УДК 517.984

О спектральных данных систем дифференциальных уравнений с особенностью[1]

М. Ю. Игнатьев (Саратов, Россия)
IgnatievMU@sgu.ru

В работе изучаются свойства спектральных данных систем дифференциальных уравнений с особенностью на полуоси в случае отсутствия дискретного спектра. В частности, устанавливается их связь с данными рассеяния.

Ключевые слова: Теория рассеяния, Обратные задачи, Системы с особенностью.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On spectral data of differential systems with a singularity[1]

M. Yu. Ignatiev (Saratov, Russia)
IgnatievMU@sgu.ru

In the paper, we study spectral data of the differential systems with a singularity in the case of empty discrete spectrum. In particular, we establish its relation with the scattering data.

Keywords: Scattering theory, Inverse problems, Systems with a singularity.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y, \tag{1}$$

где $A, B, q(x), x \in (0,\infty)$ – $n \times n$ $(n > 2)$ матрицы, причем матрицы A и B постоянны, $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, $b_j \neq 0$, $b_j \neq b_k$ при $j \neq k$, ρ – спектральный параметр. Будем считать, кроме того, что матрицы A и B удовлетворяют тем же дополнительным условиям, что в работе [1].

Определим множество:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}.$$

Пусть $\mathbb{C} \setminus \Sigma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$, где $\mathcal{S}_\nu$ – открытые непересекающиеся секторы с вершиной в нуле. При любом $\nu \in \{1, \dots, N\}$ для каждого $\rho \in \mathcal{S}_\nu$ существует перестановка $R_1, \dots, R_n$ чисел $b_1, \dots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1\rho) < \mathrm{Re}(R_2\rho) < \dots < \mathrm{Re}(R_n\rho)$. Перестановка $R_1, \dots, R_n$ зависит только от сектора $\mathcal{S}_\nu$ и не зависит от выбора $\rho \in \mathcal{S}_\nu$.

Определение. Пусть $\rho \in \mathcal{S}_\nu$, $k \in \{1, \dots, n\}$ фиксированы. Решение $\Phi_k(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$ системы (1) называется k-м решением Вейля, если оно удовлетворяет условиям:

$$\Phi_k(x,\rho) = x^{\mu_k}\left(\mathfrak{h}_k + o(1)\right), x \to 0,$$

$$\Phi_k(x,\rho) = O\left(\exp(\rho x R_k)\right), x \to \infty.$$

Здесь $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ – собственные значения матрицы A, $(\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_n)$ – соответствующие собственные векторы.

Предположим, что для матриц A, B выполнено условие информативности [1], [2]. Это гарантирует, в частности, что при $q = 0$ решения Вейля существуют для всех $\rho \neq 0$. В общем случае, когда потенциал $q(\cdot)$ отличен от тождественного нуля, k-е решение Вейля существует и единственно для всех таких $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, для которых $\Delta_{k+1}(\rho) \neq 0$, где $\Delta_{k+1}(\rho)$ характеристическая функция [2].

Пусть некоторая функция $f(\rho)$ определена при $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Определим множество $\Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} Sigma_\nu$, где через Σ_ν обозначен открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ ($\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Для $\rho \in \Sigma'$ через $f^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ обозначим пределы (при условии, что последние существуют):

$$f^\pm(\rho) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\rho \pm i\varepsilon\rho).$$

Известно, в частности [2], что предельные значения $\Delta_k^\pm(\rho)$, $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют для всех k, ν.

Будем говорить, что $q(\cdot) \in G_0^p$, если для каждого $\nu = \overline{1, N}$ и для всех $\rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k^\pm(\rho) \neq 0.$$

Всюду далее полагаем $q(\cdot) \in G_0^p$. В этом случае для любого $\rho \in \Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu = \Sigma \setminus \{0\}$ существуют предельные значения $\Phi^\pm(x,\rho)$, где $\Phi(x,\rho) := (\Phi_1(x,\rho), \dots, \Phi_n(x,\rho))$. Поскольку каждая из матриц $\Phi^-(x,\rho)$, $\Phi^+(x,\rho)$ удовлетворяет системе (1), для каждого $\rho \in \Sigma'$ определена (единственная) матрица $w(\rho)$ такая, что $\Phi^+(x,\rho) = \Phi^-(x,\rho)w(\rho)$.

Матрицу-функцию $w(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ будем называть *спектральными данными.*

Доклад посвящен описанию свойств спектральных данных систем с особенностью вида (1). Ниже приведен один из результатов исследования.

Для $\rho \in \Sigma'$ определим I_- как множество k таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k^-) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1}^-)$.

Теорема 1. *При каждом фиксированном $\rho \in \Sigma'$ матрица $w = w(\rho)$ является блочно-диагональной. Диагональные блоки матрицы $w(\rho)$ имеют размеры 1×1 и 2×2, блоки второго типа расположены в строках с номерами k и $k+1$, где $k \in I_-$, и имеют вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_{k+1,k} & 1 \end{pmatrix}.$$

Одним из важных вопросов теории обратных задач на полуоси является вопрос о связи спектральных данных, получаемых при наблюдении системы из точки $x = 0$ и данных рассеяния [3], получаемых при наблюдении из бесконечно удаленной точки. Выявляемые здесь свойства играют важную роль, в частности, в получении характеризации спектральных данных.

Теорема 2. *Пусть $v = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$ – данные рассеяния системы* (1), *где $q(\cdot) \in G_0^p$. Существует диагональная матрица-функция $\delta = \delta(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, имеющая конечные пределы $\delta^{\pm}(\rho)$ для всех $\rho \in \Sigma'$, такая, что $v(\rho)\delta^+(\rho) = \delta^-(\rho)w(\rho)$. Для матрицы $\delta(\rho)$ праведлива асимптотика $\delta(\rho) = \delta^{(0)}(\rho)(I + o(1))$, $\rho \to \infty$, где $\delta^{(0)}(\rho)$ соответствует системе* (1) *при $q = 0$.*

Приведенный ниже результат показывает, что данные рассеяния могут быть найдены по заданным спектральным данным с помощью некоторой конструктивной процедуры, не требующей решения обратной задачи. Отметим, что переход от одной постановки обратной задачи к другой может существенно влиять на эффективность использования численных алгоритмов их решения.

Следствие. *Для элементов матрицы-функции $\delta = \delta(\rho)$, выполнены следующие условия сопряжения при $\rho \in \Sigma'$: $\delta^+_{k,k}(\rho) = \delta^-_{k+1,k+1}(\rho) w_{k+1,k}(\rho)$, $k \in I_-$, $\delta^+_{k,k}(\rho) = -\delta^-_{k-1,k-1}(\rho) w^{-1}_{k,k-1}(\rho)$, $k-1 \in I_-$, $\delta^+_{k,k}(\rho) = \delta^-_{k,k}(\rho)$, $k \notin I_-$, $k-1 \notin I_-$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Ignatiev, M.* On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes. 2020. v. 108, No. 6, P. 814–826.

[2] *Ignatyev, M.* Spectral Analysis for Differential Systems with a Singularity // Results Math. 2017. v. 71, P. 1531–1555.

[3] *Игнатьев, М. Ю.* О данных рассеяния дифференциальных систем с особенностью // Мат. заметки. 2022. т. 111, №. 6, С. 846–863.