УДК 511.84

# О введении кватернионных потенциалов для обобщенной системы Коши-Римана[1]

**Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева, (Калуга, Россия)**
email@mail.ru

В данной работе рассмотрены некоторые свойства обобщенной системы Коши-Римана и приведен способ построения ее решений, использующий метод обобщенных степеней Берса.

*Ключевые слова:* обобщенные степени Берса, кватернионы, система Коши – Римана.

# On the introduction of quaternion potentials for the generalized Cauchy-Riemann system[1]

**Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva (Kaluga, Russia)**
gladyshev.yua@yandex.ru, losh-elena@yandex.ru

The paper examines some properties of a generalized Cauchy-Riemann type system. As an effective way to construct solutions to the multidimensional Laplace equation, it is recommended to use the method of generalized powers.

*Keywords:* generalized Bers degrees, quaternion, Cauchy – Riemann system.

## Введение

Для построения предложенного обобщения системы дифференциальных уравнений типа Коши-Римана [1] было использовано евклидово восьмимерное пространство. При этом используется декартова система координат $x_i$ , где $i = \overline{1,8}$. Функции, зависящие от восьми переменных, обозначим греческими символами $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), ...$ и считаем их дважды непрерывно дифференцируемыми. Эти функции в алгебраическом смысле кватернионы

$$\alpha = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i e_i,$$

где $e_i$ - базисные единицы системы кватернионов.

Используем ниже операторы

$$D_1 = \sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+1}}, \quad D_2 = \sum_{i=1}^{4} e_i \frac{\partial}{\partial x_{i+4}}, \tag{1}$$

и их кватернионы сопряжения $\overline{D}_1, \overline{D}_2$.

Кватернионный вариант системы Коши-Римана был введен в работе [1] и имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} D_1\varphi - \psi D_2 = 0, \\ \varphi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0 \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Для частных производных по $x_i$ принято

$$e_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}e_i.$$

Если $\alpha, \beta$ гармонические кватернионные функции , т.е. все компоненты $\alpha, \beta$ есть гармонические функции переменных $x_i$ , где $i = \overline{1,8}$ , то функции $\varphi', \psi', \varphi'', \psi''$ определенные как

$$\begin{array}{ll} \varphi' = \overline{D}_1\alpha, & \psi' = \alpha\overline{D}_2, \\ \varphi'' = \beta D_2, & \psi'' = D_1\beta, \end{array}$$

дают два решения системы (2). Таким образом, построение решения сводится к построению гармонического кватерниона. Можно составить общее решение

$$\varphi = \overline{D}_1\alpha - \beta D_2,$$
$$\psi = \alpha\overline{D}_2 + D_1\beta.$$

Если $\alpha, \beta$ удовлетворяют системе

$$\left.\begin{array}{l} \alpha D_2 + D_1\beta = 0, \\ \overline{D}_1\alpha + \beta\overline{D}_2 = 0 \end{array}\right\},$$

то значения $\varphi, \psi$ не меняются, так как $\varphi' = \psi' = 0$. Эта ситуация напоминает калибровочную инвариантность в электродинамике, если $\alpha, \beta$ принять в качестве потенциалов.

Как следует из сказанного выше, нахождение решений обобщенного уравнения Коши-Римана сведено к построению решения уравнения Лапласа, поэтому можно предложить метод обобщенных степеней, предложенный в [2], [3]. Несколько изменим форму записи уравнения Лапласа. Положим

$$\Delta = \sum_{i=1}^{8} \partial s_i,$$

где $\partial s_i = \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$.

Построим обобщенные степени путем применения правых обратных операторов к обобщенной константе. Рассматривая обобщенные степени как элементы некоторого линейного векторного пространства умножим степень на числовой множитель $h_1^{p_1}h_2^{p_2}...h_z^{p_z}$ и запишем символический полином

$$(h_1s_1 + ... + h_zs_z)^nC.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одной физической интерпретации обобщенных условий Коши-Римана // В сборнике: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», 2021. С. 102–109.

[2] *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана // В сборнике: Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2022. С. 101–104.

[3] *Лошкарева Е. А., Гладышев Ю. А., Малышев Е. Н.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 1. С. 11–23.