\nu 1} = 0$ считаем, что краевое условие имеет вид $\alpha_{\nu 2} y(0) + \beta_{\nu 2} y(1) = 0$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$ и будем считать, что выполняется основное предположение: *корни ω_1, ω_2 отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от этого начала*. Не нарушая общности, можно считать:

$\mathbf{1}^0)$ $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Обозначим $\tau := |\omega_2|/\omega_1$ (очевидно, $\tau > 0$), $y_1(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) = \exp(\lambda\omega_2 x)$. Для определенности считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются. Введем следующие обозначения: $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} = \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda$, где $\nu, j = 1, 2$, и $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$ ($j = 1, 2$). Пусть $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$.

Характеристический определитель пучка операторов имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(U_\nu(y_j, \lambda))_{\nu, j=1}^2 = \\ &= \lambda^2 \{a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)} a_{12}\} = \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \end{aligned}$$

Предположим, что всюду в дальнейшем выполняется условие

$\mathbf{2}^0)$ $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$.

При этом условии

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_1} a_{1\bar{2}}, \quad (1)$$

и, следовательно, рассматриваемый пучок $L(\lambda)$ не является регулярным [1, с. 66–67] и более того не является нормальным в терминологии работы [2].

Решается задача нахождения условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует двукратная полнота системы собственных и присоединенных функций пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$. При отсутствии такой полноты естественно ставить вопрос о двукратной полноте в пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$ или об однократной полноте в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Отметим, что в случае $0 < \omega_1 < \omega_2$ и при условиях $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0$ свойства собственных функций (с.ф.) (однократная полнота и неполнота, минимальность, базисность Рисса) детально исследовались в [3], а при условии $\mathbf{2}^0$ в [4]. В случае же $\mathbf{1}^0$ и $\mathbf{2}^0$, но при дополнительном условии $0 < \omega_1 < |\omega_2|$ до сих пор исследовалась [5] только двукратная полнота системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Из (1) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней, которые выражаются формулой

$$\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $d_0 := \ln_0 c_0$ (\ln_0 есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая что $\ln_0 1 = 0$), $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$.

Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

В качестве порождающей функции для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ возьмем функцию, предложенную в работе [6]:

$$\gamma(x, \lambda, \Gamma) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ -\Gamma & V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1 & V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \neq 0,$$

где вектор $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T \neq 0$ является параметром. В [6] исследовалась возможность брать в качестве Γ векторы V_j и W_j ($j = 1, 2$).

Далее будут использоваться альтернативные условия:

3⁰) $W_2 \neq 0$ или: $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} = 0$;

4⁰) $W_2 = 0$ и $a_{1\bar{1}} \neq 0$.

Справедливы следующие леммы о порождающих функциях.

Лемма 1. *Если выполняются условия **1⁰**–**3⁰**, то функция*

$$y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$$

является порождающей для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

Лемма 2. *Если выполняются условия **1⁰**, **2⁰** и **4⁰**, то функция*

$$y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)),$$

где $b_0 = a_{1\bar{1}}/a_{1\bar{2}} \neq 0$, является порождающей для системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ при $\lambda \neq 0$.

Обозначим $Y_\Lambda := \{y(x, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Если $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то система Y_Λ совпадает с системой с.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з..

Из леммы 2 следует, что в случае выполнения условия **3⁰** система Y_Λ совпадает с обычной тригонометрической системой в экспоненциальной форме, и вопрос о полноте системы с.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0, 1]$ в этом случае является тривиальным.

Далее считаем, что выполняется условие **4⁰**. В этом случае

$$y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2 x)) \quad (b_0 \neq 0).$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполняются условия **1⁰**, **2⁰**, **4⁰** и $\sigma = \frac{1}{1+\tau}$, то система Y_Λ двукратно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ с возможным дефектом, не превосходящим 1. Если же $\sigma > \frac{1}{1+\tau}$, то система Y_Λ двукратно неполна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ и имеет в этом пространстве бесконечный дефект относительно двукратной полноты.*

Теорема 2. *Если выполняются условия **1⁰**, **2⁰**, **4⁰**, то для однократной полноты системы Y_Λ в пространстве $L_2[0, \sigma]$ достаточно выполнения одного из условий:*

а) $0 < \sigma \leq \min\{1, \frac{1}{\tau}\}$, $0 < \tau < +\infty$; при $\tau = 1$ должно быть $b_0 \neq \pm 1$;

б) $|b_0|^2 < \tau$ в случае $\frac{1}{\tau} < \sigma \leq \frac{2}{1+\tau}$, $\tau > 1$;

в) $|b_0|^2 \sum_{s=0}^k \frac{1}{|c_0|^{2s}} < \tau$ в случае, если при некотором натуральном k выполняются неравенства $\frac{k+1}{1+\tau} < \sigma \leq \min\{1, \frac{k+2}{1+\tau}\}$, $\tau > k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Шкалик А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.
3. Рыхлов В.С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 1992. Т. 36, № 3. С. 35–44.
4. Рыхлов В.С. О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка // Интегральные преобразования и специальные функции. Инф. бюл. М.: Науч.-исслед. гр. междунар. журн. "Integral Transforms and Special Functions" и ВЦ РАН, 2001. Т. 2, № 1. С. 85–103.
5. Rykhlov V.S. О полноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Eleventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2001. Vol. 11. P. 86–93.
6. Rykhlov V.S. On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operators // Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 1997. Vol. 7. P. 70–73.

УДК 517.518.85

С.П. Сидоров

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С УСЛОВИЕМ НА АЛГОРИТМ

В последнее время к задачам оптимального восстановления функционалов привлечено повышенное внимание. Достаточно подробный обзор по этой проблематике можно найти в статьях [1, 2], а также в книге [3].

В связи с ростом внимания к формосохраняющему приближению представляет интерес задача оптимальной интерполяции с использованием алгоритмов, которые обладают рядом дополнительных свойств.

Для $f \in C[0, 1]$ положим $I_n f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, где $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq 1$.

Пусть V – некоторый конус в R^n . Обозначим $A_n(V)$ класс всех линейных алгоритмов $A : R^n \rightarrow R$, удовлетворяющих условию: $A(y) \geq 0$ для всякого $y \in V$.

Определим относительную погрешность $e(W, I_n, V)$ задачи условной линейной интерполяции на классе действительныхзначных на $[0, 1]$ функций W на основе информации $I_n f$ с ограничением V следующим образом:

$$e(W, I_n, V) := \inf_{A \in A_n(V)} \sup_{f \in W} |Uf - A(I_n f)|.$$

Обозначим $e_r(x) = x^r$, $r = 0, 1, \dots$, и положим

$$P_2 = \left\{ f = \sum_{r=0}^2 a_r e_r : \|f''\|_{C[0,1]} \leq 1 \right\}.$$

В настоящей статье оценивается относительная погрешность задачи $e(P_2, I_n, V)$ с ограничением

$$V = R_+^n := \{l = (l_k)_{k=1}^n \in R^n : l_k \geq 0, k = 1, \dots, n\}.$$

Для $a = (a_k)_{k=1}^n, b = (b_k)_{k=1}^n \in R^n$ обозначим $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k$.

Теорема. Пусть $I_n f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ и $\zeta \in [0, 1]$ таково, что для некоторого $1 \leq k \leq n - 1$ будет $x_k < \zeta < x_{k+1}$. Тогда

$$e(P_2, I_n, R_+^n) = \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k).$$

Доказательство. Для всякого алгоритма $A \in A(R_+^n)$ найдется вектор $l = (l_{k,n})_{k=1}^n \in R_+^n$, такой что $A(I_n f) = \langle I_n f, l \rangle$ для всех $f \in C[0, 1]$.

Если для некоторого $1 \leq k \leq n$ будет $x_k = \zeta$, то получим равенство $e(W, I_n, R_+^n) = 0$. Исключим этот случай из рассмотрения, предположив, что $x_k \neq \zeta$, $k = 1, \dots, n$.

Имеем

$$\begin{aligned} e(P_2, I_n, R_+^n) &= \inf_{A \in A(R_+^n)} \sup_{f \in P_2} |f(\zeta) - A(I_n f)| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, |a_2| \leq \frac{1}{2}} \left| \sum_{r=0}^2 a_r e_r(\zeta) - \sum_{r=0}^2 a_r \langle I_n e_r, l \rangle \right| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, |a_2| \leq \frac{1}{2}} \left| \sum_{r=0}^2 a_r (e_r(\zeta) - \langle I_n e_r, l \rangle) \right| = \\ &= \inf_{l \in R_+^n} \sup_{a_1, a_2 \in R, |a_2| \leq \frac{1}{2}} \sum_{r=0}^2 |a_r| |e_r(\zeta) - \langle I_n e_r, l \rangle| = \\ &= \frac{1}{2} \inf |e_2(\zeta) - \langle I_n e_2, l \rangle|, \end{aligned}$$

где инфимум ищется среди всех $l \in R_+^n$, удовлетворяющих условиям $\langle I_n e_r, l \rangle = e_r(\zeta)$, $r = 0, 1$.

Для $s \in \{-1, 1\}$, $\zeta \in [0, 1]$ рассмотрим задачу линейного программирования

$$G^{s,\zeta}(u) = G^{s,\zeta}(l, y) = s(\langle I_n e_2, l \rangle - e_2(\zeta)) \rightarrow \min_{u \in D}, \quad (1)$$

где $D \subset R^{n+1}$ есть множество всех $u = (l, y) = (l_1, \dots, l_n, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} s(\langle I_n e_2, l \rangle - e_2(\zeta)) - y = 0, \\ \langle I_n e_r, l \rangle = e_r(\zeta), \quad r = 0, 1, \\ l \in R_+^n, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем использовать терминологию и факты теории линейного и выпуклого программирования [4]. Множеством допустимых планов задачи (1), (2) является множество точек, удовлетворяющих системе ограничений (2). Обозначим $G_{min}^{s,\zeta}$ решение задачи $G^{s,\zeta}(u) \rightarrow \min_{u \in D}$. Если для некоторых s, ζ множество допустимых планов задачи $G^{s,\zeta}(u) \rightarrow \min_{u \in D}$ будет пустым, полагаем $G_{min}^{s,\zeta} = +\infty$. Имеем

$$e(W, I_n, A_+) = \frac{1}{2} \min_{s \in S} G_{min}^{s,\zeta}. \quad (3)$$

Оценим правую часть равенства (3). Известно, что решение задачи $G^{s,\zeta}(u) \rightarrow \min_{u \in D}$ достигается в одном из базисных планов множества допустимых планов (если оно не пусто), и этот базисный план определяется выбором трех базисных столбцов матрицы системы (2).

Найдем значение целевой функции $G^{s,\zeta}$ в каждом из базисных планов. Тогда $G_{min}^{s,\zeta}$ будет равно наименьшему из этих значений.

Заметим, что базисный план $u^* = (l_1^*, \dots, l_n^*, y^*)$ (2) не может определяться выбором базисных столбцов k_1, k_2, k_3 для некоторых $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n$. В этом случае числа $l_{k_1}, l_{k_2}, l_{k_3}$ будут удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^3 e_r(x_{k_i}) l_{k_i} = e_r(\zeta), \quad r = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Так как функции e_0, e_1, e_2 образуют систему Чебышева, решение системы (4) существует и единственно, но для одного из $i = 1, 2, 3$ будет $l_{k_i} < 0$, что противоречит условию положительности $l_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$.

Таким образом, базисный план $u^* = (l_1^*, \dots, l_n^*, y^*)$ будет определяться выбором базисных столбцов $k_1, k_2, n+1$ для некоторых $1 \leq k_1 < k_2 \leq n$. Тогда числа l_{k_1}, l_{k_2} будут удовлетворять системе

$$\sum_{i=1}^2 e_r(x_{k_i}) l_{k_i} = e_r(\zeta), \quad r = 0, 1. \quad (5)$$

Заметим, что решения системы (5) l_{k_1}, l_{k_2} будут неотрицательны только если $x_{k_1} \leq \zeta \leq x_{k_2}$. Решением системы (5) являются числа $l_{k_1} = (x_{k_2} - \zeta)/(x_{k_2} - x_{k_1})$, $l_{k_2} = (\zeta - x_{k_1})/(x_{k_2} - x_{k_1})$, при этом $G^{s,\zeta}(u^*) = (x_{k_2} - \zeta)(\zeta - x_{k_1})$.

Так как $x_k < \zeta < x_{k+1}$, то $\min_{s \in S} G_{min}^{s,\zeta} = (x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $I_n f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ и $\zeta \in [0, 1]$ таково, что для некоторого $1 \leq k \leq n - 1$ будет $x_k < \zeta < x_{k+1}$. Пусть множество $F \subset C[0, 1]$ таково, что $P_2 \subset F$. Тогда

$$e(F, I_n, R_+^n) \geq \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k).$$

Обозначим $W_\infty^m[0, 1] := \{f : f^{(m-1)} \text{ — абс. непр. на } [0, 1], \|f^{(m)}\|_{C[0,1]} \leq 1\}$. Так как $P_2 \subset W_\infty^2[0, 1]$, то $e(W_\infty^2[0, 1], I_n, R_+^n) \geq \frac{1}{2}(x_{k+1} - \zeta)(\zeta - x_k)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 07-01-00167-а и № 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Micchelli C.A., Rivlin T.J. Optimal estimation in approximation theory. Ch. A survey of optimal recovery. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
2. Micchelli C.A., Rivlin T.J. Lectures Notes in Mathematics. Ch. Lectures on optimal recovery. Berlin: Springer-Verlag, 1985. P. 21–93.
3. Трауб Дж., Вожьянковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
4. Дудов С. И., Сидоров С. П. Курс математической экономики. Ч. 1. Финансовая математика, оптимизация и их приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002.

УДК 517.51

А.Ю. Трынин

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА – ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $Y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$ — система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Причем, каково бы ни было $n \in N$, функция y_n имеет на $[a, b]$ ровно n простых нулей $a \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq b$. Для любого натурального n и любой функции f , определённой на $[a, b]$, положим

$$L_n^Y(f, x) = \sum_{k=1}^n \frac{y_n(x)}{y_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=1}^n l_{k,n}^Y(x) f(x_{k,n}). \quad (1)$$

В качестве системы Y возьмем последовательность собственных функций u_n задачи Штурма – Лиувилля на $[0, \pi]$ с непрерывным потенциалом ограниченной вариации и краевыми условиями третьего рода, из которых

удалены условия первого рода. Определение этой системы и используемые в доказательстве асимптотические формулы можно найти в [1-3]. Приведем модификацию признака Дини для тригонометрических рядов Фурье, гарантирующую сходимость в точке интервала $(0, \pi)$ интерполяционного процесса (1) Лагранжа – Штурма – Лиувилля для функции, интегрируемой по Риману на $[0, \pi]$.

Лемма 1 ([1, с. 6]). *Существует константа C_1 , зависящая только от вида краевых условий и непрерывного потенциала q ограниченной вариации задачи Штурма – Лиувилля такая, что для всех $x \in [0, \pi]$ и $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ фундаментальные функции Лагранжа – Штурма – Лиувилля удовлетворяют неравенству*

$$l_{k,n}^{SL}(x) = \left| \frac{u_n(x)}{u'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right| \leq C_1.$$

Лемма 2 ([1, с. 11]). *Пусть $f \in C[0, \pi]$, тогда всюду на интервале $(0, \pi)$*

$$L_n^{SL}(f, x) - f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) \right) l_{k,n}^{SL}(x) + O_x \left(\omega \left(f, \frac{\ln n}{n} \right) + \frac{\ln n}{n} \right).$$

Причем константа равномерности в O -символике Ландау не зависит от x на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$.

Теорема. *Пусть h и H – произвольные действительные числа в краевых условиях задачи Штурма – Лиувилля, q – непрерывный потенциал ограниченной вариации, функция f интегрируема в смысле Римана на $[0, \pi]$, точка $x_0 \in (0, \pi)$ и функция $\varphi_{x_0}(x)$, мажорирующая функцию $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|$, монотонно возрастает при $x < x_0$ и убывает при $x > x_0$. Тогда если для некоторого α ($0 < \alpha < \pi$) φ_{x_0} суммируема в α -окрестности точки x_0 , то есть*

$$\int_{x_0 - \alpha}^{x_0 + \alpha} \varphi_{x_0}(x) dx < \infty, \quad (2)$$

то интерполяционный процесс (1) Лагранжа – Штурма – Лиувилля сходится к значению функции f в точке x_0 .

Доказательство. Возьмем произвольное положительное ε . Из (2) следует непрерывность функции f в точке x_0 и существование такого положительного δ , для которого имеет место неравенство

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi_{x_0}(x) dx < \frac{\varepsilon \pi}{2M}, \quad (3)$$

где $M = \sup |u_n(x)|$, $x \in [0, \pi]$, $n \in N$ при выбранной нормировке собственных функций, как в [2] или [1]. Индекс p определим из неравенств $x_{p,n} \leq x_0 < x_{p+1,n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Из непрерывности f в точке x_0 , леммы 1 и асимптотических формул (полученных в [1])

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{1}{n^2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + O(n^{-3}), \quad (4)$$

где

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau,$$

$$c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right),$$

находим номер n_1 , начиная с которого выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=p-1}^{p+1} \left(f(x_{k,n}) - f(x_0) \right) l_{k,n}^{SL}(x) \right| \leq$$

$$\leq 3C_1 \omega_{x_0} \left(f, \max_{k=1-p, p, p+1} |x_{k,n} - x_0| \right) < \varepsilon \quad (5)$$

В силу ограниченности интегрируемой в смысле Римана функции f и того, что

$$\left| \sum_{k=1}^n |l_{k,n}^{SL}(x_0)| - \frac{|u_n(x_0)|}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{|x_{k,n} - x_0|} \right| = O(n^{-1})$$

(доказательство этой асимптотической формулы содержится в [1]), найдутся $C_2 > 0$ и номер $n_2 \geq n_1$ такие, что для всех $n \geq n_2$

$$\left| \sum_{k=1}^n \left| f(x_{k,n}) - f(x_0) \right| \left| l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| - \frac{|u_n(x_0)|}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|f(x_{k,n}) - f(x_0)|}{|x_{k,n} - x_0|} \right| < \varepsilon. \quad (6)$$

В силу (4) найдем номер $n_3 \geq n_2$, начиная с которого выполняется соотношение $\min_{k=1, n-1} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \geq \frac{\pi}{2n}$. Тогда из (3), (5), (6) получим, что

$$\left| \sum_{k: x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} \left(f(x_{k,n}) - f(x_0) \right) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{p-2} |f(x_{k,n}) - f(x_0)| |l_{k,n}^{SL}(x_0)| + \sum_{k=p+2}^l |f(x_{k,n}) - f(x_0)| |l_{k,n}^{SL}(x_0)| + \varepsilon$$

(здесь l и m – номера наибольшего и наименьшего из узлов, попадающих в окрестность $O_\delta(x_0)$). Далее продолжим оценку таким образом:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k:x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| \leq \\ & \leq \frac{2M}{n} \left\{ \sum_{k=m}^{p-2} \varphi_{x_0}(x_{k,n})(x_{k+1,n} - x_{k,n}) + \sum_{k=p+2}^l \varphi_{x_0}(x_{k,n})(x_{k,n} - x_{k-1,n}) \right\} + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

По условию теоремы функция $\varphi_{x_0}(x)$ возрастает при $x < x_0$ и убывает при $x > x_0$. Тогда в силу (4) и выбора индекса p имеем

$$\left| \sum_{k:x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| \leq \frac{2M}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x) dx + 2\varepsilon.$$

Теперь из (3), леммы 2 и принципа локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля [4] найдём $n_3 \geq n_2$ такое, что для всех $n \geq n_3$

$$\begin{aligned} |L_n^{Sl}(f, x) - f(x)| &= \left| \sum_{k:x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k:x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| + \varepsilon \leq \\ &\leq \left| \sum_{k:x_{k,n} \in O_\delta(x_0)} (f(x_{k,n}) - f(x_0)) l_{k,n}^{Sl}(x_0) \right| + 2\varepsilon \leq \\ &\leq \frac{2M}{\pi} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi_{x_0}(x) dx + 4\varepsilon \leq 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что без модификации (2) условие классического признака Дини сходимости процессов (1) не гарантирует.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00167-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А.Ю. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля. Саратов, 1991. 32 с. Деп. В ВИНТИ 26.04.91, №1763-В91.
2. Левитан Б.М. Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. М.: Наука. 1988
3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
4. Трынин А.Ю. Принцип локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 137–140

В.А. Халова

**СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ РАЗЛОЖЕНИЙ
ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ**

Рассматривается оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A(x, t)f(t) dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k)g_k(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $(f, v_k) = \int_0^1 f(t)v_k(t) dt$, $v_k(t) \in C^n[0, 1]$, $g_k(x) \in C^n[0, 1]$, системы функций $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k^{(n)}(t)\}_1^m$ линейно независимы, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, ядро $A(x, t)$ непрерывно дифференцируемо n раз по x и один раз по t и $\Delta A_{x^s}(x, t)|_{t=x} = A_{x^s}(x, t)|_{t=x-0} - A_{x^s}(x, t)|_{t=x+0} = \delta_{s, n-1}$ ($s = 0, \dots, n$, $\delta_{i, j}$ — символ Кронекера).

В данной статье приводятся необходимые и достаточные условия на $f(x)$, обеспечивающие равномерную сходимость к ней на всем отрезке $[0, 1]$ обобщенных средних Рисса вида

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda, \quad (2)$$

где $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} A f$ — резольвента Фредгольма оператора (1) (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;
- б) существует такая константа $C > 0$, что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;
- в) при фиксированном λ $\lim_{r \rightarrow \infty} g(\lambda, r) = 1$.

Отметим, что исследования суммируемости по Риссу начались с работы [1], в которой М. Стоун рассматривал интегральный оператор, ядром которого являлась функция Грина дифференциального оператора n -го порядка с регулярными краевыми условиями, а $g(\lambda, r) = \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^l$. В [2] А.П. Гуревичем и А.П. Хромовым суммируемость по Риссу была доказана для оператора (1) в случае ядра $A(x, t) = A(1-x, t) = 1$ и обобщенных средних Рисса

вида (2) с дополнительным условием на $g(\lambda, r)$. В работе [3] автором был установлен аналогичный результат для оператора (1), когда $A(x, t)$ — ядро оператора n -кратного интегрирования. В данной статье получено обобщение этого результата.

Пусть выполняется условие теоремы 1 [4]. Тогда в силу теоремы 2 [4] область значений оператора состоит из всех функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до $(n - 1)$ -го порядка включительно и удовлетворяющих условиям:

$$V_j(y) = U_j(y) - (y, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где $U_j(y)$ — линейные формы производных $y(x)$ в нуле и единице. Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 [4] после приведения линейных форм к нормированному виду регулярны по Биркгофу.

Введем следующие обозначения: $\rho^n = \lambda$; ω_k ($k = 1, \dots, 2n$) — корни n -й степени из 1 и $(\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2)$ упорядоченные так, что на одной из границ сектора $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$ ($0 = \gamma_0 < \dots < \gamma_n = 2\pi/n$) выполняется $\operatorname{Re} \rho \omega_{n-1} \geq \operatorname{Re} \rho \omega_n = 0$; $S_{\delta_0, j}$ — область, полученная путем удаления из сектора $\gamma_{j-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_j$ нулей квазимногочлена вида

$$a_0 + a_1 e^{-2\rho\omega_n} + a_2 e^{-\rho(\omega_{n-1} + \omega_n)} + a_3 e^{-2\rho\omega_{n-1}} + a_4 e^{-2\rho(\omega_{n-1} + \omega_n)}, \quad a_0 a_4 \neq 0,$$

асимптотически приближающихся к соответствующим корням n -й степени из собственных значений оператора A^{-1} , вместе с их круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0 .

Пусть функция $g(x, \lambda)$ удовлетворяет еще одному условию:

г) для каждой области $S_{\delta_0, j}$ существуют положительные числа β_j и h_j такие, что при $\left| \arg \rho \omega_n - \frac{\pi}{2} \right| \leq h_j$ имеет место равномерная по r оценка $g(re^{i\arg \rho}, r) = O\left(\left| \arg \rho \omega_n - \frac{\pi}{2} \right|^{\beta_j}\right)$.

Теорема. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x) d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежала множеству всех непрерывных на $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих всем тем граничным условиям (3), в которых линейные формы не содержат производных.

При доказательстве данной теоремы использовался метод, основанный на методе контурного интегрирования резольвенты Фредгольма интегрального оператора по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Stone M.H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28, № 4. P. 695–761.
2. *Гуревич А.П., Хромов А.П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2001. № 8(47). С. 38–50.
3. *Халова В.А.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 144–146.
4. *Халова В.А.* Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125–127.

УДК 518.91

А.В. Харламов

ГЕОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПОСТРОЕНИИ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим задачу построения модели ценообразования на вторичном рынке жилья. Общепринятый подход [1] предполагает построение глобальной зависимости, причем в качестве одного из регрессоров выбирается расстояние. Используя данные, полученные с сайта еженедельника газеты «Квадратный метр» (<http://www.ks.sarbc.ru>) за январь 2006 года, построим такую модель для Саратова. Регрессия строилась по следующим параметрам:

- y — цена квартиры, тыс. руб.;
- x_1 — жилая площадь, m^2 ;
- x_2 — площадь кухни, m^2 ;
- x_3 — дополнительная площадь, m^2 ;
- x_4 — логарифм расстояния до центра, $\ln(m)$;
- x_5 — расположение на первом этаже;
- x_6 — расположение на последнем этаже;
- x_7 — дом малой этажности;
- x_8 — пятиэтажка;
- x_9 — кирпичный дом;
- x_{10} — в хорошем или отличном состоянии;
- x_{11} — имеются балкон или лоджия.

В результате была получена следующая зависимость:

$$y = 1180,61 + 13,04 x_1 + 10,38 x_2 + 11,17 x_3 - 116,40 x_4 - 36,82 x_5 - \\ - 28,19 x_6 - 122,10 x_7 - 30,43 x_8 + 20,88 x_9 + 19,22 x_{10} + 16,87 x_{11},$$

(1,04) (1,36) (0,79) (2,62) (5,70)
(5,34) (10,99) (5,06) (5,03) (4,20) (5,30)

в скобках указаны стандартные ошибки.

Все коэффициенты при переменных оказались значимыми, как и вся модель в целом. Коэффициент детерминации, равный $R^2 = 0,7008$, показывает, что модель объясняет только 70% имеющейся зависимости.

Подобная модель, построенная для данных, охватывающих большие территории, является усредненной и может сглаживать имеющиеся частные особенности. Такая ситуация наиболее характерна для областей со сложной географической структурой. Существуют разные подходы для преодоления указанного недостатка, например, пытаются выделять отдельные районы или учитывать корреляции между соседними объектами [2]. В данном случае предлагается использовать координатный (географический) подход, учитывающий местоположение объекта [3].

Оценки коэффициентов будут иметь вид

$$\hat{\beta}(u_i, v_i) = (X^T W(u_i, v_i) X)^{-1} X^T W(u_i, v_i) Y.$$

Здесь (u_i, v_i) – координаты точки измерения. В отличие от классического случая получают уже не вектор оценок параметров, а матрицу оценок. Весовая матрица $W(u_i, v_i)$ является диагональной, причем диагональные элементы представляют расстояния от местоположения до соответствующего объекта. Для расчета расстояний будем использовать метод «три-куб», тогда:

$$w_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{b}{d_{ij}}\right)^3\right)^3, & d_{ij} < b. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Здесь d_{ij} – расстояние между местоположением i и соседом j , а значение параметра b определяется как ширина полосы пропускания.

Применение географического подхода для имеющихся данных дало следующие результаты. Отметим, что координаты объектов были получены из географических координат широты и долготы некоторым масштабированием. Коэффициент детерминации стал равен $R^2 = 0,8300$. Таким образом, объясняется уже 83% зависимости.

Проанализируем значения полученных коэффициентов для некоторых регрессоров. Так, оценки коэффициента при регрессоре x_1 (жилая площадь), отражены в табл. 1.

Здесь территория Саратова разбита на квадраты по значениям координат, и для каждого квадрата выписано среднее значение соответствующего коэффициента.

Коэффициенты значимы на всей территории. В центральной части города сразу выделяется микрорайон с дорогами квартирами, практически по 30 тыс. рублей за квадратный метр. В целом центральная часть города представляет собой район, с квартирами около 20 тыс. рублей за метр, также выделяются окраины города, где цена квадратного метра порядка 10 тыс.

рублей. Можно проследить дрейф убывающей цены от центра в направлении Ленинского района.

Таблица 1

x_1	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
27		9,8										
28	9,8	10,0	10,3									
29	9,6	11,0	13,3	13,7	14,0	12,7						
30	10,3	12,9	14,2	13,6	14,7	16,4	18,6					
31				13,0	15,7	17,2	19,7	22,4	17,4	11,6	13,5	
32					14,1	16,6	23,2	28,4	21,4	14,1	14,1	
33				11,2		12,0	15,7	20,3	19,1		15,7	
34				11,9	11,5	11,8	14,7		16,6	15,2	16,6	16,8
35		9,7	10,9	11,9	12,9	9,8			12,4			16,7
36		9,1	8,6		12,2	11,2	8,9	8,6				

Отметим интересный результат, который был получен для коэффициента при регрессоре x_9 (квартира в кирпичном доме). Согласно классической регрессионной модели квартира в кирпичном доме стоит на 20 тыс.руб. дороже аналогичной квартиры в панельном доме. Географический подход показывает, что «кирпичность» значимо влияет на цену только в некоторых местах.

Приведем таблицу коэффициентов (табл. 2) и соответствующие уровни значимости (табл. 3).

Таблица 2

x_9	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
27		9,7										
28	9,1	10,5	10,3									
29	7,9	13,3	18,7	21,9	24,2	23,6						
30	11,5	16,1	17,9	21,6	21,9	30,8	48,9					
31				17,6	26,2	38,0	45,9	29,4	50,7	142,6	139,6	
32					15,8	40,2	21,0	15,1	33,7	119,7	126,2	
33				13,1		3,3	-7,6	-28,3	-27,8		54,8	
34				12,0	9,7	5,0	-10,0		-41,6	-32,0	-7,8	-4,0
35		5,7	5,2	0,6	9,4	5,7			-10,9			-5,3
36		6,0	1,7		6,3	1,4	-0,3	-0,5				

Таким образом, мы получили, что географический подход позволяет выявить специфические особенности, присущие отдельным районам города, которые сглаживаются в классической модели. А выявляемые особенности, в свою очередь, являются хорошим материалом для дальнейшего анализа развития этих районов в различных направлениях и построения улучшенных моделей.

t	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
27		0,173										
28	0,198	0,136	0,148									
29	0,264	0,063	0,02	0,001	0,002	0,008						
30	0,087	0,011	0,006	0,001	0,008	0,002	0					
31				0,022	0,004	0	0,002	0,106	0,027	0	0	
32					0,081	0	0,208	0,453	0,22	0,001	0	
33				0,085		0,679	0,542	0,064	0,077		0,004	
34				0,173	0,24	0,501	0,28		0,002	0,002	0,551	0,778
35		0,443	0,494	0,71	0,22	0,393			0,142			0,688
36		0,397	0,817		0,299	0,8	0,863	0,924				

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004.

2. Baltagi B.H., Song S.H., Jung B.C., Koh W. Testing for Serial Correlation, Spatial Autocorrelation and Random Effects Using Panel Data // J. of Econometrics, 2003. Vol. 140, № 1. P. 5–51

3. Stewart A., Fotheringham A.S., Brunson C., Charlton M. Geographically weighted regression the analysis of spatially varying relationships. University of Newcastle, 2002

УДК 519.25/.258

В.С. Хитрин, Е.М. Борисова

ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДИКИ ТОРГОВЛИ НА БИРЖЕВЫХ РЫНКАХ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ О ЦЕНОВОМ ДВИЖЕНИИ АКТИВОВ

Введение. Для успешной работы на биржевом рынке используются различные методы технического анализа, объектом изучения которого являются ценовые ряды, формирующиеся в результате непрерывного совершения сделок купли–продажи. Для последующей обработки получаемой ценовой информации применяются различные методы представления ценовых движений, основанные на дискретизации либо временных, либо ценовых интервалов движения.

В первом случае получаем ценовые графики в виде баров, японских свечей. При этом каждый отдельный бар (свеча) характеризует движение цены в течение фиксированного промежутка времени посредством 4-х ценовых

параметров: цены открытия, цены закрытия (начальным и конечным значениями цены в указанном временном диапазоне), а также максимального и минимального значений, достигнутыми в указанный период времени.

Другой, менее популярный метод представления ценового движения основан на ценовой дискретности – так называемый метод «крестиков-ноликов» [1]. Ценовой график представляет собой чередующиеся столбцы крестиков и ноликов, причем столбец крестиков соответствует периоду роста цен на рынке, соответственно столбец ноликов – периоду снижения. В каждом из столбцов положение соответствует ценовому уровню, определяемому по оси ординат. При построении столбца очередная фигура (крестик или нолик) наносится на график, если цена достигла следующего ценового уровня, отличающегося от предыдущего на некоторый фиксированный интервал — Step. Переход к следующему столбцу осуществляется при продвижении цены в противоположную сторону на величину, кратную 2 или более, фиксированному интервалу Step. При указанном способе построения графика очередной столбец с момента своего появления содержит соответствующее количество фигур: 2 или более.

Количество фигур, требуемых для разворота и начала формирования нового столбца, называется уровнем разворота — Revers, который совместно с величиной ценового интервала — Step характеризует ценовой шум. Превышение ценового шума означает начало направленного трендового движения на рынке, использование которого и составляет основу позитивного трейдинга.

Особый интерес к вышеописанному методу представления ценового движения обуславливается высоким уровнем формализации биржевой информации (устранением временного и сосредоточении на более значимом ценовом факторе). В результате подобный подход позволяет применить статистические методы для описания характеристик ценового движения и создать на их основе торговую методику с положительным математическим ожиданием доходности.

Целью настоящей статьи является создание и оптимизация торговой методики на основе формализованных статистических данных об амплитуде колебаний цен, формирующихся на высоколиквидных биржевых рынках.

Определение торговой методики. Постановка задачи. Как было указано во введении, превышение уровня «ценового шума»

$$\Delta Pr = Revers \cdot Step$$

предполагает возникновение направленного движения, то есть тренда. Данные соображения позволяют сформулировать следующие условия для открытия позиции: появление «2» фигуры во вновь формируемом столбце.

Для определенности считаем уровень разворота: $Revers = 2$. В случае возникновения тренда, т.е. формирования в столбце новых фигур $n > 2$, величина накопленной прибыли на одну акцию составляет:

$$Profit = (n - 2) \cdot Step.$$

Удерживая позицию до образования очередной $n + 1$ фигуры в столбце, рассчитываем на получение дополнительной прибыли в размере:

$$\Delta Profit = Step. \quad (1)$$

Однако при этом не следует исключать и риск получить убытки в двойном размере в случае разворота:

$$Loss = -2 \cdot Step. \quad (2)$$

Таким образом, оптимальная торговая методика заключается в своевременной фиксации прибыли, т.е. закрытии позиции прежде чем произойдет завершение тренда и разворот направления движения.

Представленные выше соображения позволяют сформулировать следующее условие задачи: *Найти оптимальный параметр n , реализующий максимальную величину математического ожидания доходности торговой методики в предположении заданного распределения дискретной случайной величины p_r – вероятности обнаружения в столбце r фигур, $r = 2, 3$.*

Расчет математического ожидания доходности торговой методики. Для расчета математического ожидания доходности торговой методики, предполагающей открытие позиции по факту образования 2 фигур в столбце и закрытия позиции по факту достижения $n + 1$ фигуры в столбце $E(n + 1)$ будет использована рекуррентная формула

$$E(n + 1) = E(n) + \Delta E(n),$$

где $\Delta E(n)$ – математическое ожидание доходности, которая может быть получена, если позиция будет открываться всякий раз по достижении в столбце n фигур и закрываться по факту достижения $n + 1$ фигуры (один шаг в положительном направлении), либо при развороте направления движения, то есть формировании двух фигур нового противоположно направленного столбца.

При этом вероятность первого положительного результата — формирование $n + 1$ фигуры при условии, что n фигур в столбце уже достигнуты,

$$P(n + 1) = (p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3} + \dots) / (p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + \dots),$$

а дополнительная доходность на одну акцию определяется в (1).

Вероятность второго события – разворота от достигнутых n фигур в столбце и получение убытка в размере (2) на одну акцию – является вероятностью отрицания первого события.

Окончательно, учитывая вероятности и размеры доходов/убытков в каждом из двух возможных событий, получаем:

$$\begin{aligned}\Delta E(n) &= Step \cdot P(n+1) - 2Step \cdot P_{Rev}(n+1) = \\ &= Step \cdot \frac{1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_n) - 2p_n}{1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1})}.\end{aligned}$$

Каждое последующее $n+1$ значение математического ожидания доходности торговой методики будет больше предыдущего до тех пор, пока величина в соотношении (2) положительная. При изменении знака $\Delta E(n)$ рост математического ожидания сменится снижением. Именно при значениях $n, n+1$, при которых происходит смена знака $\Delta E(n)$ и достигаются максимальные значения математического ожидания доходности торговой методики. Для нахождения соответствующего интервала рассмотрим условие

$$\Delta E(n) \approx 0, \quad 1 - (p_2 + p_3 + \dots + p_n) - 2p_n \approx 0.$$

Для получения аналитической оценки оптимального интервала $[n, n+1]$ будем использовать следующее распределение случайной дискретной величины p_r , характерное для ценовых параметров биржевых рынков [2]:

$$p_r = R \cdot \exp(-r/\mu), \quad r = 2, 3, \dots,$$

где R – константа, обеспечивающая выполнение условия $p_2 + p_3 + \dots + p_N = 1$, μ – параметр, характеризующий распределение дискретной величины.

При данном распределении и $N \rightarrow \infty$ получаем простое аналитическое выражение для определения оптимального n как целой части числа от выражения

$$n \approx 2 - \mu \cdot \ln(2/3).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дорси Т. Метод графического анализа «Крестики-Нолики». М.: ИК Аналитика, 2001. 296 с.
2. Винс Р. Новый подход к управлению капиталом. Структура распределении активов между различными инвестиционными инструментами. М.: Аналитика, 2003. 264 с.

А.П. Хромов

**О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ
И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С ИНВОЛЮЦИЕЙ**

Рассмотрим следующий функционально-дифференциальный оператор L :

$$l[y] = ay'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$U(y) = \int_0^1 y(x) d\sigma(x) = 0. \quad (2)$$

Здесь $a^2 \neq 1$, $p_k(x) \in C^1[0, 1]$, $\sigma(x)$ — функция ограниченной вариации, подчиненная следующему условию регулярности:

$$(\beta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\alpha^2 - \gamma^2\beta^2) \neq 0, \quad (3)$$

где $\alpha = \sigma(+0) - \sigma(0)$, $\beta = \sigma(1) - \sigma(1-0)$, $\gamma = a - d^{-1}$, $d = (a^2 - 1)^{-1/2}$.

Оператор (1) является простейшим дифференциальным оператором первого порядка, содержащим оператор отражения $Sf(x) = f(1-x)$. Такие операторы имеют давнюю историю и находят важные применения, в частности, при изучении спектральных свойств интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [1].

Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, резольвенту оператора L .

Введем оператор отражения S : если $f(x)$ скалярная функция, то $Sf = f(1-x)$, если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), то $Sf = (f_1(x), f_2(1-x))^T$, если $f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{pmatrix}$, то $Sf(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(1-x) & f_{22}(1-x) \end{pmatrix}$.

Рассмотрим следующую задачу для системы Дирака:

$$v' + P(x)v - \lambda Dv = m(x), \quad (4)$$

$$\int_0^1 S(\Gamma v(t)) d\sigma(t) = 0, \quad (5)$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $P(x) = D\Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma$, $D = \text{diag}(d, -d)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, $P_1(x) = S \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(x) & p_1(x) \end{pmatrix}$, $m = D\Gamma^{-1}S(f(x), f(x))^T$.

Исследование этой краевой задачи методами статей [2, 3] приводит к следующим фактам.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda), \quad (6)$$

где $v_j(x, \lambda)$ — компоненты решения $v(x, \lambda)$ задачи (4)–(5).

Обратно, если $v(x, \lambda)$ есть решение (4)–(5) и соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то R_λ существует и выполняется (6).

Лемма 2. *В области S_δ , получающейся из комплексной λ -плоскости удалением всех собственных чисел λ_k вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса $\delta > 0$, имеет место оценка*

$$\|R_\lambda f\|_\infty = O\left(\left(\varkappa(|\operatorname{Re} \lambda d|) + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) \|f\|_\infty\right),$$

где $\varkappa(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$ при $x \geq 0$.

Введем в рассмотрение следующее множество функций:

$$M = \{f(x) \mid f(x) \in C[0, 1], U(f) = 0\}.$$

Лемма 3. *Множество M всюду плотно в $L_2[0, 1]$.*

Доказательство. Найдем сначала представление класса M . Пусть α такое, что $\int_0^1 e^{\alpha x} d\sigma(x) \neq 0$. Такое α существует, так как в противном случае по теореме Вейерштрасса $\int_0^1 f(x) d\sigma(x) = 0$ для любой $f(x) \in C[0, 1]$ и, следовательно, $\sigma(x) = \text{const}$, но это противоречит (3).

Найдем теперь представление класса M . Пусть α такое, что $\int_0^1 e^{\alpha x} d\sigma(x) = 1$ (что всегда можно получить, за счет умножения $\sigma(x)$ на надлежащую постоянную).

Рассмотрим краевую задачу

$$f' - \alpha f = g, \quad U(f) = 0. \quad (7)$$

Ее решение есть

$$f(x) = \int_0^x e^{\alpha(x-t)} g(t) dt - e^{\alpha x} U\left(\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} g(\tau) d\tau\right). \quad (8)$$

Это и есть нужное представление M .

Пусть теперь $\psi(x)$ ортогональна M . Тогда из (8) получаем

$$\int_0^1 e^{-\alpha t} g(t) dt \int_t^1 e^{\alpha x} \overline{\psi}(x) dx - b \int_0^1 e^{-\alpha t} g(t) dt \int_t^1 e^{\alpha x} d\sigma(x) = 0, \quad (9)$$

где $b = \int_0^1 e^{\alpha x} \overline{\psi}(x) dx$. В силу произвольности $g(x)$ из (9) получаем

$$\int_t^1 e^{\alpha \tau} \overline{\psi}(\tau) d\tau - b \int_t^1 e^{\alpha \tau} d\sigma(\tau) = 0. \quad (10)$$

Так как $\int_t^1 e^{\alpha \tau} d\sigma(\tau)$ в силу (3) имеет разрывы, то $b = 0$. Тогда из (10) получаем, что $\psi(x) = 0$ почти всюду. Лемма доказана.

Теорема. Система собственных и присоединенных функций оператора L полна в $L_2[0, 1]$.

Доказательство. По лемме 3 достаточно доказать, что всякая функция $f(x) \in M$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям оператора L . Пусть $f(x) \in M$. Тогда из $Lf - \lambda_0 f = Lf - \lambda f + (\lambda - \lambda_0)f$, где λ_0 – не собственное число, получаем $R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda - \lambda_0} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g$, где $g = Lf - \lambda_0 f$. Отсюда

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda = f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g d\lambda. \quad (11)$$

По лемме 2

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_\lambda g d\lambda \right\|_\infty = O\left(\frac{\ln r}{r}\right). \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем утверждение леммы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. № 4. С. 1–4.
2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
3. Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции: Инф. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

Г.В. Хромова

О СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В данной статье получены необходимые и достаточные условия, при которых два известных метода регуляризации, разработанных в классической постановке для гильбертовых пространств, могут быть использованы для получения равномерных приближений к решениям уравнений первого рода.

1. Рассмотрим уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где A — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $C[a, b]$, A^{-1} существует, но неограничен, и семейство регуляризирующих операторов R_α :

а) $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$ соответствует методу Лаврентьева [1];

б) $R_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1}A^*$ — соответствует методу регуляризации Тихонова нулевого порядка гладкости [2].

Как известно, эти методы в их классических постановках применяются для нахождения приближенных решений уравнения (1) в гильбертовых пространствах. При этом $\alpha > 0$, а в случае а) $A = A^* > 0$.

Область сходимости любого метода регуляризации определяется соотношением

$$\|R_\alpha Au - u\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (2)$$

Отметим, что некоторые условия сходимости (2) в равномерной метрике для указанных методов в иной, чем здесь, постановке приведены в [3–6].

В дальнейшем будем считать, что параметр α принимает не обязательно положительные значения, а любые, при которых существует оператор R_α , а в случае а) оператор A — произвольный линейный ограниченный.

Теорема 1. *Если $u = \tilde{A}v$, где $v \in L_2[a, b]$, $\tilde{A} = A$ в случае а) и $\tilde{A} = A^*A$ в случае б), то для сходимости (2) в равномерной метрике необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left\| \alpha R_\alpha \tilde{A}v \right\|_{C[a,b]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Доказательство вытекает из представления

$$R_\alpha A = -\lambda R_\lambda (\tilde{A}^{-1}) \Big|_{\lambda=-1/\alpha},$$

где $R_\alpha(\tilde{A}^{-1})$ — резольвента оператора \tilde{A}^{-1} , λ — спектральный параметр, и формулы Гильберта для резольвенты, примененной к функции v .

Из теоремы 1 и теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает

Следствие. Для сходимости (2) в равномерной метрике на замыкании области значений оператора \tilde{A} в равномерной метрике необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых значениях $|\alpha|$ выполнялась оценка

$$\|R_\alpha A\|_{C[a,b]} \leq K, \quad (4)$$

где константа K не зависит от α .

2. Пусть в уравнении (1) оператор A имеет вид

$$Au = \int_0^x A(x,t)u(t)dt, \quad (5)$$

где $A(x,t)$ удовлетворяет условиям: $A_x(x,t)$ ($A_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}A(x,t)$), A_{xt} существуют и непрерывны, $A(x,x) = 1$.

Регуляризация уравнения (1) с оператором (5) иным, чем в данной статье, методом и при более жестких предположения о ядре $A(x,t)$ рассматривалась в [7].

Теорема 2. Если в уравнении (1) оператор A имеет вид (5), $R_\alpha = (\alpha E + A)^{-1}$, $\alpha > 0$, то для любой непрерывной функции $u(x)$, удовлетворяющей условию $u(0) = 0$, имеет место сходимость (2) в равномерной метрике.

Схема доказательства:

1) строится интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $y = R_\alpha(A^{-1})u$; 2) резольвента оператора A^{-1} оценивается через резольвенту $R_\lambda(L_0)$, где $L_0 : l_0 y = y'$, $y(0) = 0$; 3) доказываются оценки (3), (4); 4) находится замыкание области значений оператора A в равномерной метрике; 5) применяется теорема 1 и следствие из нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СОАН СССР. 1962. 92 с.
2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
3. Иванов В.К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
4. Худак Ю.И. О регуляризации решений уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6, № 4. С. 766–769.
5. Саадабаев А. Оценка погрешности приближенного решения интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе: ИЛИМ, 1988. № 21. С. 5–15.

6. Хромова Г.В. О некоторых новых возможностях тихоновской регуляризации // Обратные и некорректно поставленные задачи. Тихонов и современная математика: Тез. докл. Междунар. конф. Москва, 19-25 июня 2006 г. М.: МАКС Пресс, 2006. С. 93–94.

7. Хромова Г.В. О регуляризации одного класса интегральных уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45, № 10. С. 1810–1817.

УДК 519.95

П.М. Хрусталева, И.П. Мангушева

ОЦЕНКА ЧИСЛА СПЕКТРОВ АВТОМАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Число автоматов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ в классе (k, m, n) -автоматов, где $\delta : S \times X \rightarrow S$, $\lambda : S \times X \rightarrow Y$, $|S| = k$, $|X| = m$, $|Y| = n$, равно $(nk)^{mk}$. В таком широком классе изучение поведения каждого представителя оказывается нецелесообразным. Для классификации автоматов в работе [1] предложено использовать упорядоченные наборы числовых характеристик, называемые *спектрами*.

В настоящей статье исследуются спектры различимости и спектры достижимости автоматных операторов, рассматриваемые в [1]. Найдены количественные характеристики числа всех спектров для операторов веса r .

Рассмотрим кратко основные результаты [1], на которые опирается статья. Оператор T представляется бесконечным полным m -ветвящимся деревом, ребра которого помечены символами выходного алфавита Y . Последовательности соседних ребер с началом в корне дерева определяют словарное отображение $T : X^* \rightarrow Y^*$, сохраняющее длину и начальные отрезки слов.

Для произвольного оператора T и любого входного слова $p \in X^*$ определяется остаточный оператор T_p оператора T , соответствующий входному слову p :

$$(\forall x \in X^*)(T_p(x) = T(px)).$$

Сам оператор T считается остаточным к пустому слову.

На множестве остаточных операторов определяется отношение k -эквивалентности (\approx^k):

$$T' \approx^k T'' \iff (\forall p \in X^*)(|p| = k \rightarrow T'(p) = T''(p)).$$

Содержательно k -эквивалентным операторам соответствуют полные m -ветвящиеся деревья с одинаковой разметкой ребер на первых k ярусах.

Число $E_T(k)$ классов k -эквивалентности выбирается в качестве элемента последовательности $E_T(0), E_T(1), E_T(2), \dots$, которая называется *спектром различимости оператора T* .

Показано [1], что спектр различимости $E_T(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, является неубывающей функцией параметра k , причем $E_T(0) = 1$, а при $k \geq 1$

$$E_T(k) \leq r = n^{\frac{m(m^k-1)}{m-1}}. \quad (1)$$

Далее, говорят, что слова p_1 и p_2 остаточны неразличимы оператором T (обозначают: $p_1 \approx p_2(T)$), если им соответствуют неразличимые остаточные операторы, т.е. $T_{p_1} \approx T_{p_2}$. В противном случае, слова p_1 и p_2 называют *остаточно различимыми*.

Спектром достижимости $D_T(0), D_T(1), D_T(2), \dots$ оператора T называется функция $D_T(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, равная максимальному числу слов длины не больше чем k , которые попарно остаточны различимы.

Показано [1], что $D_T(k)$ есть неубывающая функция числа k , причем $D_T(0) = 1$, а при $k \geq 1$

$$D_T(k) \leq r = \frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}. \quad (2)$$

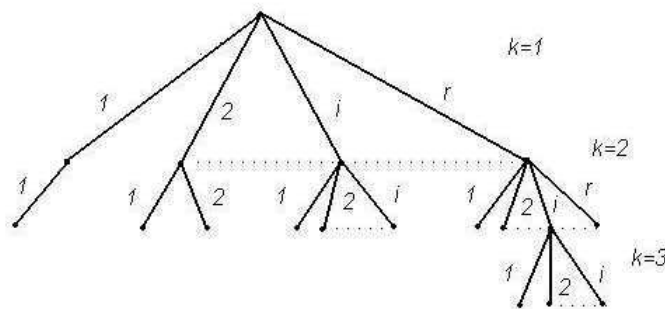
Получением верхних оценок (1), (2) и несколькими примерами спектров конкретных автоматов ограничены исследования, представленные в работе [1].

Тем не менее предлагаемый подход к анализу поведения автоматов и их спектральной классификации имеет большой интерес. Важными являются свойства самих спектров, их классы и мощностные характеристики. Заслуживают внимания вопросы, связанные с классификацией спектров по их начальным отрезкам.

В данной статье получена оценка числа спектров, имеющих различные начальные отрезки длины k , при условии ограничения значений спектров величиной r .

Найдем число $\mu_k^{\leq}(r)$ всех неубывающих последовательностей длины k в алфавите из r символов.

С учетом порядка $1 < 2 < \dots < r$ и того, что $\mu_k^{\leq}(r) = \mu_k^{\geq}(r)$, будем строить дерево для $k = 1, 2, \dots$ невозрастающих последовательностей, оставляя только монотонные продолжения на каждом следующем ярусе (рисунок).



Число $\mu_k^{\geq}(r)$ всех невозрастающих последовательностей длины k в алфавите $\{1, 2, \dots, r\}$ равно числу ребер k -го уровня. Найдем зависимость между числом $\mu_k^{\geq}(r)$ и числом $\mu_{k+1}^{\geq}(r)$.

Лемма. *Справедливы следующие рекурсивные соотношения:*

$$\begin{aligned}\mu_1^{\geq}(r) &= r, \\ \mu_{k+1}^{\geq}(r) &= \sum_{i=1}^r \mu_k^{\geq}(i), \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Доказательство. Первый ярус дерева (см. рисунок) представляет собой все невозрастающие последовательности длины 1. Их число $\mu_1^{\geq}(r) = r$.

Каждая последовательность длины $k + 1$ ($k \geq 1$) получается приписыванием (конкатенацией) к ее первому элементу последовательности длины k . В множестве всех невозрастающих последовательностей первый элемент каждой последовательности является ее максимальным элементом.

Обозначим через $M_k^{\geq}(i)$ множество всех невозрастающих последовательностей длины k в алфавите $\{1, 2, \dots, i\}$. Первым элементом в последовательности длины $k + 1$ в алфавите $\{1, 2, \dots, r\}$ может быть любой из символов $1, 2, \dots, r$. Тогда справедливо

$$M_{k+1}^{\geq}(r) = \{1\}M_k^{\geq}(1) \cup \{2\}M_k^{\geq}(2) \cup \dots \cup \{r\}M_k^{\geq}(r), \quad (3)$$

где $\{i\}M_k^{\geq}(i)$ — конкатенация множеств $\{i\}$ и $M_k^{\geq}(i)$.

Поскольку число элементов в множестве $M_k^{\geq}(i)$ и в множестве $\{i\}M_k^{\geq}(i)$ равно $\mu_k^{\geq}(i)$, то из (3) следует равенство $\mu_{k+1}^{\geq}(r) = \sum_{i=1}^r \mu_k^{\geq}(i)$. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Для любого $1 \leq j \leq i$ справедливо равенство*

$$\mu_{k+1}^{\geq}(j) = \sum_{i=1}^j \mu_k^{\geq}(i).$$

Найдем точную формулу для числа $\mu_k^{\geq}(r)$.

Теорема. *Число всех невозрастающих последовательностей длины k в алфавите из r символов определяется по формуле*

$$\mu_k^{\geq}(r) = \frac{1}{k!} r(r+1) \dots (r+k-1).$$

Доказательство проведем методом индукции по длине k . Для $k = 1$ формула справедлива, $\mu_1^{\geq}(r) = r$.

Предположим, что формула верна для k . Покажем, что она верна для $k' = k + 1$. По лемме имеем

$$\mu_{k'}^{\geq}(r) = \mu_{k+1}^{\geq}(r) = \sum_{i=1}^r \mu_k^{\geq}(i) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{k!} i(i+1) \dots (i+k-1).$$

Используя соотношение из [2, с.139]

$$(k+1) \sum_{i=1}^l i(i+1) \dots (i+k-1) = l(l+1) \dots (l+k),$$

получаем

$$\mu_{k'}^{\geq}(r) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} r(r+1) \dots (r+(k+1)-1) = \frac{1}{k!} r(r+1) \dots (r+k'-1).$$

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Наука, 1986.

УДК 517.984

А.А. Чурикова

О БАЗИСЕ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, РАЗРЫВНЫМ НА ЛОМАННОЙ

В статье рассматривается вопрос о базисе Рисса из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Считаем, что $A(x, t) = 1$ при $\{0 \leq t \leq x, 0 \leq x \leq 1/2\} \cup \{0 \leq t \leq 1/2, 1/2 \leq x \leq 1\} \cup \{1/2 \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}$ и $A(x, t) = 0$ при остальных x и t . При этом предполагаем, что $f(x) \in L_2[0, 1]$.

Таким образом, ядро $A(x, t)$ разрывно на ломаной. Для операторов вида (1) с ядрами, разрывными на произвольных ломаных, в [1] получены теоремы равносходимости. В данной статье устанавливается, что с.п.ф. оператора (1) образуют базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

Теорема 1. Если $y = R_\lambda(A)f = (E - \lambda A)^{-1}Af$ (λ — спектральный параметр), то имеет место

$$v'(x) = \lambda \tilde{D}v(x) + \tilde{D}\tilde{m}(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad (2)$$

$$P_0 v(0) + P_1 v(1/2) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{где } v(x) &= (v_1^T(x), v_2^T(x))^T, \quad v_1(x) = (v_{11}(x), v_{12}(x))^T = (y(x), y(x + \frac{1}{2}))^T, \\ v_2(x) &= (v_{21}(x), v_{22}(x))^T = (y(\frac{1}{2} - x), y(1 - x))^T, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{m}(x) &= (\tilde{m}_1^T(x), \tilde{m}_2^T(x))^T, \quad \tilde{m}_1(x) = (f(x), f(x + \frac{1}{2}))^T, \quad \tilde{m}_2(x) = (f(\frac{1}{2} - x), \\ f(1 - x))^T, \quad P_0 &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обратно, если $v(x)$ удовлетворяет (2), (3), а соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то $R_\lambda(A)f$ существует и $R_\lambda(A) = v_{1k}(x - \frac{k-1}{2})$ при $x \in [\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}]$, $k = 1, 2$.

Лемма 1. При $x \in [0, 1/2]$ все с.п.ф. оператора A равны нулю.

В связи с этим целесообразно считать $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$.

Все дальнейшие рассуждения должны проводиться на $[1/2, 1]$, поэтому для удобства перейдем от $[1/2, 1]$ к $[0, 1]$.

Лемма 2. Если $v(x)$ удовлетворяет (2), (3), $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$, то имеет место

$$w'(x) - \mu D w(x) = m(x), \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

$$S(\Gamma w(1)) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \mu &= (\lambda i)/2, \quad D = \text{diag}(1, -1), \quad w(x) = (w_1(x), w_2(x))^T = \Gamma(v_{12}(\frac{x}{2}), \\ v_{22}(\frac{x}{2}))^T, \quad m(x) &= i D \Gamma^{-1} S(p(x), p(x))^T, \quad S(p(x), p(x))^T = (p(x), p(1 - x))^T, \\ p(x) &= \frac{1}{2} f(\frac{x+1}{2}), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если $y = R_\lambda(A)f$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$, то $R_\lambda(A)f = 0$ при $x \in [0, 1/2]$ и $R_\lambda(A)f = \frac{1}{2}(w_1(2x - 1) + iw_2(2x - 1))$ при $x \in [1/2, 1]$.

Обозначим $\mu_k = (k - 1/2)\pi i$, $k = 1, 2, \dots$, и введем в рассмотрение полуполосу $\Pi = \{\mu : |\text{Re}\mu| \leq h, \text{Im}\mu \geq 0\}$, $h > 0$. Удалим из Π все μ_k вместе с круговыми окрестностями радиуса δ . Получившуюся область обозначим через $\Pi(\delta)$, а через $\Pi_1(\delta)$ — часть $\Pi(\delta)$, когда $\text{Re}\mu \geq 0$.

Тогда если $\mu \in \Pi_1(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи (4)–(5), для компонент которого имеет место представление

$$\begin{aligned}
(w_\mu m)_1 &= \int_x^1 \gamma_1 e^{\mu(x-t)} f\left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \int_0^{1-x} \delta_1 e^{\mu(x+t-1)} f\left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \\
&\quad + w_1(f, \mu) e^{\mu(x-1)}, \\
(w_\mu m)_2 &= \int_0^x \gamma_2 e^{-\mu(x-t)} f\left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \int_{1-x}^1 \delta_2 e^{-\mu(x+t-1)} f\left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \\
&\quad + w_2(f, \mu) e^{-\mu x},
\end{aligned}$$

где $w_i(f, \mu)$ – линейные комбинации с ограниченными по μ коэффициентами интегралов $\int_0^1 \varphi(t) e^{-\mu t} dt$, где $\varphi(t)$ являются следующими функциями: $\theta f\left(\frac{1+t}{2}\right)$ и $\theta f\left(1 - \frac{t}{2}\right)$, θ – произвольное число среди чисел $\gamma_1 = -i/2$, $\gamma_2 = 1/2$, $\delta_1 = 1/2$, $\delta_2 = -i/2$. При $\operatorname{Re} \mu < 0$ имеют место аналогичные формулы.

Обозначим через $\sigma(x, \mu_1, k)$ одну из функций $e^{-(\mu_1+ik)x}$, $e^{(\mu_1+ik)(x-1)}$, через $\omega(x, t, \mu_1, k)$ – одну из функций $\varepsilon(x, t)\theta e^{-(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(t, x)\theta e^{(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(1-x, t)\theta e^{(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(t, 1-x)\theta e^{-(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, где θ те же, что и выше, $\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$ и $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$.

Пусть $A_k f = \int_0^1 \sigma(x, \mu_1, k)\sigma(t, \mu_1, k)\tilde{A}f(t) dt$, где либо $\tilde{A}f = \theta f\left(\frac{1+t}{2}\right)$, либо $\tilde{A}f = \theta f\left(1 - \frac{t}{2}\right)$; $B_k f = \int_0^1 \omega(x, t, \mu_1, k)f\left(\frac{1+t}{2}\right) dt$. Пусть $\mu \in \Pi_1(\delta)$, $\mu = \mu_1 + ik$, μ_1 – принадлежит ограниченной области.

Лемма 4. Если $f(x) \in L_2[0, 1]$, то при больших $|\mu|$ и $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1/2]$ имеет место

$$R_{-2i\mu} f|_{\mu=\mu_1+ik} = \Omega(x, \mu_1, k; f),$$

где $\Omega(x, \mu_1, k; f)$ – конечная сумма с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k f$ и $B_k f$, причем коэффициенты при $B_k f$ не зависят от μ_1 и k .

Обозначим $\tilde{\Gamma} = \{\mu \mid \{|\operatorname{Re} \mu| \leq h, \operatorname{Im} \mu = 0\} \cup \{\operatorname{Re} \mu = h, 0 \leq \operatorname{Im} \mu \leq \pi\} \cup \{|\operatorname{Re} \mu| \leq h, \operatorname{Im} \mu = \pi\} \cup \{\operatorname{Re} \mu = -h, 0 \leq \operatorname{Im} \mu \leq \pi\}$. И рассмотрим $\Gamma_k = \tilde{\Gamma} + k\pi i$, $k = 1, 2, \dots$. Заметим, что внутри каждого Γ_k лежит только одно μ_k вместе с круговой окрестностью радиуса δ и Π представляется в виде объединения Γ_k . Аналогичное построение проводится и для полуполосы $\{\mu : |\operatorname{Re} \mu| \leq h, \operatorname{Im} \mu \leq 0\}$. Построенные контуры также обозначим через Γ_k , $k = -1, -2, \dots$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. Пусть I – любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место равномерная по I оценка

$$\left\| \sum_{k \in I} \int_{\Gamma_k} R_{-2i\mu} f d\mu \right\| \leq c.$$

Лемма 6. Система с.п.ф. оператора A является полной в $L_2[0, 1]$.

Теорема 2. Система с.п.ф. оператора A образует базис Рисса в $L_2[0, 1]$.

Утверждение теоремы 2 следует из лемм 5 и 6 по теореме Банаха – Штейнгауза.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-8570-34).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, №11. С. 115–142.

УДК 517.51

А.В. Шаталина

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть D – ограниченная односвязная область с гладкой границей Γ . AC – множество аналитических в D и непрерывных в \bar{D} функций с равномерной нормой и обычным модулем непрерывности $\omega(f, \delta)$.

Функция $z = \varphi(w)$ однолистно и конформно отображает внешность единичного круга $|W| > 1$ на дополнение области D до расширенной плоскости так, что бесконечно удаленные точки переходят друг в друга, причем $\varphi'(\infty) > 0$. $M = \{z_{k,n}\}$ – матрица узлов интерполирования, $M \in \Gamma$, $k = 0, 1, \dots, n-1$; $n = 1, 2, \dots$

Определение. Матрица будет называться правильной, если узлы $z_{k,n}$ любой n -й строки при отображении $W_{k,n} = \varphi^{-1}(z_{k,n})$ переходят в вершины правильного n -угольника, вписанного в единичный круг.

Назовем функцию $\omega(\delta)$ мажорантой модуля непрерывности, если $\omega(\delta)$ – непрерывная, полуаддитивная и неубывающая на $[0, \infty)$, причем $\omega(0) = 0$. Множество таких функций обозначим через Ω . Для каждой фиксированной $\omega(\delta) \in \Omega$ построим классы функций:

$$AC(\omega) = \{f(z); f(z) \in AC, \omega(f, \delta) = \underline{O}\{\omega(\delta)\}\};$$

$$AC^*(\omega) = \{f(z); f(z) \in AC, \omega(f, \delta) = \bar{o}\{\omega(\delta)\}\}.$$

Пусть $\{L_n(M, f, z)\}$ – последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих функцию $f(z)$ в узлах $z_{k,n}$.

При изучении аппроксимативных свойств процесса Лагранжа в случае единичного круга для функций из классов, заданных мажорантой модулей непрерывности, ранее были найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости последовательностей полиномов к функции в

замкнутом круге [1, 2]. Можно ли перенести полученные результаты на произвольные области, не забывая, что при этом придется учитывать их «вид»?

В качестве D рассматриваются области, границы которых удовлетворяют некоторому условию гладкости.

Определение 1. D удовлетворяет условию Келлога – Альпера, $D \in (K-A)$, если угол $\theta(s)$, образованный касательной к границе Γ с вещественной осью, как функция длины дуги S на Γ имеет модуль непрерывности $\omega(\theta, h)$, удовлетворяющий условию

$$\int_0^C \frac{\omega(\theta, h)}{h} |\ln h| dh < \infty.$$

Для правильных матриц с ограничением на распределение узлов найдена метрическая характеристика множества точек расходимости $\{L_n(M, f, z)\}$.

Определение 2. Матрица M удовлетворяет условию (B_m) , $M \in (B_m)$, если для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$ существуют числа $q = q(\varepsilon)$, для которых можно указать последовательность номеров n_j такую, что для любого натурального μ существует натуральное ν , для которых

$$\varepsilon \sum_{i=\mu}^{\nu} n_j \geq 2\pi, \quad n_\nu \leq n_\mu^q,$$

и все узлы z_{k,n_j}, z_{s,n_i} , $\mu \leq i \neq j \leq \nu$, расстояние между образами которых $W_{k,n_j} = \varphi_{-1}(z_{k,n_j})$, $W_{s,n_i} = \varphi_{-1}(z_{s,n_i})$ меньше n_μ^{-2q} , принадлежат множеству B_m , содержащему не более t дуг границы Γ , длина каждой из которых меньше $2n_\mu^{-2q}$.

Примерами таких матриц могут служить образы корней n -й степени из любого комплексного числа.

Теорема 1. Пусть $M \in D$ – правильная матрица узлов интерполирования и область $D \in (K-A)$. Если для $\omega \in \Omega$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega \left\{ \frac{1}{n} \right\} \cdot \ln n = 0,$$

то для любой функции $f \in AC(\omega, D)$ последовательность $\{L_n(M, f, z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ в \bar{D} .

Если же для $\omega \in \Omega$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega \left\{ \frac{1}{n} \right\} \cdot \ln n < \infty,$$

то для любой функции $f \in AC^*(\omega, \bar{D})$ последовательность $\{L_n(M, f, z)\}$ равномерно сходится к $f(z)$ в \bar{D} .

Теорема 2. Пусть $M \in \Gamma$ – правильная матрица, $M \in (B_m)$. Область $D \in (K - A)$. Если для $\omega(\delta) \in \Omega$ выполняется

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0,$$

тогда существует $f(z) \in AC(\omega)$ такая, что интерполяционный процесс Лагранжа для этой функции расходится почти всюду на Γ . Если для $\omega(\delta) \in \Omega$ выполняется

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \infty,$$

тогда существует $f(z) \in AC^*(\omega)$ такая, что процесс Лагранжа для этой функции неограниченно расходится почти всюду на Γ .

Как уже отмечалось, сформулированные выше результаты были ранее получены для круга [2]. В основе доказательства лежат следующие идеи: строится некоторое вспомогательное множество E_μ , состоящее из конечного числа непересекающихся дуг единичной окружности, которые набираются по определенному правилу и длина которых не должна быть меньше некоторого числа. Это множество покрывает единичную окружность за исключением «вырезанных» участков. На нем находятся оценки для функций Лебега, зависящие от того, какую часть окружности «вырезали». За конечное число шагов, равное числу набранных дуг, строится вспомогательная функция f_μ такая, что процесс Лагранжа для нее расходится на данном множестве, при этом используются полученные оценки функций Лебега.

Следует отметить, что E_μ и f_μ связаны с определенной пачкой строк матрицы M . Именно расположение узлов на единичной окружности по отношению друг к другу в этой пачке позволило получить нужный результат.

Таким образом, для того чтобы перейти с круга на область с сохранением всех необходимых свойств у множества E_μ и функции f_μ , требуется некоторая «пропорциональность», т.е. отношение расстояний между точками на окружности и их образами на Γ должны быть ограничены и сверху и снизу. Именно этим свойством обладают области Келлога – Альпера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 07-01-00167).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
2. Шаталина А. В. Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности. Саратов, 1990. 30 с. Деп. в ВИНТИ 19.07.90, № 4060-В90.

В.А. Юрко

О ПУЧКАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

В статье исследуется обратная задача спектрального анализа для пучков дифференциальных операторов, заданных на пространственных сетях (геометрических графах). Применяемый метод позволяет решать обратные задачи для широкого класса графов. Так как различные классы графов требуют различной техники, то для упрощения выкладок мы ограничимся дифференциальными уравнениями на деревьях (т.е. на графах без циклов).

Рассмотрим компактное связное дерево T в \mathbf{R}^m с корнем v_0 , множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется *граничной*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b ; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T . Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то мы будем называть v его *начальной точкой*, w – его *конечной точкой*, и будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w . Для каждой внутренней вершины v обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v . Для любой $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется *порядком* v . Для $e \in \mathcal{E}$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется *высотой дерева* T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ и пусть $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$ – множество ребер порядка μ .

Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in \mathcal{E}$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т.е. $x = 0$ соответствует конечной точке w , а $x = 1$ соответствует начальной точке v . Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а $v_j, j > p + 1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j \in J}$, $x \in [0, 1]$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j . Пусть $q(x) = [q_j(x)]_{j \in J}$ и $p(x) = [p_j(x)]_{j \in J}$ – комплекснозначные функции на T такие, что $p_j(x) \in AC[0, 1]$, $q_j(x) \in L[0, 1]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T :

$$y_j''(x) + (\rho^2 + i\rho p_j(x) + q_j(x))y_j(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $j \in J$, ρ – спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k , $k = \overline{p+1, r}$:

$$\left. \begin{aligned} y_k(0) &= a_{kj}y_j(1) \quad \text{для всех } e_j \in R(v_k), \\ y_k'(0) &= \sum_{e_j \in R(v_k)} \left(a_{kj}^1 y_j'(1) + a_{kj}^0 y_j(1) \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где a_{kj} , a_{kj}^0 , a_{kj}^1 – комплексные числа, причем $a_{kj}a_{kj}^1 \neq 0$. Предположим, что

$$r_k := \sum_{e_j \in R(v_k)} \frac{a_{kj}^1}{a_{kj}} \neq -1, \quad k = \overline{p+1, r}. \quad (3)$$

Условие (3) называется условием *регулярности склейки*. Дифференциальные операторы на T , которые не удовлетворяют условию регулярности склейки, обладают качественно другими свойствами при исследовании обратной задачи и в данной статье не рассматриваются. Отметим, что если $a_{kj} = a_{kj}^1 = 1$, $a_{kj}^0 = 0$ при всех k, j , то условия (2) называются *стандартными*. Для стандартных условий склейки условие (3) выполняется автоматически. Ясно, что в (2) мы имеем $2r - p - 1$ условий. Для того чтобы определить краевую задачу для (1), нам нужно дополнительно задать $p + 1$ условий в граничных вершинах v_j , $j = \overline{0, p}$. Для этого введем следующие линейные формы в граничных вершинах $v_j \in \Gamma$:

$$U_j(Y) := (Y' + (i\rho h_{j1} + h_{j0})Y)|_{v_j}, \quad j = \overline{0, p},$$

где h_{js} – комплексные числа, $h_{j1} \neq \pm 1$. Другими словами,

$$U_j(Y) = y_j'(0) + (i\rho h_{j1} + h_{j0})y_j(0), \quad j = \overline{1, p},$$

$$U_0(Y) = y_{p+1}'(1) + (i\rho h_{01} + h_{00})y_{p+1}(1).$$

Обозначим через L_0 краевую задачу для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{0, p}.$$

Кроме того, рассмотрим краевые задачи L_k , $k = \overline{1, p}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $Y|_{v_k} = 0$, $U_j(Y) = 0$, $j = \overline{0, p} \setminus k$. Пусть $\Lambda_k := \{\rho_{lk}\}_{l \in \mathbf{Z}}$ – спектр задачи L_k , $k = \overline{0, p}$, причем собственные значения $\{\rho_{lk}\}$ считаются с учетом кратностей. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданным спектрам Λ_k , $k = \overline{0, p}$, построить $q = [q_j]_{j \in J}$, $p = [p_j]_{j \in J}$ и $h = [h_{js}]_{j=\overline{0, p}, s=0,1}$.

Если $r = 1$ (т.е. дерево T является отрезком $[0, 1]$), то $p = 1$, и обратная задача 1 совпадает с классической обратной задачей восстановления пучка по двум спектрам [1].

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с L_k рассмотрим краевые задачи \tilde{L}_k того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q} = [\tilde{q}_j]_{j \in J}$, $\tilde{p} = [\tilde{p}_j]_{j \in J}$ и $\tilde{h} = [\tilde{h}_{js}]_{j=\overline{0, p}, s=0,1}$. Пусть $\tilde{\Lambda}_k$ – спектр задачи \tilde{L}_k .

Теорема 1. Если $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, p}$, то $q_j(x) = \tilde{q}_j(x)$, $p_j(x) = \tilde{p}_j(x)$ и $h_{js} = \tilde{h}_{js}$, $j \in J$, $s = 0, 1$, $x \in [0, 1]$. Таким образом, задание $p + 1$ -го спектра задач Λ_k , $k = \overline{0, p}$, однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения и линейных форм.

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 1. При этом используются и развиваются идеи метода спектральных отображений [1, 2]. Кроме того, используется техника работ [3, 4], в которых исследовалась обратная задача для операторов Штурма – Лиувилля на деревьях. Отметим также книгу [5], в которой приведен достаточно полный обзор результатов по краевым задачам для дифференциальных уравнений на пространственных сетях.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Yurko V.A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2006.
3. Yurko V.A. Inverse spectral problems for Sturm – Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
4. Юрко В.А. О восстановлении операторов Штурма – Лиувилля на графах // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 4. С. 619–630.
5. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.

Э.В. Антоненко, Н.С. Хлопцева

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Первые попытки отыскания оптимальной формы сжатых осевыми силами колонн принадлежат Ж.Л. Лагранжу. Для нахождения максимальной осевой критической силы P_* колонны сплошного кругового поперечного сечения при ее минимальном объеме V он ввел величину P_*/V^2 , назвав ее эффективностью. До настоящего времени решение такой задачи в общем виде отсутствует [1–4].

Снижение материалоемкости, характеризующееся отношением критической силы к массе стержня стало актуальным в период развития авио- и ракетостроения. Результаты расчета устойчивости стержней переменного сечения, связанные с этой проблемой, нашли отражение в справочной литературе [5]. Однако рекомендаций по выбору эффективной формы стержней обнаружить не удалось.

Предлагаются решения задачи устойчивости стержня переменного по длине поперечного сечения с учетом его массы и рекомендации по выбору закона изменения поперечного сечения.

Критические силы потери устойчивости геометрически неоднородных стержней определялись методом Рэлея:

$$P_* = \frac{\int_0^l D(x)[w''(x)]^2 dx}{\int_0^l [w'(x)]^2 dx}, \quad (1)$$

где $D(x) = EI(x)$ — изгибная жесткость, $w(x)$ — функция прогиба оси стержня, l — его длина, x — осевая координата.

Рассматривались стержни сплошного кругового сечения ($I = \pi R^4/4$) с переменным по длине радиусом $R(x)$ и кольцевого поперечного сечения ($I =$

$= \pi R^3 \delta(x)$) с радиусом средней поверхности R и переменной вдоль оси стержня толщиной $\delta(x)$. Определялась их масса m и эффективность

$$\bar{P} = \frac{P_*}{m}.$$

Эффективность неоднородного \bar{P}_*^H сравнивалась с эффективностью однородного стержня \bar{P}_*^o . При одинаковой массе неоднородного и однородного стержней весовая выгода оценивалась показателем

$$\gamma = \frac{P_*^H}{P_*^o}.$$

При $\gamma > 1$ неоднородный стержень «выгоднее» однородного. По показателю γ и заданной величине требуемой критической силы можно оценить массу стержня (колонны).

Расчеты проводились для трех граничных условий: 1 — шарнирное опирание, 2 — защемление и 3 — консольное закрепление. Функции прогиба соответственно задавались в виде

$$w_1(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_2(x) = A \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad w_3(x) = A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

При расчете критических сил и массы однородных стержней, равных по массе неоднородным той же длины, вводилось понятие среднего радиуса R_{cp} и средней толщины δ_{cp} , обеспечивающих изгибную жесткость D_{cp} .

Формулы для P_* , полученные из (1), представлялись в виде известных формул для соответствующих граничных условий с поправочным коэффициентом k [4]. Например, для кольцевого составного, шарнирно закрепленного стержня

$$P_*^o = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D_c, \quad P_*^H = P_*^o k, \quad k = N + \bar{\delta}^3(1 - N), \quad N = \bar{l} - \frac{\sin 2\pi \bar{l}}{2\pi},$$

$$\gamma = k[\bar{l} + \bar{\delta}(1 - \bar{l})]^{-3}, \quad \bar{l} = l_1/l, \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1.$$

Рассматривались несколько законов изменения $R(x)$ и $\delta(x)$ (таблица).

Для сплошного сечения	Для кольцевого сечения
I. Составной стержень $R(x) = \begin{cases} R_1, & 0 \leq x \leq l_1, \\ R_2, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases}$ $R_{cp} = R_1 \sqrt{\bar{l} + \bar{R}^2(1 - \bar{l})},$ $\bar{R} = R_2/R_1, \quad \bar{l} = l_1/l$	I. Составной стержень $\delta(x) = \begin{cases} \delta_1, & 0 \leq x \leq l_1, \\ \delta_2, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases}$ $\delta_{cp} = \delta_1[\bar{l} + \bar{\delta}(1 - \bar{l})], \quad \bar{\delta} = \delta_2/\delta_1, \quad \bar{l} = l_1/l$
II. $R(x) = R_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right),$ $R_{cp} = R_0 \sqrt{1 + \frac{4}{\pi} a + \frac{1}{2} a^2}$	II. $\delta(x) = \delta_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right),$ $\delta_{cp} = \delta_0 \left(1 + \frac{2}{\pi} a\right)$
III. $R(x) = R_0(1 + ax),$ $R_{cp} = R_0 \sqrt{1 + al + \frac{1}{3}(al)^2}$	III. $\delta(x) =$ $\begin{cases} \delta_0 \left(1 + \frac{2x}{l}\right), & 0 \leq x \leq l/2, \\ \delta_0 \left(3 - \frac{2x}{l}\right), & l/2 \leq x < l, \end{cases}$ $\delta_{cp} = 1,5\delta_0$

Вычислительный эксперимент показал высокую эффективность для консольного составного сплошного сечения (рис. 1), трубчатого стержня с переменной толщиной (рис. 2), где $\delta(x) = \delta_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right)$, и стержня с переменным радиусом (рис. 3), где $R = R_0 \left(1 + a \sin \frac{\pi x}{l}\right)$. Меньшая эффективность оказалась для стержня сплошного сечения, когда $R(x) = R_0(1 + ax)$ (рис. 4), где $\bar{l} = al$.

Цифры около кривых (1, 2, 3) указывают схему закреплений.

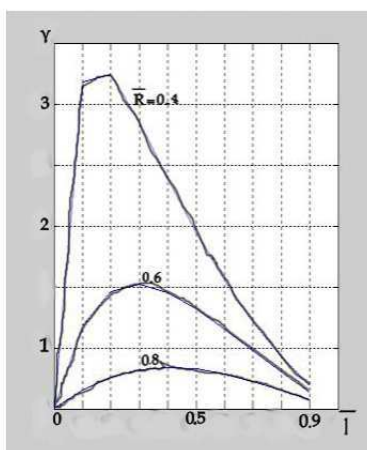


Рис. 1

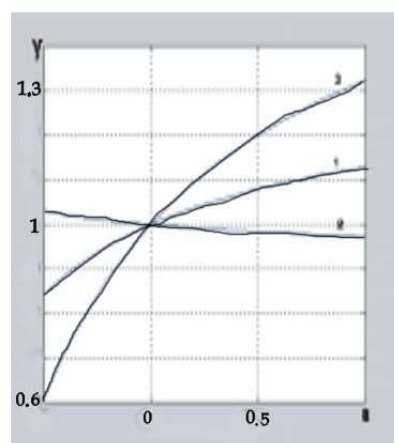


Рис. 2

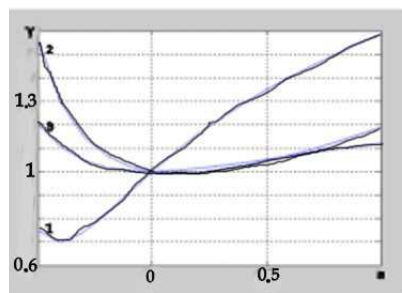


Рис. 3

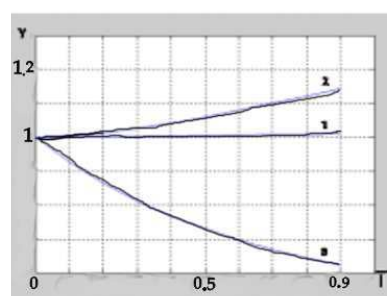


Рис. 4

Авторы располагают аналитическими выражениями и графическими зависимостями \bar{P} и γ для перечисленных ситуаций (I, II, III).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сейранян А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Успехи механики. 2003. № 2. С. 45–96.
2. Egorov Y.V. On the Lagrange problem about the strongest column // Rapport Interne 02–16. Universite Paul Sabatier, Toulouse. 2002. P. 1–7.
3. Kanno Y., Ohsaki M. Necessary and sufficient conditions for global optimality of eigenvalue optimization problems // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001. V. 22. P. 248–252.
4. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Устойчивость неоднородных элементов оболочечных конструкций // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 39–42.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник: В 3 т. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.

В.Г. Бирюков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ МАХОВИКОВ

Рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат управления угловым движением сферически симметричного космического аппарата с помощью вращающихся маховиков. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина построено аналитическое решение задачи в классе плоских эйлеровых разворотов для случая нулевого вектора кинетического момента.

1. Постановка задачи. Рассмотрим сферически симметричный космический аппарат (КА), исполнительными органами системы ориентации которого являются управляющие маховики. Будем полагать, что оси вращения маховиков параллельны главным осям инерции КА и моменты внешних сил пренебрежимо малы. Предположим также, что вектор кинетического момента механической системы, состоящей из корпуса КА и управляющих маховиков, равен нулю (такой случай возможен, например, если начальные угловые скорости КА и управляющих маховиков равны нулю). Угловое движение КА с учетом сделанных предположений будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (J - J_M)\dot{\omega}_1 = -u_1 - aJ\omega_1, \\ (J - J_M)\dot{\omega}_2 = -u_2 - aJ\omega_2, \\ (J - J_M)\dot{\omega}_3 = -u_3 - aJ\omega_3, \end{cases} \quad (1)$$

$$2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \quad (2)$$

где J, J_M — осевые моменты инерции КА и маховиков, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора абсолютной угловой скорости КА на оси жестко связанной с КА системы координат, $a = \text{const}$ — коэффициент, характеризующий моменты сил сопротивления, возникающих при вращении маховиков, u_1, u_2, u_3 — моменты сил, прикладываемых к маховикам (управляющие воздействия), $\bar{\lambda}$ — кватернион ориентации КА.

Требуется построить управления u_1, u_2, u_3 , переводящие КА, движение которого описывается уравнениями (1), (2), из начального состояния

$$\bar{\lambda}(0) = \bar{\lambda}^0, \quad \bar{\omega}(0) = \bar{\omega}^0 \quad (3)$$

в конечное состояние

$$\bar{\lambda}(T) = \bar{\lambda}^T, \quad \bar{\omega}(T) = \bar{\omega}^T \quad (4)$$

и доставляющие минимум функционалу

$$I = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) dt,$$

который характеризует общие энергетические затраты на управление.

Управления u_1, u_2, u_3 будем считать неограниченными, а время переориентации T — известным.

2. Метод решения задачи. Для решения поставленной задачи использовался принцип максимума Л.С. Понтрягина. Составлялась функция Гамильтона – Понтрягина и система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных. Из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина были найдены оптимальные управления в виде функции сопряженных переменных.

В результате решение задачи оптимального управления угловым движением сферически симметричного КА сведено к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных:

$$\begin{cases} (J - J_M)\dot{\bar{\omega}} = \frac{1}{2}\bar{\Phi} - aJ\bar{\omega}, \\ (J - J_M)\dot{\bar{\Phi}} = aJ\bar{\Phi} + \frac{1}{2}\bar{p}, \\ \dot{\bar{p}} = \bar{p} \times \bar{\omega}, \\ 2\dot{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} \circ \bar{\omega}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\bar{\Phi}$ — вектор сопряженных переменных, соответствующих переменным $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, вектор \bar{p} — вводится также как и в работе [1]. Граничными условиями для системы дифференциальных уравнений (5) являются соотношения (3), (4).

Следует отметить, что система дифференциальных уравнений (5) допускает векторный первый интеграл

$$2(J - J_M)\bar{\omega} \times \bar{\Phi} + \bar{p} = \text{const.}$$

3. Решение задачи для частного случая. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений (5) не удастся, поэтому, следуя работам [1, 2], укажем одно частное решение. Пусть вектор $\bar{\omega}$ параллелен вектору \bar{p} . Из третьего уравнения системы (5) получаем $\bar{p} = \bar{p}^0 = \text{const}$. Следовательно, в этом случае вектор абсолютной угловой скорости КА будет иметь постоянное направление.

Решения первого и второго уравнений (5) в этом случае имеют вид

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^0 e^{-kt} + \frac{1}{8a^2 J^2} [e^{-kt} + e^{kt} - 2] \bar{p}^0 + \frac{1}{4aJ} [e^{kt} + e^{-kt}] \bar{\Phi}^0, \quad (6)$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}^0 \exp(kt) + \frac{1}{2aJ} [\exp(kt) - 1] \bar{p}^0, \quad (7)$$

где $k = (aJ)/(J - J_M)$.

Так как вектор абсолютной угловой скорости КА должен сохранять постоянное направление, то из соотношений (6) и (7) следует, что вектор $\bar{\Phi}^0$ должен быть параллелен вектору \bar{p}^0 .

Общее решение кватернионного кинематического уравнения (2) в случае постоянного по направлению вектора абсолютной угловой скорости имеет вид

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}^0 \circ \exp\left(\frac{1}{2}\bar{q} \int_0^t |\bar{\omega}| dt\right), \quad (8)$$

где $\bar{q} = \bar{\omega}/|\bar{\omega}|$, $|\bar{\omega}|$ — модуль вектора абсолютной угловой скорости $\bar{\omega}$.

Постоянные $|\bar{p}^0|$ и $|\bar{\Phi}^0|$ могут быть определены с помощью соотношений (6)–(8) и граничных условий (3), (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Молоденков А.В. Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления: Сб. науч. тр. Пермь, 1995. С. 122–131.

УДК 539.3

М.И. Брюшко

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ОБРАЗУЮЩЕЙ НА НДС И ТЕПЛОВОЕ ПОЛЕ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ИЗГИБЕ

В работе [1] рассмотрена методика и проведены расчеты по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) теплового поля короткой тонкостенной изотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, испытывающей малые деформации под действием распределенной по поверхности поперечной нагрузки. Считается, что свойства материала оболочки зависят от температуры.

В данной статье был проведен анализ зависимости характеристик НДС и температуры от длины образующей при заданных условиях нагружения, закрепления и теплообмена. Для числовых расчетов геометрические размеры

оболочки принимались следующими: $h = 0,02$ м, $R = 1$ м, длина менялась от 2,5 до 10 м с шагом 2,5 м; компоненты интенсивности нагрузки приняты следующими: $q_1(\alpha) = q_0$, $q_2(\alpha) = 0$, а значение температуры T_0 и амплитуды интенсивности q_0 варьировались.

Края оболочки рассматривались как жестко закрепленные.

Результаты расчетов для оболочки длиной 2,5 м приведены на рис.1,2.

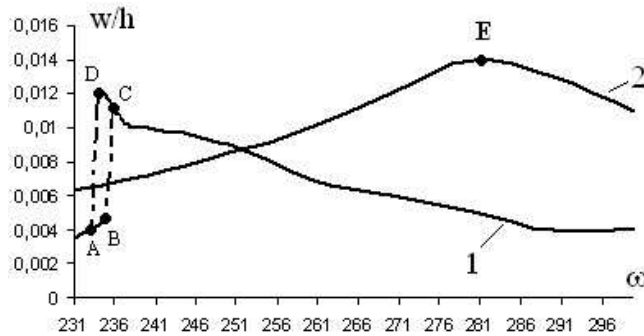


Рис. 1

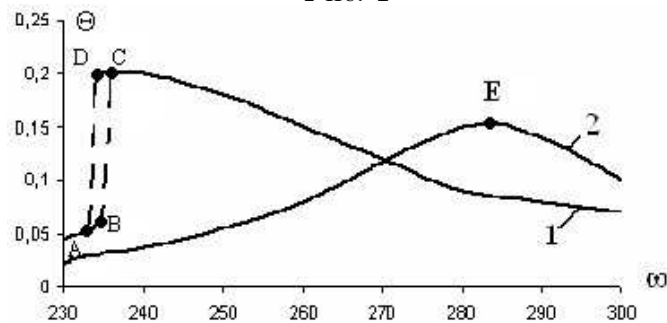


Рис. 2

На них изображены графики зависимости наибольших значений безразмерной амплитуды прогиба $\frac{w}{h}$ и безразмерной температуры Θ от частоты внешнего возбуждения. На рис. 1 кривая 1 получена при значениях $T_0 = -20^0$ С и $q_0 = 4750 \frac{\text{Н}^2}{\text{М}}$, а кривая 2 показывает соответствующие изменения для случая, когда свойства материала от температуры не зависят, при этом для рис. 1 $q_0 = 500 \frac{\text{Н}^2}{\text{М}}$, а для рис. 2 $q_0 = 4750 \frac{\text{Н}^2}{\text{М}}$. Сравнивая полученные кривые, легко заметить, что, как и для короткой оболочки ($L = 1$ м), учет связности механических и тепловых полей существенно влияет на зависимость амплитуд характеристик НДС и температуры саморазогрева от частоты внешнего возбуждения. Так, при увеличении частоты изменение величин идет по участкам АВСЕ, а при уменьшении ω – по участкам ЕСДА. Переход из точек В, D в точки С, А соответственно осуществляется скачкообразно.

Подобная картина наблюдается и для оболочек других длин.

Отметим, что значения q_0 подбирались таким образом, чтобы переход от низкотемпературной к высокотемпературной ветви осуществлялся скачкообразно. Для амплитуды менее указанной зависимость характеристик НДС

и температуры саморазогрева подобна зависимостям, представленным на графиках кривой 2. Влияние длины оболочки на амплитуду интенсивности внешней нагрузки, при которой осуществляется скачкообразный характер поведения значений температурно-механических параметров, представлена на рис. 3.

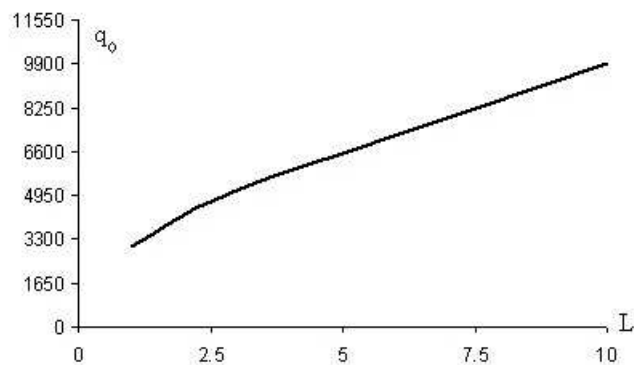


Рис. 3

Как видно из рис. 3, зависимость q_0 от L близка к линейной.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барышев А.А., Брюшко М.И., Мыльцина О.А. Вибрационный изгиб вязкоупругой цилиндрической оболочки с учетом связности теплового и механического полей // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 171–174.

УДК 550.34.13

В.В. Гурьянов, В.М. Гурьянов

СОЛИТОНЫ В ФЛЮИДНО-НАСЫЩЕННЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

Тектонические процессы в земной коре приводят к землетрясениям, в результате которых происходят разломы земной коры и ее постоянное, очень медленное движение, при этом образуются зоны дилатансии горных пород и глубинные зоны деструкции за счет флюидо-электро-геохимических преобразований минералов с постоянным движением жидкости и газа. В таких зонах могут накапливаться углеводороды, и они становятся флюидо-насыщенными резервуарами (коллекторами).

Существенную роль при этом играют изменения давления жидкости в образующихся порах (трещинах, кавернах) и температура [1]. Эти изменения вызывают неупругость среды, обусловленную релаксацией давления [2].

Основопологающая теория Био (М.А. Biot) взаимодействия деформационно-диффузионных процессов в насыщенных жидкостью упругих телах с ее обзором, обобщением и применением теории к моделям разрушения горных пород описана в работе [3].

Процессы образования флюидо-насыщенного резервуара во времени очень медленные и для математического моделирования механики этих процессов используется шаровой тензор напряжений (давление).

При изучении образующихся в результате кратковременного волнового воздействия на флюидо-насыщенный резервуар волновых явлений можно считать процесс формирования резервуара стационарным по отношению к волновому процессу в силу их различных временных масштабов.

При сделанных допущениях резервуар представляется неупругой диссипативно-дисперсной сплошной средой и при изучении сейсмических волн методом математического моделирования используются только девиаторы тензоров напряжений и деформаций. Это связано с тем, что квадраты интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига пропорциональны вторым инвариантам соответствующих девиаторов, что и отражает доминирование касательных напряжений и деформаций сдвига. Диссипативно-дисперсные среды принято называть вязкоупругими [2].

Простейшая математическая модель процесса распространения плоских сейсмических волн в вязкоупругой среде в дисперсном состоянии, представляющем собой флюидо-насыщенные резервуары, описывается дифференциальным уравнением [4]:

$$u_{tt} - v_p^2 u_{xx} = \frac{4}{3} v_s^2 (\tau_1 u_{xxt} + \tau_2^2 u_{xxtt}). \quad (1)$$

В уравнении (1) $u = u(x, t)$ – смещение, x – длина, t – время, v_p , v_s – скорости продольных и поперечных волн в упругом скелете среды, τ_1 , τ_2 – параметры степени вязкости и дисперсности среды, нижние индексы x , t у функции u обозначают ее дифференцирование по x и t .

Для введения в уравнение (1) степенной нелинейности добавим в его правую часть член $\theta u_x^n u_{xx}$, в котором θ – реологическая константа, n – параметр нелинейности. Для более компактного описания введем обозначения:

$$\alpha = \frac{4}{3} v_s^2 \tau_1, \quad \beta^2 = \frac{4}{3} v_s^2 \tau_2. \quad (2)$$

Получаем нелинейное дифференциальное уравнение с совместным действием нелинейных, диссипативных и дисперсионных членов в правой части уравнения, т.е.

$$u_{tt} - v_p^2 u_{xx} = \theta u_x^n u_{xx} + \alpha u_{xxt} + \beta^2 u_{xxtt}. \quad (3)$$

Коэффициенты θ , α , β^2 независимы и могут принимать нулевые значения, определяя тем самым различные среды.

Для получения низкочастотной (длинноволновой) асимптотики волн, описываемых уравнением (3), введем безразмерный малый параметр ϵ и параметры a , b , c^2 такие, чтобы

$$\theta = \epsilon a, \quad \alpha = \epsilon b, \quad \beta^2 = \epsilon c^2. \quad (4)$$

При таком определении малого параметра ϵ независимо от него, за счет возможной малости (вплоть до нуля) величин a , b , c могут быть малыми реологические константы θ , α , β .

Дифференциальное уравнение (3) принимает удобный для его исследования известным методом возмущений (методом малого параметра ϵ) [5] вид:

$$u_{tt} - v_p^2 u_{xx} = \epsilon (a u_x^n + b u_{xxt} + c^2 u_{xxtt}). \quad (5)$$

Начальный профиль волн распадается на компоненты, бегущие вдоль оси Ox вправо и влево, каждая из которых распространялась бы без возмущений ($\epsilon = 0$), если бы не совместное действие нелинейного, диссипативного и дисперсионного членов в порядке их следования в правой части (5). Для изучения их эволюции ищется решение в виде [2]:

$$u(x, t) = f(\xi, T) + \epsilon u^{(1)}(x, t) + \dots, \quad (6)$$

где $\xi = x - v_p t$, $T = \epsilon t$. Функция $f(\xi, T)$ описывает эволюцию начального профиля на больших расстояниях и временах порядка $\frac{1}{\epsilon}$. Уравнение (5) для приближения $u^{(1)}$ в соответствие с (6) принимает вид

$$u_{tt}^{(1)} - v_p^2 u_{xx}^{(1)} = 2v_p f_{\xi T} + a f_{\xi}^n f_{\xi\xi} - b v_p f_{\xi\xi\xi} + c^2 v_p^2 f_{\xi\xi\xi\xi}. \quad (7)$$

Решение $u^{(1)}$ будет линейно расти по переменной $\xi^{-1} = x + v_p t$, и асимптотический ряд (6) станет неоднородным на больших временах, если только зависимость f от T не выбрана так, чтобы обратить правую часть уравнения (7) в нуль. Полагая $f_q = q$, получаем уравнение Бюргерса–Кортевега де Фриза для q .

$$v_p^2 q_T + a q^n q_{\xi} - b v_p q_{\xi\xi} + c^2 v_p^2 q_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (8)$$

При $a = 0$ уравнение (3) становится линейным уравнением (1), на основе которого были изучены волны в окрестности контакта упругих и флюидонасыщенных сред [4].

В зависимости от значений параметров n , c , b получаются дифференциальные уравнения: $n = 1$, $c = 0$ – Бюргерса для диссипативных сред, $c = 1$, $b = 0$ – Кортевега де Фриза (КдФ) порядка n для сред в дисперсном состоянии, а при $n = 1$ – классическое уравнение КдФ.

Теория таких нелинейных дифференциальных уравнений настолько хорошо развита, что есть монография учебного типа с примерами и методами аналитических и численных решений [6], поэтому в данной статье не имеет смысла останавливаться на каких-либо иллюстрациях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федоров Д.Л. Нефть и газ как продукт взаимодействия геосфер // Недра Поволжья и Прикаспия: Региональный науч.-техн. журн. 2001. Вып. 27. С. 3–7.
2. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432с.
3. Райс Дж. Механика очага землетрясения. М.: Мир, 1982. 202 с.
4. Гурьянов В.В., Гурьянов В.М., Левянт В.Б. Особенности распространения сейсмических волн в коллекторах, влияющие на их выявление и дифференциацию // Математические методы в геофизике: Тр. Междунар. конф. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2003. С. 93.
5. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 326с.
6. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббсон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694с.

УДК 539.3

Д.В. Иванов, Е.Л. Коссович

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ АРТЕРИЙ ЧЕЛОВЕКА С ПАТОЛОГИЧЕСКИМИ ИЗВИТОСТЯМИ

Данная статья посвящена исследованию патологических извитостей сонных артерий [1] и включает медицинскую и математическую постановку, численное моделирование и решение смешанной задачи теории упругости и гидродинамики о потоке крови через патологически извитые сонные и позвоночные артерии методом конечных элементов [2], а также анализ результатов.

Постановка задачи

Одним из наиболее малоизученных и загадочных заболеваний сонных и позвоночных артерий является патологическая извитость (кинкинг). У каждого третьего умершего от инсульта находили патологические изгибы сонных или позвоночных артерий. У 16-26 % взрослого населения выявляются различные варианты удлинения и извитости сонных или позвоночных артерий на шее [3].

Причина извитостей чаще всего врожденная, но нередко удлинение артерии развивается при гипертонической болезни. Долгое время извитость может не давать никакой симптоматики, но в какой-то момент у пациента начинаются приходящие нарушения мозгового кровообращения.

Различают три вида извитостей: изгиб, перегиб и петля.

Наиболее опасными видами являются перегиб и петля. В области максимального изгиба возникает хаотичный характер кровотока, что приводит к снижению давления крови ниже перегиба и соответственно к снижению кровотока по мозговым артериям [4].

Перейдем к математической постановке задачи.

Кровь предполагается однородной, несжимаемой и ньютоновской жидкостью. Ее движение описывается следующей системой уравнений:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \nabla \cdot [-pI + \eta (\nabla \vec{u}_1 + (\nabla \vec{u}_1)^T)] + \rho_1 (\vec{u}_1 \cdot \nabla) \vec{u}_1 = 0,$$

$$-\nabla \vec{u}_1 = 0,$$

где ρ_1 – плотность жидкости, u_1 – вектор скорости крови, p – давление крови, I – единичная матрица, η – динамический коэффициент вязкости жидкости.

Материал стенок предполагается однородным, изотропным и идеально-упругим. Движение стенки в нестационарном случае описано вторым законом Ньютона в виде [5]:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - c \nabla \cdot \nabla \vec{u} = \vec{F},$$

где \vec{F} – вектор внешних сил, c – константа, ρ_2 – плотность стенки. Учитывая, что деформации стенки вследствие действия на нее крови могут быть большими, используется тензор Грина для записи деформаций стенки, которые имеет вид

$$\frac{\gamma_{ij}}{2} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Для моделирования совместной задачи теории упругости и гидромеханики использовался совместный подход Лагранжа – Эйлера (ALE) для описания движения сплошной среды.

Граничные условия на стенке $\vec{F}_T = -\vec{n} (-pI + \eta (\nabla \vec{u}_1 + (\nabla \vec{u}_1)^T))$, где \vec{n} – вектор внешней нормали к границе. Сила представляет собой суммарное воздействие давления и сил вязкости на стенку. Торцы стенки жестко закреплены.

Значения давления на входе и скоростей на выходах сонной артерии сначала возрастают от нулевых значений до диастолических, затем до систолических значений и падают до диастолических значений.

Значения давления на входе общей сонной артерии и скоростей на выходах наружной и внутренней сонной артерии сначала возрастают от нулевых значений до диастолических, затем до систолических значений и падают до диастолических значений.

На стенке артерии ставится условие равенства скоростей частиц жидкости, прилегающих к стенке, и соответствующих частиц стенки, что математически записывается следующим образом:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, v_1 = \frac{\partial v}{\partial t}, w_1 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Механические характеристики крови и артерии были взяты в виде $\rho_1 = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 0.0037 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\rho_2 = 1378 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0.4$, $E = 6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Результаты и выводы

По результатам проведенного численного эксперимента были получены численные данные по движению крови и стенок патологически извитых сонных артерий. Анализ результатов и сравнение с клиническими данными показали, что:

а) в изгибе локальное давление крови на поперечном срезе артерии минимально на внутренней стенке изгиба, а по мере приближения к наружной стенке увеличивается и достигает максимума на самой стенке;

б) для скорости потока крови характерна обратная зависимость: максимальные значения скоростей потоков крови достигаются у внутреннего радиуса в районе изгиба артерии;

в) за счет разницы давления (у наружного и внутреннего радиуса) возникают потоки поперечной циркуляции, имеющие характер завихрения.

В дальнейшем планируется использовать модель свехупругого (модель Нео-Гука) ортотропного материала [6] стенок сонной артерии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00564).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Скобцов Ю.А., Оверко В.С., Родин Ю.В. и др. Исследование потоков крови при патологической S-образной извитости сонных артерий // Тр. ИПММ НАН Украины. 2006. Вып. 12. С. 164–171.
2. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996. P. 1037.
3. [Http://www.bakulev.ru](http://www.bakulev.ru) (официальный сайт НЦССХ им. А. Н. Бакулева РАМН).
4. [Http://www.venart-swiss.ru](http://www.venart-swiss.ru) (официальный сайт сосудистой клиники Venart Швейцарского медицинского центра).
5. *Holzapfel G.A., Gasser T.C.* A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. of Elasticity. 2000. № 61. P. 1–48.
6. *Harrington I., Botton G. de, Gasser T.C., Holzapfel G.A.* How to incorporate collagen Fibers Orientations in an arterial bifurcation // Proc of the 3rd IASTED Int Conference on Biomechanics. Benidorm, September 7-9, 2005. Benidorm, Spain, 2005.

УДК 533

В.С. Кожанов, И.А. Чернов

ЗАДАЧА О СХЛОПЫВАНИИ ПУСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Данная статья представляет результаты численного решения автомодельной задачи о схлопывании пустой полости, обладающей цилиндрической симметрией, когда показатель адиабаты $\gamma \in (2.9776, 16.8693)$. Результаты решения этой задачи для потока со сферической симметрией содержатся в [1,2].

В предположении, что движение среды изэнтропично, основная система уравнений газовой динамики для цилиндрической симметрии принимает вид (t – время, r – координата, u – скорость жидкой частицы, $C = c^2$ – квадрат скорости звука)

$$u_t + uu_r + C_r/(\gamma - 1) = 0, \quad C_t + uC_r + (\gamma - 1)C(u_r + u/r). \quad (1)$$

Рассматриваемая задача допускает автомодельное решение, которое представляется в форме

$$u = -n\alpha r^{1-1/n}F(\xi), \quad C = n^2\alpha^2r^{2-2/n}G(\xi), \quad \xi = \alpha(t/r^{1/n}). \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) ($\delta = (1 + \xi F)^2 - \xi^2 G$)

$$F'(\xi) = \{a\xi FG - b(1 + \xi F)[2G + (\gamma - 1)F^2]\} / [(\gamma - 1)\delta],$$

$$G'(\xi) = \{b[2G + (\gamma - 1)F^2]\xi F - a(1 + \xi F)FG\} / \delta,$$

$$a = 2(1 - n) + (\gamma - 1)[1 - (1 - 2n)], \quad b = 1 - n.$$

Чтобы получить аналитическое решение задачи, функции F и G должны быть аналитическими в точке ξ , соответствующей предельной характеристике. Этого можно достичь подбором показателя автомодельности n , к определению которого сводится первый этап решение.

Исследование удобно вести на фазовой плоскости переменных $Y = -\xi F$, $Z = \xi^2 G$, изучая поведение интегральных кривых одного нелинейного ОДУ. Это ОДУ имеет шесть особых точек, две из которых с координатами

$$Y = \left(-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2B_0}\right) / (2B_2), \quad Z = (1 - Y)^2, \quad (3)$$

$$B_1 = \gamma - 3 - 2(\gamma - 2)n, \quad B_2 = (\gamma - 1)n, \quad B_0 = 2(1 - n)$$

являются образами предельной характеристики. Обозначим буквой E ту, которой отвечает знак плюс в (3).

Установлено, что существует несколько диапазонов значений показателя γ . В каждом из них решение имеет свои особенности. Интервал (2.9776, 16.8693) характеризуется тем, что для него существует решение задачи, когда интегральная кривая уравнения в переменных Y , Z при искомом n , выходящая из особой точки C ($Y = 1, Z = 0$) вдоль сепаратрисы седла, проходит аналитическим образом через узловую точку E вдоль уса отдельного направления. Реализация такого прохода означает требуемую аналитичность функций F и G на предельной характеристике.

В основе применяемого метода решения лежит разложение функций F и G в ряды Тейлора в окрестности предельной характеристики $\xi = \xi_E$

$$F = F_E + p_i \Delta^i, G = G_E + q_i \Delta^i, \Delta = \xi_E + \delta. \quad (4)$$

В таблице приведены значения искомого показателя автомодельности n , а также коэффициенты p_i, q_i в разложениях (4) для пяти значений γ .

γ	2.98	4.00	7.00	11.00	16.86
n	0.8820259	0.8156801	0.7267854	0.6793581	0.6474310
p_1	-0.2800256	-0.3162651	-0.2585958	-0.1879789	-0.1312472
q_1	1.1917696	1.9507785	2.7906250	3.0315767	3.0727472
p_2	-0.0600655	-0.0915253	-0.0978697	-0.0801468	-0.0604255
q_2	0.2053028	0.5093918	1.1372472	1.5482507	1.8279070
p_3	-0.0222969	-0.0447767	-0.0601901	-0.0540745	-0.0431119
q_3	0.0763186	0.2587347	0.7644647	1.1771038	1.5019847
p_4	-0.0100387	-0.0265842	-0.0443841	-0.0433946	-0.0363574
q_4	0.0350029	0.1584276	0.5978700	1.0184839	1.3818505

По результатам численных расчетов построена интерполяционная формула, характеризующая зависимость показателя автомодельности n от показателя адиабатичности γ в случае цилиндрически симметричного потока

$$n = \frac{0.5877036968\gamma + 1.424996118}{\gamma + 0.6233577285}.$$

Максимальная относительная погрешность по сравнению со значением n , получаемым с использованием метода Рунге – Кутты, составляет не более $1.3 \cdot 10^{-3}$ на рассматриваемом интервале.

На рис. 1, 2 представлены графики, отражающие поведение функций F и G на каждой из двух стадий течения: течение до схлопывания и отражение от центра схлопывания с последующим образованием ударной волны.

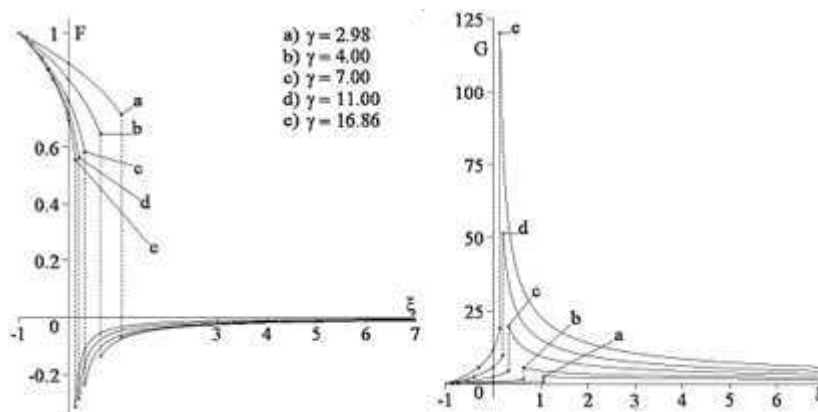


Рис. 1

Рис. 2

Предельная характеристика отмечена точкой, ударный переход показан пунктиром. Для всех n границе каверны соответствует значение $\xi = -1$ за счет выбора масштабного множителя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: Период. сб. переводов иностр. ст. 1961. № 3 (67). С. 77–100.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН. 1963. Т. 18, вып. 2 (110). С. 3–23.

УДК 533.6.0116:532.529

А.А. Матутин, Г.П. Шиндяпин

АНАЛИЗ НЕРЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

В статье найдена область существования нелинейной рефракции ударной волны (УВ) с волной разрежения, когда интенсивность преломленной волны сравнима с интенсивностью падающей УВ ($q^+ \sim O(1)$, $q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$) и значительная часть энергии передается из газожидкостной среды (ГЖС) в газовую. Установлено, что отмеченный феномен возникает при различных режимах рефракции: NR — нерегулярном (рис. 1, а), RR — регулярном (рис. 1, б), RV — с отраженной ударной волной (рис. 1, в).

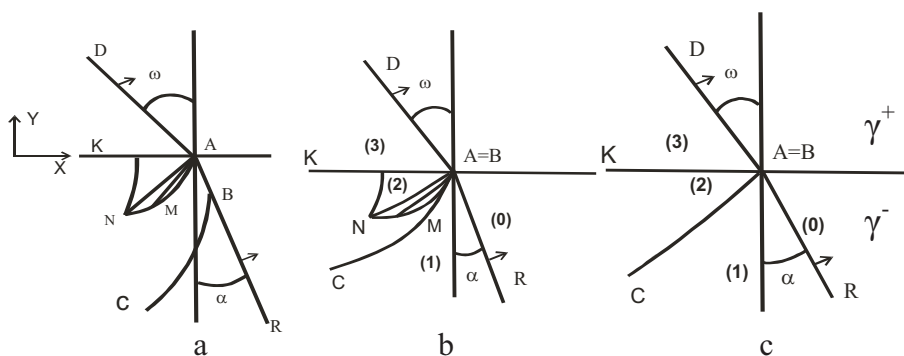


Рис. 1

При падении ударной волны AR (BR) относительной интенсивности $\Delta p/\rho_0 c_0^2$ под углом α к вертикали на свободную поверхность КА, разделяющую газ и ГЖС, с газосодержаниями γ^+ , γ^- возникают различные режимы рефракции, характеризуемые фронтом преломленной волны AD и разрежением AMN или отраженной УВ AC. Параметр q^+ , характеризующий интенсивность преломленной волны, одновременно характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ ($\varepsilon_{20} = \varepsilon_{30}$).

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ ($\bar{\varepsilon} \ll 1$, $\bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10}$, $\varepsilon_{10} = (p_1 - p_0)/p_0$), характерных для ГЖС

пузырькового типа, как и других случаев взаимодействия УВ может быть проведен с помощью асимптотической теории коротких волн (для областей больших градиентов параметров).

Интерес к приближенным и асимптотическим методам в настоящее время объясняется с одной стороны достижениями в этой области, значение которых выходит за рамки рассматриваемых проблем, и, с другой стороны, физической актуальностью рассматриваемых проблем [1, 2, 3].

Вводя асимптотическое разложение $\xi = x/c_0t$, $\eta = y/c_0t$,

$$r/c_0t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \delta = X + 1/2Y^2, \quad \bar{\varepsilon} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10} = R_0(\gamma)P_{10},$$

$$u/c_0 = P_{10}\mu, \quad \nu/c_0 = P_{10}^{3/2}R_0^{1/2}\nu, \quad P_{10} = (p_1 - p_0)/\rho_0c_0^2, \quad (1)$$

получим решение для волны разрежения в виде

$$\mu = -1/2z^2 + \delta_A, \quad \nu = 1/3z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y, \quad (2)$$

а условие на свободной поверхности (N — скорость фронта ударной волны; $\varepsilon^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$, $\varepsilon^- = (p_A - p_0)/(p_1 - p_0)$) в виде

$$N^- / \cos \alpha = N^+ / \cos \omega, \quad N^\pm = 1 + \frac{1}{2}L_0^\pm \varepsilon^\pm. \quad (3)$$

Используя решение (2) с параметрами для регулярной рефракции (RR) (рис. 1, b)

$$X_A = (\alpha^{\nu^2} + 1)/2, \quad d = \alpha^{\nu^2} - 1/3(\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2}, \\ \omega^{\nu^2} = \text{tg } \omega / \bar{\varepsilon}^{1/2}, \quad \beta_1^\nu = \text{tg } \beta / \bar{\varepsilon}^{1/2},$$

получим

$$\beta_k^\nu = \sqrt{2(X_A - q^+)}, \quad \omega^{\nu^2}q^{+2} = \left[\frac{1}{3}(2(X_A - q^+))^{3/2} + d \right]. \quad (4)$$

Для нерегулярной рефракции (NR) (рис. 1, a) аналогичные параметры получаются с помощью точных частных решений уравнений динамики (коротких волн) для области NABC [4]

$$X_A = (\alpha^{\nu^2} + 1)/2, \quad b = \sqrt{2(X_A - q^-)}, \\ q^- = 1 - m^2, \quad d = q^-b - (1/3)b^3, \quad (5)$$

$$\alpha^\nu = \sqrt{1 - m^2} + \frac{m}{\sqrt{2}} \left(\text{arctg } \frac{\sqrt{m^2 + 8} - 3m}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - m^2}} - \text{arctg } \frac{\sqrt{m^2 + 8} + m}{2\sqrt{2}} \right).$$

На рис. 2 представлена зависимость (5) параметра q^- , характеризующего степень падения давления вдоль фронта АВ (рис. 1, a) при нерегулярном

режиме рефракции (NR) от параметра α^ν . При $\alpha^\nu = 1.0$ имеем переход от нерегулярной рефракции (NR) к регулярной (RR).

Условие (3) в общем случае ($\alpha, \omega \sim \bar{\varepsilon}^{1/2}$) для NR и RR примет вид

$$2c_\gamma = \left(\omega^{\nu^2} + \alpha^{\nu^2} \right) + \frac{L_0^+}{L_0^-} q^+ - 1. \quad (6)$$

Исключая ω^ν из (4) и (6) получим окончательно выражение

$$2c_\gamma = \frac{1}{q^{+2}} \left\{ \frac{1}{3} [2(X_A - q^+)]^{3/2} + d \right\}^2 - \alpha^{\nu^2} - 1 + \frac{q^+}{\bar{L}}. \quad (7)$$

Здесь $\alpha^\nu = \text{tg } \alpha / \bar{\varepsilon}^{1/2}$, $c_\gamma = (c_0^- - c_0^+) / c_0^- \bar{\varepsilon}$, $\bar{L} = L_0^- / L_0^+$ — параметры подобия, характеризующие в общем случае различные режимы рефракции (NR, RR).

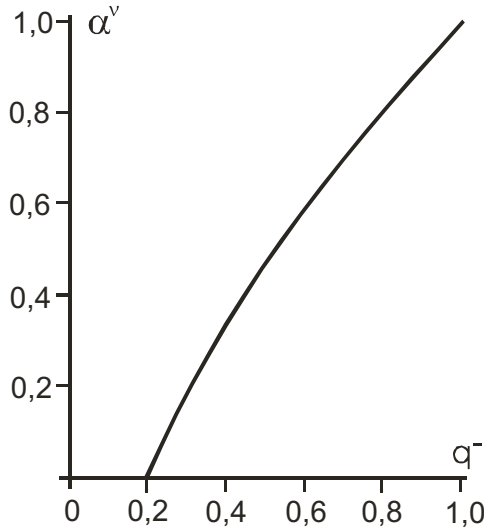


Рис. 2

На рис. 3 приведены результаты расчетов по формулам (6) и (7) для параметра $q^+ = \varepsilon_{20} / \varepsilon_{10}$, характеризующего эффективность рефракции на поверхности, разделяющей газ и ГЖС, при различных режимах в зависимости от параметров подобия, характеризующих влияние физических величин $\alpha^\nu = \alpha^\nu(\varepsilon_{10}, \alpha, \gamma^-)$, $c_\gamma = c_\gamma(\gamma^+, \gamma^-, \varepsilon_{10})$, $\bar{L} = \bar{L}(\gamma^+, \gamma^-, \varepsilon_{10})$.

На рис. 3 изображены поверхности $\alpha^\nu = 0.25$; $\alpha^\nu = 0.75$ и $\alpha^\nu = 1.0$. Поверхность $\alpha^\nu = 1.0$ представляет границу между областями NR и RR. Поверхность K соответствует режиму рефракции с отраженной УВ (RV) (рис. 1, с). Кривая G в плоскости $q^+ = 1.0$ при $\alpha^\nu = 1.0$ является для режима NR при $c_\gamma \geq 0$ и всех α^ν универсальной кривой, соответствующей вырождению волны разрежения. При $\alpha^\nu < 1.0$ кривая G соответствует q_{\max}^+ (минимально возможное разрежение) при соответствующих α^ν и c_γ . Кривая G' ($q^+ = 1.0$) при $c_\gamma < 0$ представляет универсальную границу между режимами NR, RV при $\alpha^\nu = 1.0$, или границу перехода от режима с

волной разрежения к режиму с отраженной УВ. В плоскости $c_\gamma = 0$ сечения D рассматриваемых поверхностей при различных α^ν соответствуют переходу от случая fast-slow ($c_\gamma \geq 0$) к случаю slow-fast ($c_\gamma < 0$). Граница F для поверхностей режима NR соответствует предельным значениям c_γ ($c_\gamma = c_{\gamma \min}$) в случае slow-fast. Границы C — при различных α^ν соответствуют предельно допустимым значениям \bar{L} для рассматриваемых взаимодействий на свободной поверхности, разделяющей газ/ГЖС. В случае многоатомной газовой ($\chi = c_{pII}/c_{vII} = 1.4$) и водовоздушной пузырьковой сред $\bar{L} = 1.17$ ($0.5 \cdot 10^{-4} \leq L^- \leq 1.0$; $L^+ = 0.86$).

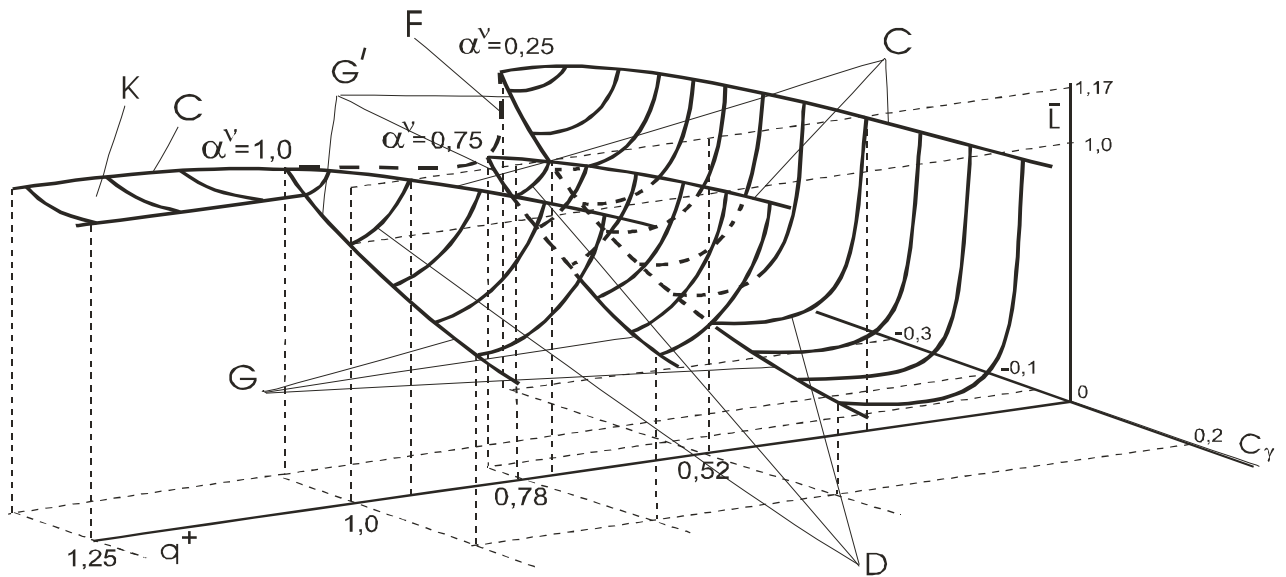


Рис. 3

Как видно из рис. 3, эффективность нерегулярной рефракции в целом возрастает до своего предельного значения ($q^+ = 1.0$) по мере увеличения α^ν , достигая предельных значений на границах G, G' при $\alpha^\nu = 1.0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
3. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Аналитическое исследование нелинейной рефракции ударной волны на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды // Механика и процессы управления: Сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 2004. С. 190–197.
4. Шиндяпин Г.П. Об особенности «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 3 (6). С. 24–36.

И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков

ЧЕТЫРЕХИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ КРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В статье рассмотрена задача четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты космического аппарата (КА). Построено численное решение полученной системы уравнений при условии равенства длин двух внутренних участков активного движения КА. В частном случае, когда равны к тому же длины первого и четвёртого участков активного движения КА, найдено аналитическое решение задачи.

1. Рассмотрим перевод круговой орбиты КА из начального состояния, задаваемого кватернионом ориентации $\Lambda(t_0) = \Lambda^0$, в конечное состояние, задаваемое кватернионом ориентации $\Lambda(t^*) = \Lambda^*$, с помощью управления $p_3 = \pm p_{\max}$ при наличии трёх точек переключения управления в моменты времени t_1, t_2, t_3 (четырёх участков активного движения).

В рассматриваемом случае кватернионы Λ^0 и Λ^* связаны соотношением [1]:

$$\begin{aligned} \Lambda^* \circ \left\{ \cos \left[\frac{1}{2} \left(\varphi_0 + \sum_1^4 \Delta\varphi_i \right) \right] + \mathbf{i}_3 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\varphi_0 + \sum_1^4 \Delta\varphi_i \right) \right] \right\} = \\ = \Lambda^0 \circ \left(\cos(\varphi_0/2) + \mathbf{i}_3 \sin(\varphi_0/2) \right) \circ \\ \circ \Delta\lambda_1(\Delta\varphi_1) \circ \Delta\lambda_2(\Delta\varphi_2) \circ \Delta\lambda_3(\Delta\varphi_3) \circ \Delta\lambda_4(\Delta\varphi_4), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta\lambda_k(\Delta\varphi_k) = \cos(\omega^* \Delta\varphi_k/2) + (\boldsymbol{\omega}_k^*/\omega^*) \sin(\omega^* \Delta\varphi_k/2), \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\omega^* = \left[1 + \left(\frac{r^3}{c^2} p_{\max} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \text{для четного } k \quad \boldsymbol{\omega}_k^* &= \mp (r^3/c^2) p_{\max} \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \\ \text{для нечетного } k \quad \boldsymbol{\omega}_k^* &= \pm (r^3/c^2) p_{\max} \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Здесь r – радиус орбиты, c – постоянная площадей; $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ – приращение на k -м участке траектории истинной аномалии φ , характеризующей положение КА на орбите; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

2. Поставим задачу четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты КА при условии равенства двух внутренних участков активного движения КА: зная φ_0, Λ^0 и Λ^* , найти длительности (в радианной мере) четырех участков активного движения $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\varphi_4$ при условии, что

$$\omega^* \Delta\varphi_2 = \omega^* \Delta\varphi_3 = x. \quad (2)$$

Отметим, что поставленная задача вытекает из решения задачи оптимального (в смысле быстродействия) разворота орбиты КА с помощью принципа максимума. Это решение сводится к нахождению времени оптимального движения $t^*(\varphi^*)$, количества активных участков движения КА и их длительностей (величин $\Delta\varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$). Условие (2) следует из результатов численного решения вышеуказанной задачи оптимальной переориентации орбиты КА. В [1] было найдено аналитическое решение данной задачи при $x = \pi$.

После ряда преобразований уравнения (1) приходим к системе четырёх нелинейных трансцендентных уравнений относительно трёх переменных Δ_1, Δ_4, x :

$$\begin{aligned}
& (\cos^2(x/2) + a_{11} \sin^2(x/2)) \cos(\Delta_1) \cos(\Delta_4) - a_{12} \sin(x) \sin(\Delta_1 + \Delta_4) + \\
& + a_{13} \sin(\Delta_1) \sin(\Delta_4) \cos^2(x/2) + a_{14} \sin(\Delta_1) \sin(\Delta_4) \sin^2(x/2) = \\
& = \lambda_0^{(3)} \cos(\varphi^*) - \lambda_3^{(3)} \sin(\varphi^*), \\
& \pm a_{21} \sin(\Delta_1 - \Delta_4) \cos^2(x/2) \pm a_{22} \sin(\Delta_1 - \Delta_4) \sin^2(x/2) = \\
& = \lambda_1^{(3)} \cos(\varphi^*) + \lambda_2^{(3)} \sin(\varphi^*), \tag{3} \\
& \mp a_{31} \sin(\Delta_1) \sin(\Delta_4) \cos^2(x/2) \pm a_{32} (2 \cos(\Delta_1) \cos(\Delta_4) + a_{33} \sin(\Delta_1) \sin(\Delta_4)) \mp \\
& \mp a_{34} \sin(\Delta_1 + \Delta_4) = \lambda_2^{(3)} \cos(\varphi^*) - \lambda_1^{(3)} \sin(\varphi^*), \\
& a_{41} \cos(\Delta_1 + \Delta_4) \sin(x) + a_{42} \sin(\Delta_1 + \Delta_4) \cos^2(x/2) + \\
& + a_{43} \sin(\Delta_1 + \Delta_4) = \lambda_3^{(3)} \cos(\varphi^*) + \lambda_0^{(3)} \sin(\varphi^*).
\end{aligned}$$

Здесь a_{ij} – известные величины, $\varphi^* = \varphi_0/2 + (\Delta_1 + x + \Delta_4)/\omega^*$; $\Delta_1 = (1/2)\omega^* \Delta\varphi_1$; $\Delta_4 = (1/2)\omega^* \Delta\varphi_4$; $u = (r^3/c^2)p_{\max}$; $\lambda_j^{(3)}$ – величины, выражаемые через известные параметры задачи; верхний знак берется, если на первом активном участке движения КА $p_3 = +p_{\max}$, нижний – в противном случае.

Четыре уравнения (3) связаны условием нормировки: суммы квадратов левых и правых частей равны единице. Поэтому можно решать любые три из них, исключённое же уравнение используется для контроля.

Полученная система уравнений решалась с использованием метода Ньютона. Параллельно для контроля производились расчёты с использованием пакета MathCad 2003. В качестве конечной ориентации брались долгота восходящего узла Ω_1 и наклонение I_1 спутниковой орбитальной системы ГЛОНАСС. Примеры результатов приведены в таблице.

Характерные величины: $p_{\max} = 0, 101907 \text{ м/с}^2$, $r = 26000000 \text{ м}$.

Отметим, что хорошая сходимость вычислительного процесса наблюдалась в случаях, когда разница между Ω_0 и Ω_1 не превышала 5° , а разница между I_0 и $I_1 - 35^\circ$.

$p_3, 1 \text{ уч-к}$	$\Omega_0, ^\circ$	$I_0, ^\circ$	$\Omega_1, ^\circ$	$I_1, ^\circ$	$\Delta\varphi_1, \text{ рад}$	$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_3, \text{ рад}$	$\Delta\varphi_4, \text{ рад}$
$+p_{\max}$	66	210	64,8	215	3,229326	1,352621	2,820122
$-p_{\max}$	66	210	64,8	215	2,223588	1,358245	2,938439
$+p_{\max}$	70	240	64,8	215	0,491153	2,999735	4,455259

3. Рассмотрим частный случай четырёхимпульсной переориентации круговой орбиты КА при условии равенства двух внутренних участков активного движения КА и двух крайних участков:

$$\omega^* \Delta\varphi_1 = \omega^* \Delta\varphi_4 = y.$$

Из второго уравнения системы (3) в этом случае получим

$$x + y = \omega^* [\arctan(-\lambda_1^{(3)}/\lambda_2^{(3)}) + \pi k - \varphi_0/2] = C_k, \quad k \in Z. \quad (4)$$

Из остальных уравнений системы (3) с учетом (4) следует уравнение

$$A \cos^3 x + B \cos^2 x + C \cos x + D = 0,$$

где A, B, C, D – известные величины.

Таким образом, в рассматриваемом частном случае решение задачи свелось к решению алгебраического уравнения третьего порядка относительно $\cos x$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. И.А. Панкратов, Ю.Н. Челноков. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 210–213.

УДК 533.6.011

Я.Г. Сапунков

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье в автомодельных переменных в элементарных функциях получено приближенное решение задачи для цилиндрической и сферической сходящейся ударной волны в области между ударной волной и предельной характеристикой, ограничивающей область влияния возмущенного движения газа на ударную волну. Для определения показателя степени в автомодельной переменной получено нелинейное уравнение, численное решение которого отличается от показателя в полной автомодельной задаче в четвертом знаке после запятой.

1. Движение идеального совершенного газа с отношением теплоемкостей γ в задаче о сходящейся ударной волне цилиндрической ($\nu = 1$) или сфери-

ческой ($\nu = 2$) формы в переменных λ, V, R, Z описывается уравнениями [1, 2]

$$\begin{cases} \frac{dV}{d \ln \lambda} = \frac{\Delta_1(V, Z)}{\Delta_0(V, Z)}, & \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = \frac{\Delta_2(V, Z)}{\Delta_0(V, Z)}, \\ \frac{dZ}{d \ln \lambda} = \frac{\Delta_3(V, Z)}{\Delta_0(V, Z)}, & \Delta_0 = (V - \alpha)^2 - Z. \end{cases} \quad (1)$$

Автомодельные переменные λ, V, R, Z связаны с размерными независимыми переменными r — расстоянием от оси или центра симметрии, t — временем и искомыми v — скоростью, ρ — плотностью, p — давлением соотношениями

$$\lambda = \frac{r}{A(-t)^\alpha}, \quad v = \frac{r}{t}V, \quad \rho = \rho_0 R, \quad p = \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{r^2}{t^2} Z R.$$

Закон движения сходящейся ударной волны до момента ее фокусировки ($t=0$) имеет вид $r = r_s(t) = A(-t)^\alpha$, $t < 0$.

Граничные условия на поверхности ударной волны при $\lambda = 1$ имеют вид

$$\begin{cases} V(1) = V_s = \frac{2\alpha}{\gamma+1}, & R(1) = R_s = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ Z(1) = Z_s = \frac{2\alpha^2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Условия вдали от ударной волны при $\lambda \rightarrow \infty$: $V = 0$, $Z = 0$.

Показатель степени α определяется из условия, что интегральная кривая дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{\Delta_3(V, Z)}{\Delta_1(V, Z)} \quad (3)$$

должна проходить на плоскости OVZ через точку S с координатами V_s, Z_s и особую точку с координатами V_B, Z_B уравнения (3), в которой $\Delta_1(V_B, Z_B) = 0$, $\Delta_3(V_B, Z_B) = 0$, $\Delta_0(V_B, Z_B) = 0$.

Особая точка соответствует на плоскости Ort предельной характеристике, которая ограничивает область влияния течения за ударной волной на ударную волну.

2. Функции Δ_i ($i = 1, 2, 3$) можно выразить через Δ_0 и Δ_4

$$\begin{cases} \Delta_4(V) = \nu V^2 - \left[(\nu + 1)\alpha + \frac{2}{\gamma}(1 - \alpha) - 1 \right] V + 2\frac{\alpha}{\gamma}(1 - \alpha), \\ \Delta_4(V_B) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

С учетом (4) система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dV}{d \ln \lambda} = - \left[(\nu + 1)V - \frac{2}{\gamma}(1 - \alpha) \right] + (V - \alpha) \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{d \ln R}{d \ln \lambda} = - \frac{2(1 - \alpha)}{\gamma(V - \alpha)} - \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \\ \frac{dZ}{d \ln \lambda} = -Z \left\{ \frac{2}{V - \alpha} \left[V - \frac{1 + \alpha(\gamma - 1)}{\gamma} \right] + (\gamma - 1) \frac{\Delta_4}{\Delta_0} \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Для упрощения системы (5) в области между ударной волной и предельной характеристикой отношение Δ_4 / Δ_0 положим постоянным и равным его значению в точке S , соответствующей на плоскости OVZ ударной волне:

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_0} = -\frac{2}{\alpha(\gamma-1)} \left[\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) (1-\alpha) - \nu \alpha \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right] = K. \quad (6)$$

Решение упрощенных уравнений (5) с учетом (6), удовлетворяющее граничному условию (2), имеет вид

$$\begin{cases} V = A + (V_s - A) \lambda^{-(\nu+1-K)}, & A = \frac{2(1-\alpha) - \alpha\gamma K}{\gamma(\nu+1-K)}, \\ R = R_s \left(\frac{\alpha-V}{\alpha-V_s}\right)^{\delta_1} \left(\frac{V-A}{V_s-A}\right)^{\delta_2}, & Z = Z_s \left(\frac{\alpha-V}{\alpha-V_s}\right)^{\beta_1} \left(\frac{V-A}{V_s-A}\right)^{\beta_2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha \left[(\nu+1) \frac{\gamma}{2} + 1\right]}, \\ \beta_2 = \frac{1 + \gamma K - \nu - \alpha [2 + \gamma K + (\nu+1)(\gamma-1)(1 + \frac{\gamma}{2}K)]}{(\nu+1-K) \{1 - \alpha [(\nu+1) \frac{\gamma}{2} + 1]\}}, \\ \delta_1 = -\beta_1, & \delta_2 = \frac{(\nu+1) [1 - \alpha (1 + \frac{\gamma}{2}K)]}{\{1 - \alpha [(\nu+1) \frac{\gamma}{2} + 1]\} (\nu+1-K)}. \end{cases}$$

3. Для определения показателя степени в законе движения ударной волны вычислим координаты особой точки :

$$\begin{cases} V_B = \frac{1}{2\nu} \left(\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma} \right) \alpha + \frac{2}{\gamma} - 1 \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[\left(\nu + 1 - \frac{2}{\gamma} \right) \alpha + \frac{2}{\gamma} - 1 \right]^2 - 8\nu \frac{\alpha}{\gamma} (1-\alpha)} \right), \\ Z_B = (\alpha - V_B)^2. \end{cases}$$

Тогда для определения α получим уравнение

$$Z_S \frac{(\alpha - V_B)^{\beta_1-2}}{(\alpha - V_S)^{\beta_1}} \left(\frac{V_B - A}{V_S - A} \right)^{\beta_2} - 1 = 0. \quad (7)$$

Численное решение уравнения (7) дает значения для показателя автономности, близкие к значениям, которые получаются из решения полной автономной задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

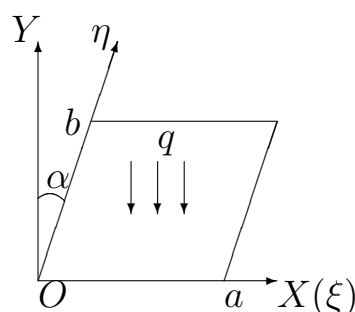
1. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М: Наука, 1971. 856 с.
2. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений. М: Наука, 1966. 688 с.

Р.А. Сафонов

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ В ЗАДАЧЕ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА КОСОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В статье описывается метод определения прогиба косоугольной пластинки под действием распределенных поперечных усилий. Задача решается с помощью модифицированного метода сплайн-коллокации в косоугольной системе координат.

Рассмотрим тонкую косоугольную пластинку толщиной h со сторонами a и b (рисунок).



Пластина

Для прогиба пластинки \bar{w} под действием распределенной по верхней грани поперечной нагрузки справедливо уравнение

$$D\nabla^2\nabla^2\bar{w}(x, y) = q(x, y). \quad (1)$$

На краях пластинки ставятся условия жесткой заделки

$$\bar{w} = 0, \frac{d\bar{w}}{dn} = 0 \quad (2)$$

либо шарнирного подкрепления

$$\bar{w} = 0, M_n = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями (2), (3) проводится в безразмерных косоугольных координатах (ξ, η) [1], которые связаны с декартовыми координатами (x, y) формулами:

$$\begin{cases} x = a\xi + b\eta \sin \alpha \\ y = b\eta \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = (1/a)(x - y \tan \alpha) \\ \eta = (1/b) \frac{y}{\cos \alpha}. \end{cases}$$

В координатах (ξ, η) область срединного сечения пластинки является единичным квадратом, а уравнение (1) имеет вид

$$w_{\xi\xi\xi\xi} - 4c \sin \alpha (w_{\xi\xi\xi\eta} + c^2 w_{\xi\eta\eta\eta}) + 2c^2 (\sin \alpha + 2 \sin^3 \alpha) w_{\xi\xi\eta\eta} + c^4 w_{\eta\eta\eta\eta} = qa^4 \cos^4 \alpha / Dh, w = \bar{w}/h, c = a/b. \quad (4)$$

В соответствии с методом сплайн-коллокации, безразмерный прогиб w ищется в виде линейной комбинации B -сплайнов пятого порядка $B_j(\eta)$ с заранее неизвестными функциями $W_j(\xi)$, $j = -2 \dots N + 2$ [2].

В случае классического метода сплайн-коллокации граничные условия на краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ должны позволять выразить неизвестные функции $W_{-2}, W_{-1}, W_{N+1}, W_{N+2}$ линейным образом через остальные искомые функции. Из выбранных граничных условий это возможно сделать только в случае условий (2).

Рассмотрим случай, когда край $\eta = 0$ шарнирно оперт, а край $\eta = 1$ жестко зашцеилен. Первое из условий (3) позволяет исключить W_{-2} из представления функции прогиба w . Рассмотрим второе условие:

$$M_n|_{\eta=0} = -\frac{Dh}{a^2 \cos^2 \alpha} [(\sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha) w_{\xi\xi} - 2c \sin \alpha w_{\xi\eta} + c^2 w_{\eta\eta}] = 0. \quad (5)$$

После подстановки в (5) представления функции прогиба с учетом $w_{\xi\xi}|_{\eta=0} = 0$ можно выразить производную W'_{-1} через остальные функции $W_j, j = -1 \dots N + 2$ и $W'_k, k = 0 \dots N + 2$:

$$W'_{-1} = \sum_{j=0}^{N+2} \alpha_j W_j^{(')} + \sum_{j=-1}^{N+2} \beta_j W_j, \quad (6)$$

где α_j и β_j – некоторые коэффициенты.

Затем согласно методу сплайн-коллокации осуществляется переход от уравнения (4) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и из нее с помощью (5) исключаются производные функции W_{-1} . Получившаяся система уравнений вместе с продифференцированным по ξ уравнением (6) записывается в нормальной форме Коши. К ней добавляются условия на краях $\xi = 0$ и $\xi = 1$, записанные в точках коллокации $\eta = \eta_i^*$, и граничные условия в угловых точках на свободно подкрепленной стороне $\eta = 0$, учитывающие особенности закрепления прилегающих к углам сторон.

Поставленная таким образом краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями на обоих концах интервала интегрирования решается методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова [3]. Аналогично можно решать задачу в случае, когда оба края $\eta = 0$ и $\eta = 1$ шарнирно оперты.

Для апробации предложенного метода рассмотрим случай, когда края $\xi = 0$ и $\xi = 1$ жестко заделаны. Эту задачу можно решать классическим

методом сплайн-коллокации, если проводить коллокацию в направлении оси ξ [4].

В таблице приведены результаты расчетов максимального прогиба пластинки под действием равномерно распределенных усилий q для случаев, когда два противоположных края закреплены жестко, а два других — шарнирно оперты (W_{\max}^1) и когда весь контур свободно подкреплён (W_{\max}^2). Первый случай рассчитывался как с помощью классического, так и с помощью модифицированного метода. При расчетах использовались следующие значения параметров: $a = b = 10$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $h = 0.01$ м, $\nu = 0.3$, $q = 1$ Н.

α	$W_{\max}^{1, \text{кл. мет.}}, \text{ м}$	$W_{\max}^{1, \text{мод. мет.}}, \text{ м}$	$W_{\max}^2, \text{ м}$
$\pi/15$	$9.709E-4$	$9.709E-4$	$2.056E-3$
$2\pi/15$	$7.693E-4$	$7.671E-4$	$1.625E-3$
$\pi/5$	$5.066E-4$	$5.058E-4$	$9.048E-4$
$4\pi/15$	$2.612E-4$	$2.594E-4$	$5.193E-4$
$\pi/3$	$9.258E-5$	$9.019E-5$	$1.588E-4$

Сравнение значений, приведенных во втором и третьем столбцах таблицы, показывает эффективность предложенного метода решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крюков Н.Н. Расчет косоугольных и трапециoidalных пластин с помощью сплайн-функций // Прикладная механика. 1997. Т. 33, № 5. С. 77–81.
2. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций // Прикладная механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–27.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. XVI, № 3 (99). С. 171–174.
4. Сафонов Р.А. Численное решение задачи изгиба косоугольной пластины под действием поперечной нагрузки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2006. Вып. 8. С. 220–222.

УДК 539.3

О.А. Торопова

ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ГЛУБОКОВОДНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ МОРСКИХ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

Целью статьи является вывод уравнений установившегося пространственного движения глубоководного трубопровода для общего случая его продольных, крутильных и изгибных деформаций. В отличие от известных работ, например, В.А. Светлицкого [1, 2], здесь дополнительно учтены эффекты, вызванные совместным действием внутреннего и внешнего потоков

жидкости (в частности, гидростатическое обжатие стенок трубопровода) и его стационарным пространственным движением.

Введем правую инерциальную систему координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой может быть зафиксировано в любой произвольной точке на дне океана на глубине H . Ось x_2 направим вертикально вверх, а ось x_1 - горизонтально вправо. Свяжем также с центром тяжести произвольного поперечного сечения деформированного трубопровода единичный правосторонний трехгранник $\{\vec{e}_i\}$, направив единичный вектор \vec{e}_1 по касательной к осевой линии и зафиксировав орты \vec{e}_2, \vec{e}_3 в плоскости его поперечного сечения. За начало отсчета эйлеровой дуговой координаты (s) выберем нижний конец трубопровода.

Пусть $\{\vec{e}_{i0}\} = \{i_1, -i_1, i_3\}$ - орты локальной системы координат для недеформированной осевой линии. Связь между базисными векторами e_j и i_j определяется с помощью ортогональной матрицы перехода K [2]: $i_j = Ke_j$ ($j = 1, 2, 3$),

$$K = \begin{pmatrix} -(\sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) & -\cos \varphi \cos \theta & -(\sin \varphi \sin \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta) \\ \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \psi \sin \theta - \sin \psi \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Будем использовать следующие допущения.

1. Трубопровод (гибкий стержень постоянного кольцевого поперечного сечения) в недеформированном состоянии имеет прямолинейную форму.

2. Материал стенок является линейно-упругим, работает в области малых деформаций ($1 + \varepsilon_1 \approx 1$, $ds \approx ds_0$), но больших перемещений и углов поворота.

3. Движение морской воды и гидросмеси считается установившимся, причем ее скорость (v_f) постоянна по сечению и длине трубопровода.

4. Векторы скорости движения плавсредства (v_s) и трехмерного потока подводных течений (v_c) считаются известными функциями декартовых координат: ($v_s = v_s(x_1, x_3)$, $v_c = (x_1, x_2, x_3)$).

5. Движение трубопровода происходит без образования вихревой дорожки Кармана и не оказывает влияния на движение плавсредства.

Вектор распределенных нагрузок, действующих на элемент трубопровода (q), можно записать в виде $q = q_f + q_w - mge_{10}$, где q_f, q_w - векторы сил взаимодействия с внутренним и внешним потоками жидкости, m - погонная масса трубопровода в воздухе. Пусть элемент трубопровода движется с поступательной скоростью $v_s = v_{s1}e_1 + v_{s2}e_2 + v_{s3}e_3$, а элемент потока гидросмеси - со скоростью $v_f \uparrow\uparrow e_1$. Тогда вектор ее скорости в инерциальном пространстве $Ox_1x_2x_3$: $v_{af} = v_s + (v_f - v_{s1})e_1$. Для детализации компонент q_f воспользуемся динамическим уравнением движения элемента потока жидкости, совпадающего в рассматриваемый момент времени с элементом

трубопровода [2]:

$$d(m_f v_{af})/dt = -\partial/\partial s(P_f e_1) - m_f g e_{10} - q_f,$$

где $m_f = \rho_f F_f$, $P_f = p_f F_f$, ρ_f – плотность потока гидросмеси, P_f – давление для произвольной точки каждой линии ее тока, $F_f = 0.25\pi d_0^2$, d_0 – внутренний диаметр трубопровода. Используя векторное равенство $q = (q, e_1)e_1 + e_1 \times (q \times e_1)$ представим q_f в виде

$$q_f = q_{hf} + q_{af} + q_{\tau f} - \left(\frac{\partial P_f}{\partial s} + \left(\frac{d}{dt}(m_f v_{af}), e_1\right) + m_f g(e_{10}, e_1)\right)e_1. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{hf} &= -P_f \frac{\partial e_1}{\partial s} - m_f g e_1 \times (e_{10} \times e_1), \\ q_{af} &= -e_1 \times \left(\frac{d}{dt}(m_f v_{af}) \times e_1\right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$q_{\tau f} = 0, 5d_0 \rho_f c_{\tau f} (v_f - v_{s1}) |v_f - v_{s1}| e_1$$

соответственно вектора нормальной силы гидростатического давления потока гидросмеси на стенки, нормальной силы инерции ее присоединенной массы, касательной составляющей гидродинамического сопротивления, $c_{\tau f} = c_{\tau f}(Re)$ – коэффициент силы трения, (Re) – число Рейнольдса. Для внешнего потока жидкости аналогично (1), (2) имеем

$$q_w = q_{hw} + q_{aw} + q_{\tau w} + q_n + \left(\frac{\partial P_w}{\partial s} + \left(\frac{d}{dt}(m_w v_{aw}), e_1\right) + m_w g(e_{10}, e_1)\right)e_1, \quad (3)$$

где

$$q_{hw} = P_w \frac{\partial e_1}{\partial s} + m_w g e_1 \times (e_{10} \times e_1), (q_{hw} \uparrow \downarrow q_{hf}),$$

$$q_{aw} = -e_1 \times \left(\frac{d}{dt}(m_w v_{aw}) \times e_1\right),$$

$$q_{\tau w} = 0, 5D_0 \rho_w c_{\tau w} (v_{c1} - v_{s1}) |v_{c1} - v_{s1}| e_1, \quad (4)$$

$$q_n = -0, 5\rho_w c_n D_0 ((v_{s2} - v_{c2})e_2 + (v_{s3} - v_{c3})e_3) \sqrt{(v_{c2} - v_{s2})^2 + (v_{c3} - v_{s3})^2},$$

$$m_w = \rho_w F_w, P_w = p_w F_w,$$

ρ_w – плотность морской воды, $F_w = 0, 25\pi D_0^2$, $v_{aw} = v_s + (v_{c1} - v_{s1})e_1$, $c_n = c_n(Re)$ – коэффициент нормального гидродинамического сопротивления. Таким образом, вектор q представляется окончательно в виде

$$\begin{aligned} q &= -m g e_{10} + \left(\frac{\partial}{\partial s}(P_w - P_f) + \left(\frac{d}{dt}(m_w v_{aw} - m_f v_{af}), e_1\right) + (m_w - m_f)g(e_{10}, e_1)\right)e_1 + \\ &+ q_h + q_{af} + q_{aw} + q_{\tau f} + q_{\tau w} + q_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $q_h = q_{hf} + q_{hw}$ – вектор силы гидростатического обжатия стенок трубопровода.

Для трубопровода круглого поперечного сечения вектор внешнего распределенного момента (ω) имеет единственную составляющую, связанную с кручением: $\omega = \omega_1 e_1$. Она определяется структурой профиля подводных течений (для однослойного потока $\omega_1 = 0$).

Уравнения установившегося движения. Постановка граничных условий

В осях связанной системы координат векторными уравнениями равновесия элемента трубопровода, а также физическими соотношениями являются

$$Q' + \varkappa \times Q + q = 0, \quad M' + \varkappa \times M + e_1 \times Q + \omega = 0, \quad M = A\varkappa. \quad (6)$$

Здесь

$$Q = (T_e, Q_1, Q_2)^t, \quad M = (H, M_1, M_2)^t, \quad \varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)^t,$$

$$A = (A_{ii}) = \{A_{11} = GI_1, A_{22} = A_{33} = EI_2\},$$

$T_e = T + P_w + P_f$ – эффективное осевое усилие, учитывающее гидростатическое обжатие стенок, Q_1, Q_2 – перерезывающие усилия, H, M_1, M_2 – крутящий и изгибающие моменты, $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ – кручение и проекции радиусавектора кривизны, $(1 + \nu)GI_1 = EI_2$, E – модуль Юнга, I_1, I_2 – моменты инерции поперечного сечения, $(\cdot)' = d(\cdot)/ds$. Введенная переменная T_e фактически определяет относительное удлинение элемента трубопровода при условии несжимаемости материала его стенок ($\nu = 0,5$). Действительно, если для приближенного отыскания радиальных и окружных напряжений воспользоваться формулами Ламе, подставить их в выражение закона Гука, то $\varepsilon_1 = (T + P_w - P_f)/EF_0 = T_e/EF_0$.

Пространственные равновесные конфигурации осевой линии определяются углами поворота $(\varphi, \psi, \theta)^t = \alpha$ и ее декартовыми координатами $x_i = x_i(s)$ [1]:

$$\alpha' = L\varkappa, \quad x' = K(1, 0, 0)^t, \quad (7)$$

где

$$L = (l_{ij}) = \{l_{11} = -\sin \psi, \quad l_{13} = \cos \psi, \quad l_{21} = \operatorname{tg} \varphi \cos \psi, \quad l_{23} = \operatorname{tg} \varphi \sin \psi,$$

$$l_{31} = \cos \psi / \cos \varphi, \quad l_{33} = \sin \psi / \cos \varphi, \quad l_{12} = l_{32} = 0, \quad l_{22} = 1\}.$$

Выбирая в качестве основных неизвестных компоненты векторов Q, \varkappa, α, x , рассмотрим основные варианты постановки граничных условий

при использовании трубопровода как длинномерного элемента геологоразведочного (задачи стационарной буксировки) и добывающего (при неподвижном закреплении нижнего сечения с подводным технологическим оборудованием) комплексов. В первом случае нижнее сечение обычно шарнирно присоединено к буферному устройству, имеющему известный вес в жидкости W_b с проекциями гидродинамических сил сопротивления Q_{bx_i} , $x = 1, 3$. Для верхнего сечения, шарнирно соединенного с плавсредством, известны его декартовы координаты. Поэтому

$$KQ|_{s=0} = (Q_{bx_1}, W_b, Q_{bx_3})^t, \quad \varkappa(0) = \varkappa(l) = 0, \quad x(l) = (0, H, 0)^t. \quad (8)$$

Для добычных комплексов ($v_s = 0$) аналогично получаем

$$\varkappa(0) = x(0) = 0, \quad \varkappa(l) = 0, \quad x(l) = (x_{s1}, H, x_{s3})^t, \quad (9)$$

где x_{s1}, x_{s3} – заданные координаты смещения плавсредства в горизонтальной плоскости при его удерживании, например, над устьем буровой скважины.

В результате перехода к безразмерным переменным и параметрам и использования в процессе преобразований (1)–(5) геометрических соотношений $v'_s + \varkappa \times v_s = 0$, $e'_i = \varkappa \times e_i$ задача (6)–(9) сформулируется окончательно следующим образом:

$$y' = f(s, y, z; \mu), \quad \mu z' = F(s, y, z; \mu) \equiv P(y)z^* + r(y) + \mu u(z), \quad (10)$$

$$B_0(Y(0); \mu) = B_1(Y(1)) = 0, \quad Y = \{y, z\}^t.$$

Здесь

$$y = \{T_e, \varkappa_1, \varphi, \psi, \theta, x_1, x_2, x_3\}^t, \quad z = \{Q_1, Q_2, \varkappa_2, \varkappa_3\}^t, \quad z^* = (\varkappa_3, \varkappa_2, Q_2, Q_1)^t,$$

$$f = \{f_1, \dots, f_8\}^t, \quad f_1 = \cos \varphi \cos \psi - m_f(v_f - v_{s1})(\varkappa_3 v_{s2} - \varkappa_2 v_{s3}) - \\ - m_w(v_{c1} - v_{s1})((dv_{c1}/dx_2) \cos \varphi \cos \psi + \varkappa_2 v_{s3} - \varkappa_3 v_{s2}) - \gamma_1(v_f - v_{s1})|v_f - v_{s1}| - \\ - \gamma_2(v_{c1} - v_{s1}) |v_{c1} - v_{s1}| + \mu(\varkappa_3 Q_1 - \varkappa_2 Q_2),$$

$$f_2 = -\omega_1, \quad f_i = (L\varkappa)_j, \quad f_{i+3} = (K(1, 0, 0)^t)_j, \quad (i = 3, 4, 5; j = 1, 2, 3),$$

$$P = (p_{ij}) = \{p_{11} = -p_1, p_{22} = p_1, p_{33} = 1, p_{44} = -1, p_{ij} = 0 (i \neq j)\},$$

$$p_1 = T_e - m_f(v_f - v_{s1})^2 - m_w(v_{c1} - v_{s1})^2,$$

$$r = \left\{ \begin{array}{l} -\sin \varphi + \gamma_3(v_{s2} - v_{c2})\sqrt{(v_{s2} - v_{c2})^2 + (v_{s3} - v_{c3})^2}, \\ \cos \varphi \sin \psi + \gamma_3(v_{s3} - v_{c3})\sqrt{(v_{s2} - v_{c2})^2 + (v_{s3} - v_{c3})^2}, 0, 0 \end{array} \right\}^t,$$

$$u = \{\varkappa_1 Q_2, -\varkappa_1 Q_1, \varkappa_1 \varkappa_3 \nu / (1 + \nu), -\varkappa_1 \varkappa_2 \nu / (1 + \nu)\}^t,$$

$$B_0 : R^{12} \times R^1 \longrightarrow R^6, \quad B_1 : R^{12} \longrightarrow R^6.$$

Уравнения статики гибких трубопроводов или гибких стержней во внешнем потоке жидкости [1,2] непосредственно следуют из (10), если принять $m_w = v_s = \omega_1 = v_c = \gamma_1 = 0$ или $m_f = m_w = v_f = v_s = \omega_1 = 0$. При моделировании морской воды и гидросмеси идеальной несжимаемой жидкостью вектора q_f и q_w ортогональны e_1 , $q_{\tau f} = q_{\tau w} = 0$, а из (1), (3) можно в явном виде найти P_f и P_w . В этом случае система (10) формально совпадает с уравнениями статики глубоководных трубопроводов, полученных в [3], если принять в (10) $\nu = 0,5$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1972. 222 с.
2. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. *Петров В.В., Кузнецов В.В., Земеров В.Н.* Механика длинномерных элементов глубоководных комплексов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. 188 с.

УДК 539.3

Н.С. Хлопцева

ВЕСОВАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Решение проблемы уменьшения массы оболочечных конструкций при сохранении их характеристик устойчивости требует применения оболочек с толщиной, переменной вдоль образующей либо в окружном направлении. Если конструкции с дискретно изменяющейся толщиной широко применяются уже не одну сотню лет [1–4], то оболочки со стенками, толщина которых меняется непрерывно, долгое время оставались без внимания. Возможно, именно конструкции, изготовленные по этому принципу, позволят уменьшить массу (а соответственно и стоимость) изделий самых различных отраслей промышленности.

Сравним характеристики «классических» тонкостенных оболочек с постоянной и меняющейся толщиной.

Рассмотрим осесимметричную форму потери устойчивости тонкостенной круговой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии. В этом случае ось оболочки остается прямолинейной, а поверхность её при потере устойчивости получает осесимметричные радиальные перемещения $w(x)$, зависящие только от координаты x . При потере устойчивости оболочки с переменной вдоль её образующей толщиной $\delta(x)$, напряжения сжатия в различных поперечных сечениях оказываются различными при постоянной величине критического погонного усилия $N_* = \sigma(x)\delta(x)$. Задача потери устойчивости здесь сводится к определению N_* .

Для оценки весовой выгоды неоднородной оболочки введем понятие показателя весовой эффективности $\gamma = \frac{\bar{N}_n}{\bar{N}_o}$, где $\bar{N}_n = \frac{N_*}{G}$ и $\bar{N}_o = \frac{N_*}{G}$ — удельные критические усилия соответственно для неоднородной и однородной оболочек одинаковой массы, G — вес оболочки.

Определим N_* прямым энергетическим методом в ситуации безразличного равновесия, когда работа внутренних сил (энергия деформаций) равна работе внешней осевой критической силы. Полагаем справедливым закон Гука и гипотезы Кирхгофа — Лява [1]. Для неоднородной оболочки получим $N_* = N_{*o}\alpha$, где $N_{*o} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{\delta_0^2}{R}$ — критическое усилие для оболочки с постоянной толщиной δ_0 , α — поправочный коэффициент, учитывающий закон изменения толщины оболочки $\delta = \delta(x)$ и граничные условия.

Масса тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с толщиной, меняющейся по закону $\delta = \delta(x)$ и радиусом срединной поверхности R равна $m^H = \rho \int_0^l 2\pi R \delta(x) dx = m_0 \beta$, где $m_0 = \rho 2\pi R \delta_0 l$ — масса однородной оболочки с толщиной δ_0 , β — коэффициент, учитывающий закон изменения толщины.

Для различных законов изменения толщины оболочки при различных граничных условиях показатель весовой эффективности будет иметь вид $\gamma = (\alpha)/(\beta^2)$.

Для оболочки с толщиной, меняющейся по закону $\delta(x) = \delta_0 e^{-cx}$, получим $\beta = (1 - e^{-cl})/(cl)$ и поправочный коэффициент для шарнирного опирания краев оболочки имеет вид

$$\alpha = \sqrt{\left[\frac{1 - e^{-3cl}}{3cl} - \frac{3cl(1 - e^{-3cl})}{9(cl)^2 + 4\pi^2} \right] \left[\frac{1 - e^{-cl}}{cl} - \frac{cl(1 - e^{-cl})}{(cl)^2 + 4\pi^2} \right]}.$$

Для оболочки с толщиной, меняющейся по закону

$$\delta(x) = \delta_0(1 + a \sin \pi x/l),$$

имеем

$$\beta = 1 + \frac{2a}{\pi},$$

$$\alpha = \sqrt{4 \cdot \frac{3\pi + 8a}{3\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4a}{\pi} + \frac{9a^2}{8} + \frac{16a^3}{15\pi} \right)} \text{ — для шарнирного опирания,}$$

$$\alpha = \sqrt{(1 + 1.78a + 1.5a^2 + 0.45a^3)(3 + 8.52a)} \text{ — для защемления,}$$

$$\alpha = \sqrt{(1 + 1.91a + 1.5a^2 + 0.42a^3)(0.45 + 0.96a)} \text{ — для консольного закрепления краев.}$$

В случае составной цилиндрической оболочки, когда $\delta = \delta_1$ ($0 \leq x \leq l_1$), $\delta = \delta_2$ ($l_1 \leq x \leq l$), получаем $\beta = \bar{l} + \bar{\delta}(1 - \bar{l})$, где $\bar{\delta} = \delta_2/\delta_1$, $\bar{l} = l_1/l$, при этом

$$\alpha = \sqrt{[a(1 - \bar{\delta}^3) + \bar{\delta}^3]} \cdot \sqrt{[a(1 - \bar{\delta} + \bar{\delta})]}, \quad a = \bar{l} - \frac{\sin 2\pi\bar{l}}{2\pi\bar{l}}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad \bar{l} = \frac{l_1}{l}.$$

Результаты расчетов, представленные графически, показывают, что среди рассмотренных примеров только оболочка, толщина которой изменяется по закону $\delta(x) = \delta_0 e^{-cx}$, имеет характеристики устойчивости, приблизительно равные расчетным для оболочки с постоянной толщиной стенок (рис. 1, где $\bar{l} = l_1/l$), в остальных случаях конструкции с переменной толщиной стенок способны выдерживать гораздо более высокую нагрузку.

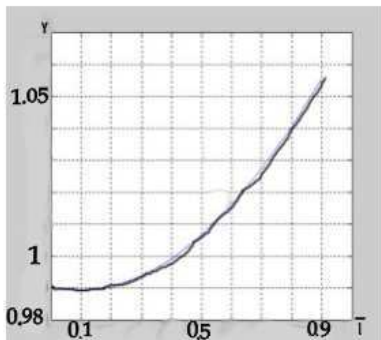


Рис. 1

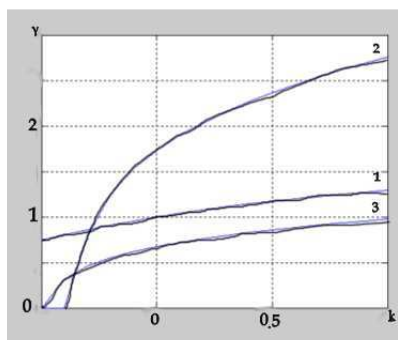


Рис. 2

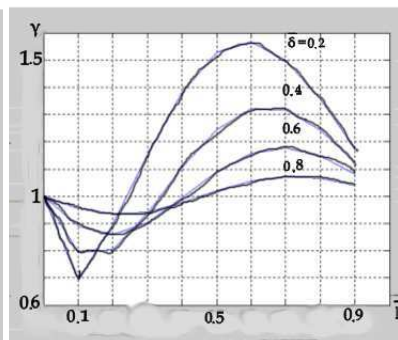


Рис. 3

Для случая $\delta(x) = \delta_0(1 + a \sin \pi x/l)$ показатель эффективности представлен на рис. 2 (где цифрами 1, 2, 3 показаны случаи шарнирного опирания краев оболочки, защемления и консоли). Для составной оболочки в случае классических граничных условий зависимость изображена на рис. 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антоненко Э.В., Хлопцева Н.С. Осесимметричная формапотери устойчивости тонкостенных цилиндров переменной толщины // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С.165–167.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.
4. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 308 с.

УДК 629

Ю.Н. Челноков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

1. Дифференциальные уравнения ориентации орбиты космического аппарата. Будем считать, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения космического аппарата (КА) направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих

размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления \mathbf{u} как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в угловых элементах орбиты имеют вид

$$\begin{aligned} d\Omega_u/dt &= (r/c) u \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{cosec} I, \\ dI/dt &= (r/c) u \cos(\omega_\pi + \varphi), \\ d\omega_\pi/dt &= -(r/c) u \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{ctg} I, \\ d\varphi/dt &= c/r^2, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad c = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω_u – долгота восходящего узла, I – наклон орбиты, ω_π – угловое расстояние перицентра от узла (переменные Ω_u , I , ω_π называются угловыми оскулирующими элементами орбиты КА), φ – истинная аномалия (угловая переменная, характеризующая положение КА на орбите); $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, $c = |\mathbf{r} \times \boldsymbol{\nu}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости центра масс КА); u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (управление).

Решение задачи переориентации орбиты КА на основе классических уравнений (1) достаточно сложно в силу их нелинейности и наличия в них особых точек $I = 0, \pi$. Задача решается гораздо проще, если использовать дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига – Гамильтона), имеющие вид [1,2]

$$\begin{aligned} 2d\Lambda_0/dt &= -\Omega_1\Lambda_1 - \Omega_2\Lambda_2, \\ 2d\Lambda_1/dt &= \Omega_1\Lambda_0 - \Omega_2\Lambda_3, \quad 2d\Lambda_2/dt = \Omega_2\Lambda_0 + \Omega_1\Lambda_3, \\ 2d\Lambda_3/dt &= \Omega_2\Lambda_1 - \Omega_1\Lambda_2, \\ d\varphi/dt &= c/r^2, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad c = \operatorname{const}, \\ \Omega_1 &= (r/c) u \cos \varphi, \quad \Omega_2 = (r/c) u \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где Λ_j ($j=0,1,2,3$) – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА в опорной (инерциальной) системе координат X ; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$ – проекции вектора $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси.

Уравнения в кватернионной записи принимают вид

$$\begin{aligned} 2d\boldsymbol{\Lambda}/dt &= \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 = (r/c) u (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \\ d\varphi/dt &= c/r^2, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad c = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий элемент орбиты КА); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона.

Вводя кватернионную переменную $\Delta\mathbf{\Lambda}$, характеризующую отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения, задаваемого кватернионом $\mathbf{\Lambda}^*$, в соответствии с кватернионной формулой $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* \circ \Delta\mathbf{\Lambda}$ сложения конечных поворотов [2] и используя кватернионное дифференциальное уравнение (3) ориентации орбиты КА, получаем следующее кватернионное дифференциальное уравнение возмущенного движения центра масс КА в параметрах Эйлера:

$$\begin{aligned} 2d\Delta\mathbf{\Lambda}/dt &= \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega} = \\ &= (r(\varphi(t))/c) u \Delta\mathbf{\Lambda} \circ (\cos \varphi(t)\mathbf{i}_1 + \sin \varphi(t)\mathbf{i}_2), \quad c = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где кватернионная переменная $\Delta\mathbf{\Lambda} = \cos(1/2\Delta\Phi) + \sin(1/2\Delta\Phi)\mathbf{e}_\Delta$ определяется соотношением $\Delta\mathbf{\Lambda} = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}$, в силу которого начальное условие для кватернионного уравнения (4) определяется заданными значениями $\mathbf{\Lambda}^0, \mathbf{\Lambda}^*$ кватернионов начальной и конечной ориентаций орбиты КА: $\Delta\mathbf{\Lambda}(t_0) = \tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}^0$; $\Delta\Phi$ и \mathbf{e}_Δ являются для текущего момента времени t соответственно эйлеровым углом и единичным вектором эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота $\mathbf{\Lambda}^*$.

При непосредственном использовании переменных $\Delta\Phi, e_{\Delta i} (i=1,2,3)$ для решения задачи переориентации орбиты КА необходимо рассматривать дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в этих переменных. Эти уравнения получаются из кватернионного уравнения (4) при выделении в нем скалярной и векторной частей и имеют вид

$$d\Delta\Phi/dt = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c) u (\cos \varphi e_{\Delta 1} + \sin \varphi e_{\Delta 2}), \quad (5)$$

$$2(de_{\Delta}/dt)_i = \mathbf{e}_\Delta \times \mathbf{\Omega} + \text{ctg}(1/2\Delta\Phi)(\mathbf{e}_\Delta \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_\Delta)), \quad \Delta\Phi \neq 0. \quad (6)$$

Отметим, что уравнение (5) справедливо для любого $\Delta\Phi$, а уравнение (6) – для $\Delta\Phi \neq 0$, и производная в векторном уравнении (6) является локальной.

Решение задачи переориентации орбиты КА в соответствии с методом теории устойчивости и управления движением твердого тела, предложенным в [3], может быть получено на основе рассмотрения лишь одного скалярного дифференциального уравнения (5).

2. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата за фиксированное время. С использованием эйлерова описания поворота орбиты в пространстве задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата может быть сформулирована следующим образом.

Требуется построить управление

$$U = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c) u (\cos \varphi(t) e_{\Delta 1} + \sin \varphi(t) e_{\Delta 2}), \quad (7)$$

переводящее орбиту космического аппарата, изменение ориентации которой описывается уравнением

$$d\Delta\Phi/dt = U = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{e}_\Delta = (r(\varphi)/c) u (\cos \varphi(t) e_{\Delta_1} + \sin \varphi(t) e_{\Delta_2}), \quad (8)$$

из начального положения, описываемого кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}_0$, в конечное положение, описываемое кватернионом ориентации $\mathbf{\Lambda}^*$, за фиксированное время t_1 . При этом должен минимизироваться функционал качества

$$J = \int_0^{t_1} (\pm^{1/2} \alpha_1 (\Delta\Phi)^2 + {}^{1/2} \alpha_2 U^2) dt = \int_0^{t_1} (\pm^{1/2} \alpha_1 (\Delta\Phi)^2 + {}^{1/2} \alpha_2 (\Delta\dot{\Phi})^2) dt, \quad (9)$$

где α_1, α_2 – положительные весовые коэффициенты.

Управление U здесь имеет смысл проекции вектора $\mathbf{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты на направление \mathbf{e}_Δ эйлеровой оси конечного поворота орбиты. Это ”новое” управление U содержит, как видно из (7), ”старое” управление u .

Краевые условия по переменной $\Delta\Phi$ (эйлерову углу поворота орбиты) определяются соотношениями

$$\Delta\Phi(t_0) = \Delta\Phi(0) = 2 \arccos \text{scal}(\tilde{\mathbf{\Lambda}}^* \circ \mathbf{\Lambda}^0), \quad \Delta\Phi(t_1) = 0. \quad (10)$$

Решение поставленной задачи с использованием принципа максимума Понтрягина дает закон оптимального управления

$$U = -k\Delta\Phi(0) \left[\sin(kt) + \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \cos(kt) \right], \quad k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (11)$$

для знака ” – ” в подынтегральном выражении (9) и закон

$$U = k\Delta\Phi(0) \left[\text{sh}(kt) - \frac{\text{ch}(kt_1)}{\text{sh}(kt_1)} \text{ch}(kt) \right], \quad k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (12)$$

для знака ” + ”.

Оптимальные законы изменения эйлерова угла поворота орбиты КА, удовлетворяющие краевым условиям (10) и соответствующие управлениям (11) и (12), имеют вид (13) и (14)

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi(0) \left[\cos(kt) - \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \sin(kt) \right], \quad k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (13)$$

$$\Delta\Phi(t) = \Delta\Phi(0) \left[\text{ch}(kt) - \frac{\text{ch}(kt_1)}{\text{sh}(kt_1)} \text{sh}(kt) \right], \quad k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \quad (14)$$

соответственно. В соотношении (13) $t_1 \neq \frac{n\pi}{k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Физическое управление u имеет вид

$$u = -k\Delta\Phi(0)\frac{c}{p} \frac{1 + e \cos \varphi}{e_{\Delta_1} \cos \varphi + e_{\Delta_2} \sin \varphi} \left[\sin(kt) + \frac{\cos(kt_1)}{\sin(kt_1)} \cos(kt) \right]$$

для знака "–" в подынтегральном выражении (9) и

$$u = k\Delta\Phi(0)\frac{c}{p} \frac{1 + e \cos \varphi}{e_{\Delta_1} \cos \varphi + e_{\Delta_2} \sin \varphi} \left[sh(kt) - \frac{ch(kt_1)}{sh(kt_1)} ch(kt) \right]$$

для знака "+".

При этом должно выполняться условие

$$e_{\Delta_1} \cos \varphi + e_{\Delta_2} \sin \varphi \neq 0.$$

Заключение. Предложено аналитическое решение задачи переориентации орбиты КА за фиксированное время посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА. Для построения управления, оптимального в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества, использован новый метод теории устойчивости и управления движением, предложенный в [3]. Этот метод позволяет заменить традиционное, как правило, численное решение рассматриваемой задачи управления в трехмерном пространстве угловых элементов орбиты, содержащем особые точки, регулярным аналитическим решением задачи управления для системы с одной степенью свободы, в качестве фазовой координаты которой выступает эйлеров угол поворота орбиты КА.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 5. С. 502–517.
2. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
3. Челноков Ю.Н. Об одной концепции в теории устойчивости и управления движением твердого тела, основывающейся на теоремах Эйлера – Даламбера и Шаля // Гироскопия и навигация. 2004. № 3 (46). С. 107–118.

И.А. Чернов

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ КРУГЛОЙ ЭЖЕКТИРУЮЩЕЙ СТРУИ ФАКЕЛЬНОГО ТИПА

Уравнение пограничного слоя в случае осесимметричного течения имеет вид ($\Psi(x, y)$ – функция тока; x, y – цилиндрические координаты; $u = \Psi_y/y$, $v = -\Psi_x/y$ – компоненты вектора скорости на оси x, y ; ν – коэффициент вязкости)

$$\Psi_y \Psi_{xy} - \Psi_x \Psi_{yy} - \frac{\nu}{y} (\Psi_{yy} + y \Psi_{yyy}) = 0.$$

Найдено решение указанного уравнения (здесь $\Delta = cx^{(2k)} + y^{(2k)}$)

$$\Psi(x, y) = \left[2(k+1)y^{(2k)}x\nu - 2(k-1)cx^{(2k+1)}\nu \right] / \Delta.$$

Тогда u, v принимают вид

$$u(x, y) = \left[8k^2\nu y^{(2k-2)}cx^{(2k+1)} \right] / \Delta^2,$$

$$v(x, y) = - \frac{2\nu \left[(k+1)y^{(4k)}x + 2c(1-2k^2)x^{(2k+1)}y^{(2k)} + c^2(1-k)x^{(4k+1)} \right]}{xy\Delta^2}.$$

Оно является автомодельным с независимой переменной $\eta = y/x$ и при $k=1, c=4/\gamma^2$ совпадает с решением в [1, с. 226].

При $k > 1, c > 0$ обобщенное решение описывает течение с источниками на оси x , при этом жидкие частицы, выходя вертикально, поворачивают в сторону положительных x , заполняя конус с углом полураствора β ,

$$tg\beta = [(k-1)c/(k+1)]^{1/2k}.$$

Внешняя часть течения за счет вязкости вовлекается в движение, при малых x частицы двигаются по направлению к оси симметрии течения, а затем разворачиваются параллельно образующей конуса. При $y=0$ скорости таковы: $u=0, v \sim 2\nu(k-1)x^{(2k)}/y$.

Как и в решении Шлихтинга, здесь выполняется закон сохранения продольной составляющей количества движения, которая одинакова для любого сечения x .

Рассмотрим интеграл, определяющий x -компоненту количества движения,

$$Q = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 y dy.$$

Переходя к автомодельным переменным, получим

$$Q = 128\nu\pi\rho k^4 c^2 \int_0^\infty \frac{\eta^{(4k-3)}}{(c + \eta^{(2k)})^2} d\eta.$$

Интеграл (обозначим его как $I(k, c)$) при $k = 1$ равен $1/(2c)$, а при $k > 1$

$$I(k, c) = \frac{(k-1) \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{k}\right)}{2k^2 c^{(\frac{1}{k})}}.$$

Далее приводятся рисунки, поясняющие детали течения, построенные при $k = 3/2, \nu = 1, c = 1$. На рис. 1 изображены линии тока. Прямая, состоящая из точек, это разделяющая линия тока.

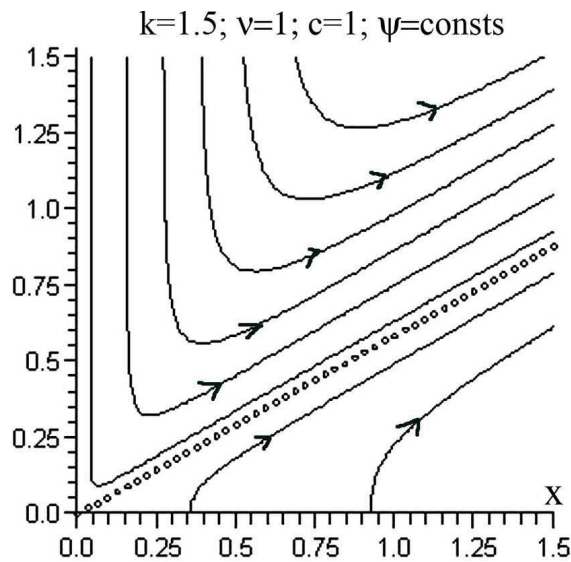


Рис. 1

Отметим характерные свойства: на линии $\Psi = 0$ функции $u(y), v(y)$ в сечении $x = \text{const}$ имеют наибольшие значения.

На рис. 2,3 показано поведение скоростей $u(y), v(y)$ в сечениях $x = x_0$.

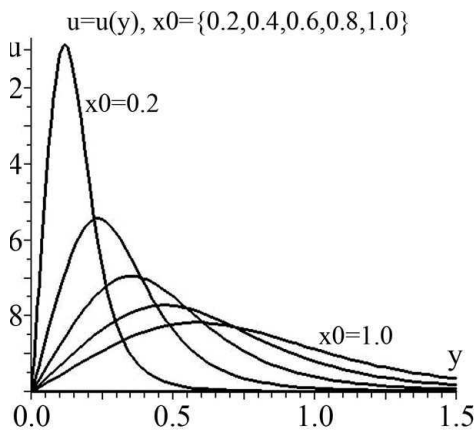


Рис. 2

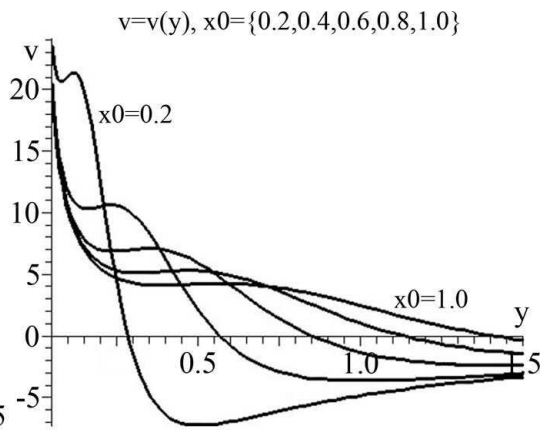


Рис. 3

Представляется возможным приложение данного решения к описанию течения вблизи выхода газа из горелки. При возгорании газа возникает эффект источников на оси, в результате появляется коническая конфигурация внутреннего течения. При этом необходимо привлечение уравнений температурного пограничного слоя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 480 с.

..

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 9

Ответственный за выпуск *С. П. Сидоров*

Технический редактор *Л. В. Агальцова*

Корректор *Е. Б. Крылова*

Оригинал-макет подготовлен *О. Л. Багаевой* в пакете $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$

Подписано в печать 18.12.2007.

Формат 60× 84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Компьютер Модерн. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,76(10,5). Уч.-изд. л. 8,8. Тираж 200 экз. Заказ 2.

Издательство Саратовского университета.

410012, Саратов, Астраханская, 83.

Типография Издательства Саратовского университета.

410012, Саратов, Астраханская, 83.