УДК 517.9

Решение спектральной задачи для оператора Лапласа в областях со входящим углом[1]

С. И. Безродных, А. А. Иванникова
(Москва, Россия, ФИЦ ИУ РАН)
sbezrodnykh@mail.ru, aivannikova94@gmail.com

Доклад посвящен эффективному вычислению собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа в областях g, со смешанным однородным условием Дирихле — Неймана на границе ∂g, которая содержит входящий угол раствора $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$. Искомые собственные функции $\{U_m\}$ представлены в виде пределов линейных комбинаций аппроксимативных функций из набора $\{\omega_m\}$, где каждая функция ω_m тождественно удовлетворяет уравнению $\Delta\omega_m + \lambda\omega_m = 0$ с параметром $\lambda > 0$ в области g и краевому условию на части ее границы. Собственные числа найдены путем решения специальных трансцендентных уравнений. Представлены результаты решения указанной спектральной задачи на примере несимметричной L–образной области.

Ключевые слова: Спектральные задачи, L–образная область, глобальные аппроксимативные системы функций.

Solution of the spectral problem for the Laplace operator in a domain with reentrant corner[1]

S. I. Bezrodnykh, A. A. Ivannikova
(Moscow, Russia, FRC CSC of the RAS)
sbezrodnykh@mail.ru, aivannikova94@gmail.com

The talk considers the issue of effective calculation of eigenvalues and eigenfunctions of the Laplace operator in domains g with mixed uniform Dirichlet — Neumann condition on its boundary ∂g, which contains a reentrant corner $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$. The desired eigenfunctions $\{U_m\}$ are represented as limits of linear combinations of approximative functions $\{\omega_m\}$, where each function ω_m satisfies the equation $\Delta\omega_m + \lambda\omega_m = 0$ with the parameter $\lambda > 0$ in the domain g and satisfies to the uniform boundary condition on a part of its boundary. The eigenvalues are found by solving special transcendental equations. We present results of solving the spectral problem using the example of a non–symmetric L-shaped domain.

Keywords: Spectral problems, L–shaped domains, global approximative systems of fuctions.

Рассматривается следующая спектральная задача:

$$\Delta U(x) + \lambda U(x) = 0, \qquad x \in g, \tag{1}$$

$$U(x) = 0, \quad x \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \qquad \partial_\nu U(x) = 0, \quad x \in \mathcal{N}, \tag{2}$$

в плоской конечной односвязной области g с кусочно–гладкой границей ∂g без точек внешнего и внутреннего заострения; полярные координаты на плоскости переменного $x = (x_1, x_2)$ обозначаем (r, φ). Дуга $\mathcal{C}$, являющаяся частью угла раствора $\pi\beta$, $\beta \in (1, 2)$, определяется по формуле

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+, \qquad \mathcal{C}_\pm := \big\{r \in [0, r_\pm], \varphi = \pm\pi\beta/2\big\}, \quad r_\pm > 0.$$

Предполагаем, что $\mathcal{D} = \cup_s \mathcal{D}_s$ и $\mathcal{N} = \cup_j \mathcal{N}_j$, так что кривая $\mathcal{D} \cup \mathcal{N}$ является объединением конечного числа последовательно соединенных звеньев $\mathcal{D}_s$, $\mathcal{N}_j$; символ ∂_ν означает производную по внешней нормали в точках гладкости $\mathcal{N} \subset \partial g$.

Представленное в докладе решение спектральной задачи (1), (2) построено с помощью развития результатов работ [1]– [4]. Для построения собственных функций $U_m = U_m(x, \lambda_m)$ будем использовать аппроксимативную систему функций $\big\{\omega_m(x, \lambda)\big\}_{m\in\mathbb{N}}$, определяемых в полярных коодинатах (r, φ) по следующим формулам:

$$\omega_m(x, \lambda) = J_{m/\beta}\big(\lambda^{1/2} r\big) \sin\Big(m\Big(\frac{\varphi}{\beta} + \frac{\pi}{2}\Big)\Big), \qquad m = 1, 2, \dots , \tag{3}$$

где $J_s(\rho)$ — функции Бесселя порядка s, см. [5]. Нетрудно убедиться в том, что функции $\omega_m(x, \lambda)$, $m \in \mathbb{N}$, тождественно удовлетворяют уравнению (1) в бесконечной угловой области $g_0 := \{(r, \varphi) : r \in (0, \infty), \varphi \in (-\pi\beta/2, \pi\beta/2)\}$ и однородному условию Дирихле (2) на ее границе ∂g_0:

$$\begin{gathered} \Delta\omega_m(x, \lambda) + \lambda\omega_m(x, \lambda) = 0, \qquad x \in g_0, \\ \omega_m(x, \lambda) = 0, \qquad x \in \partial g_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Для нумерации решений $\{U_m(x), \lambda_m\}$ спектральной задачи (1), (2) далее мы используем пару индексов: $\{U_{k,n}(x), \lambda_{k,n}\}$, $k, n \in \mathbb{N}$. Будем искать $U_{k,n}(x)$ в виде предела

$$U_{k,n}(x) = \lim_{M\to\infty} U_{k,n}(M; x), \tag{5}$$

где приближенные собственные функции $U_{k,n}(M; x)$ имеют вид линейных комбинаций

$$U_{k,n}(M; x) := \sum\nolimits_{s=1}^{M} a_{s,k}(M)\omega_{s+k-1}(x, \lambda_{k,n}(M)); \tag{6}$$

фигурирующие здесь функции $\omega_m(x, \lambda)$ определены по формуле (3), а коэффициенты $a_{s,k}(M)$ и приближенные собственные числа $\lambda_{k,n} = \lambda_{k,n}(M)$, $n = 1, 2, \dots$, подлежат нахождению. Учитывая (4), нетрудно увидеть, что линейные комбинации (6) тождественно удовлетворяют уравнению (3) в области g и однородному условию Дирихле на $\mathcal{C}$ при любых значениях коэффициентов $a_{s,k}(M)$. Таким образом, для построения приближенной собственной функции $U_{k,n}(M; x)$ необходимо так подобрать коэффициенты $a_{s,k}(M)$ и значения $\lambda_{k,n}(M)$, чтобы при $M \to \infty$ последовательность функций $\{U_{k,n}(M;x)\}$ стремилась к нулю на $\mathcal{D}$, а последовательность $\{\partial_\nu U_{k,n}(M;x)\}$ стремилась к нулю на $\mathcal{N}$.

Для построения вычислительного алгоритма мы выполняем указанное требование в проекционном смысле в $L_2(\mathcal{D} \cup \mathcal{N})$. Определим $TU(x)$ так, что $TU(x) = U(x)$, $x \in \mathcal{D}$, и $TU(x) = \partial_\nu U(x)$, $x \in \mathcal{N}$. Проектируя $TU_{n,k}(x)$, где $U_{n,k}$ определены в (6), на специально выбранную систему функций $\{h_{j,k}(x)\}$, $j = \overline{1,M}$, приходим к следующей системе из M уравнений для коэффициентов $a_{s,k}(M)$, $s = \overline{1,M}$:

$$\mathfrak{P}_{M,k}(\lambda)\mathbf{q}_k = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{q}_k := (a_{1,k}, \ldots, a_{M,k})$ — искомый вектор; $\mathfrak{P}_{M,k}(\lambda)$ — матрица размера $M \times M$, элементами которой являются проекции $\omega_{s+k-1}(x,\lambda)$ на применяемую систему функций $\{h_{j,k}(x)\}$, $j = \overline{1,M}$; примеры выбора таких систем см. в [4].

Система (7) однородна, поэтому для существования нетривиального решения $\mathbf{q}_k$ потребуем, чтобы детерминант матрицы $\mathfrak{P}_{M,k}$ обратился в нуль. Таким образом, получаем следующее трансцентентое уравнение относительно λ:

$$\det \mathfrak{P}_{M,k}(\lambda) = 0, \tag{8}$$

решениями которого являются приближенные собственные числа $\lambda_{k,n}(M)$. После нахождения корня $\lambda_{k,n}(M)$ с номером n уравнения (8) подставим его вместо λ в систему (7), вычеркнем из нее последнее уравнение и положим $a_{1,k}(M) = 1$. Решая построенную таким способом систему линейных уравнений относительно $(a_{2,k}, \ldots, a_{M,k})$, находим коэффициенты в формулах (6).

В докладе представлены результаты реализации изложенного алгоритма решения спектральной задачи на примере несимметричной L–образной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fox L., Henrici P., Moler C.* Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators // SIAM J. Numer. Anal. 2009. Vol. 4, № 1. P. 89–102.

[2] *Strang G., Fix J.* An Analysis of the Finite Element Method. NJ : Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1973.

[3] *Vlasov V. I.* A method for solving boundary value problems for the Laplace equation in domains with cones // Dokl. Math. 2004. Vol. 70, № 1. P. 599–602.

[4] *Безродных С. И., Власов В. И.* Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Vol. 54, № 4. P. 619–685.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра ортогональные многочлены. Москва : Наука, 1974. 297 с.