УДК 517.518

# Множества единственности для подсистем системы Виленкина–Крестенсона[1]

**А. Д. Казакова, М. Г. Плотников (Москва, Россия)**
anna.kazakova@math.msu.ru, mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Изучаются множества единственности для некоторых подсистем системы Виленкина–Крестенсона. Приводится p-ичный аналог теоремы Стечкина–Ульянова о множествах единственности для системы Радемахера.

*Ключевые слова:* системы Виленкина–Крестенсона, обобщенные системы Радемахера, множества единственности.

# Sets of uniqueness for subsystems of the Vilenkin–Chrestenson system[1]

**A. D. Kazakova, M. G. Plotnikov (Moscow, Russia)**
anna.kazakova@math.msu.ru, mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Uniqueness sets for some subsystems of the Vilenkin–Chrestenson system are studied. A p-ary analogue of the Stechkin–Ul'yanov theorem on uniqueness sets for the Rademacher system is given.

*Keywords:* Vilenkin–Chrestenson systems, generalized Rademacher systems, sets of uniqueness.

## Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ определены комплекснозначные функции $f_n(x)$. Множество $E \subset [a, b]$ — *множество единственности* ($U$*-множество*) для системы функций $\{f_n(x)\}$, если из сходимости к нулю ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x), \quad c_n \in \mathbb{C},$$

по этой системе следует, что все $c_n = 0$.

Множества единственности для тригонометрической системы функций служили предметом многочисленных исследований (см. напр., [1, гл. XIV], [2, гл. IX], [3]. Первые результаты о природе множеств, при сходимости вне которых к нулю рядов по тригонометрической системе не нарушается единственность, получал ещё Кантор в конце 19 века.

Изучались множества единственности и другим систем функций, в частности, для системы Уолша [4, гл. III], [5, гл.VII]. В данной работе мы исследуем множества единственности для подсистем системы Виленкина–Крестенсона.

Зафиксируем натуральное число $p \geq 2$. *Обобщенными функциями Радемахера* назовем функции $R_k(x) := \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\lfloor x \cdot p^{k+1}\rfloor\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, $x \in [0, 1)$. Всевозможные конечные произведения функций $R_k$ называют *функциями Виленкина–Крестенсона* (в двоичном случае — *функциями Уолша*). В нумерации Пэли функция Виленкина–Крестенсона $VC_n$ есть $\prod\limits_{k=0}^{\infty}(R_k)^{n_k}$, где $n_k$ — коэффициенты из $p$-ичного разложения числа $n$.

Множества единственности для подсистем системы Уолша исследовались в работах Стечкина и Ульянова [6], Coury [7], Лукомского [8], [9], Асташкина и Суханова [10], ряде других. В частности, в [6] доказывалось, что любое множество $A \in [0, 1)$ меры меньше $\frac{1}{2}$ является множеством единственности для системы Радемахера, а в [7], [8], [9], [10] были найдены классы множеств единственности положительной меры для некоторых подсистем системы Уолша.

## Основные результаты

**Лемма 1.** *Пусть $E_0, \ldots, E_{p-1} \subset [0, 1)$ и $\mu E_j \geq a$ для всех $j$. Тогда $\mu(X) \geq \frac{pa-1}{p-1}$, где*

$$X = \{x \in [0, 1)\colon x \text{ элемент хотя бы двух из множеств } E_j\}.$$

Следующая теорема обобщает теорему 3 из [6], имеет схожее доказательство, которое мы не приводим.

**Теорема 1.** *Всякое множество $E \subset [0, 1)$ с $\mu(E) < \frac{p-1}{p}$ является множеством единственности для рядов по обобщенной системе Радемахера.*

Неравенство в теореме 1 является точным: многочлен $(R_0 - R_1)(x)$ равен нулю на множестве

$$\bigcup_{m=0}^{p-1}\left[\frac{m}{p} + \frac{m}{p^2}, \frac{m}{p} + \frac{m+1}{p^2}\right].$$

меры $\frac{1}{p}$.

Теперь для каждого натуральных $p \geq 2$ и $d \geq 1$ рассмотрим множество $V_p^{(d)}$, состоящее из всех натуральных $n$ вида

$$n = p^{k_1} + p^{k_2} + \ldots + p^{k_s}, \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_s, \qquad s \leq d. \tag{1}$$

В случае $p=2$ это в точности объединение хаосов Радемахера порядков меньших или равных $d$ (см. [10]).

При доказательстве теоремы 2, которая обобщает теорему 1 из работы [10], используются лемма 1 и техника из доказательства упомянутой теоремы 1 из [10]. Здесь мы не рассматриваем более интересный случай, когда вместо сумм $p^{k_j}$ из (1) рассматриваются суммы $n_j p^{k_j}$ с $n_j \in \{1,\dots,p-1\}$.

**Теорема 2.** *Если ряд*

$$\sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n(x) \tag{2}$$

*сходится к некоторому $C$ на множестве $E\subset[0,1)$ с $\mu E > 1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^d$, то $C=0$ и все $c_n=0$.*

**Доказательство.** Будем доказывать индукцией по $d$. При $d=1$ утверждение верно согласно теореме 1. Допустим, утверждение верно для $d-1$ и предположим, что оно не верно для $d$ и существует не тождественно нулевой ряд (2), который сходится к $C$ на множестве $E$ меры $\mu E > 1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^d$. Рассмотрим все подобные ряды и из всех номеров $n$ с ненулевыми $c_n$ из этих рядов выберем $n$ с минимальным $k_1$ из формулы (1). Обозначим $\widetilde{n}$ выбранное и $\widetilde{k}$ — соответствующее $k_1$. Положим:

$$E_i = E + \frac{i}{p^{\widetilde{k}+1}} \,(\mathrm{mod}\, 1), \quad i=0,\dots,p-1, \qquad F_{ij}=E_i\cap E_j, \quad i\neq j.$$

Если $X$ — объединение всевозможных $F_{ij}$, то (лемма 1)

$$\mu(X) > \frac{p\mu(E)-1}{p-1} > \frac{p\left(1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^d\right)-1}{p-1} = 1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}.$$

Возьмем произвольное $F_{ij}$ и для всех $x\in F_{ij}$ рассмотрим выражение

$$\sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n\left(x-\frac{i}{p^{\widetilde{k}+1}}\right) - \sum_{n\in V_p^{(d)}} c_n VC_n\left(x-\frac{j}{p^{\widetilde{k}+1}}\right) \tag{3}$$

(разности в скобках рассматриваются по модулю 1). С одной стороны, оно равно нулю, так как обе суммы равны $C$. С другой стороны, значение (3) не изменится, если из обеих сумм него удалить ненулевые члены с одинаковыми номерами $n$ такими, что $k_1 > \widetilde{k}$ в разложении (1) числа $n$.

В оставшемся выражении можно вынести ненулевой общий множитель

$$VC_{p^{\tilde{k}}}\left(x-\frac{i}{p^{\tilde{k}+1}}\right)-VC_{p^{\tilde{k}}}\left(x-\frac{j}{p^{\tilde{k}+1}}\right).$$

и получить некоторый тождественно ненулевой ряд вида $\sum\limits_{n\in V_p^{(d-1)}} d_n VC_n(x)$, один и тот же для всех $F_{ij}$, который сходится к нулю на множестве $X$ меры, большей $1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{d-1}$. Получено противоречие с предположением индукции. Теорема доказана.

Неравенство в теореме 2 точное, т.к. многочлен

$$(R_0-R_1)\cdot\ldots\cdot(R_{2d-1}-R_{2d-2})(x)$$

равен нулю на множестве, мера которого равна $1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^{d}$ в силу независимости обобщенных функций Радемахера.

Переформулируем теорему 2 в терминах множеств единственности.

**Теорема 3.** *Всякое множество* $E\subset[0,1)$ *с* $\mu(E)<\left(\frac{p-1}{p}\right)^{d}$ *есть множество единственности для системы функций* $\{VC_n\colon n\in V_p^{(d)}\}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Zygmund A.* Trigonometric Series. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.

[3] *Kechris A., Louveau A.* Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1987.

[4] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Изд-во ЛКИ, 2008.

[5] *Schipp F, Wade W. R., Simon P.* Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Academiai Kiado, 1990.

[6] *Стечкин С. Б., Ульянов П. Л.* О множествах единственности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26, № 2, С. 211—222.

[7] *Coury J.* Some results on lacunary Walsh series // Pacific J. Math. 1973. Vol. 45, № 2. P. 419—425.

[8] *Лукомский С. Ф.* О сходимости рядов Радемахера на множествах нулевой меры // Дифференц. уравнения и теория функций: Разложение и сходимость. Саратов: Изд-во СГУ, 1983. С. 30–37.

[9] *Лукомский С. Ф.* Необходимые условия для множеств единственности рядов Уолша с лакунами // Матем. сб. 1987. Т. 133(175), № 4(8), С. 469–480.

[10] *Асташкин С. В., Суханов Р. С.* О некоторых свойствах хаоса Радемахера // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 5, С. 654–666.